



T.C.

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ISI DENKLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU
İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DERYA AYDIN

ŞUBAT

ŞUBAT 2021

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DERYA AYDIN

**ISI DENKLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE
SAYISAL ÇÖZÜMLERİ**

Derya AYDIN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ŞUBAT 2021



Sevgili ođlum'a

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(İmza)

Derya AYDIN

(Tarih)

İS DENKLEMLERİNİN HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE SAYISAL ÇÖZÜMLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Derya AYDIN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Şubat-2021

ÖZET

Bu çalışmada, parabolik türden lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Bunun için öncelikle ele aldığımız lineer ısı denklemini Crank-Nicolson, Homotopi Perturbasyon ve Adomian Ayrıştırma metotları ile sayısal ve analitik olarak çözüp, elde edilen sayısal sonuçlar karşılaştırılmıştır. Bu karşılaştırma sonucunda Homotopi Perturbasyon ve Adomian Ayrıştırma metotlarının, Crank-Nicolson metodundan daha kararlı olduğu görülmüştür. Ayrıca ele aldığımız ikinci mertebenden lineer olmayan parabolik türden kısmi diferansiyel denklemler Newton lineerleştirme ve Homotopi Perturbasyon metotlarıyla sayısal olarak çözülmüştür. Elde edilen sonuçlar karşılaştırıldığında sonuçların kararlı ve yakınsak olduğu görülmüştür.

Sayfa Adedi : 48
Anahtar Kelimeler : Parabolik Denklem, Homotopi Perturbasyon Metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu, Crank-Nicolson Metodu, Newton Lineerleştirme Metodu
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

NUMERICAL SOLUTIONS OF HEAT EQUATIONS WITH HOMOTOPY
PERTURBATION METHOD

(M.Sc. Thesis)

Derya AYDIN

AMASYA UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

February-2021

ABSTRACT

In this study, numerical solutions of linear and non-linear partial differential equations of parabolic type are investigated. To this purpose, we first solved the linear heat equation numerically and analytically with Crank-Nicolson, Homotopy Perturbation and Adomian Decomposition methods, and then compared the numerical results. As a result of this comparison, it was seen that Homotopy Perturbation and Adomian Decomposition methods are more stable than the Crank-Nicolson method. Also, the second order nonlinear partial differential equations of parabolic type that we discussed were solved numerically by Newton's linearization and Homotopy Perturbation methods. When the results were compared, it was seen that the results were stable and convergent.

Page Number : 48
Key Words :Parabolic Equation, Homotopy Perturbation Method, Adomian Decomposition Method, Crank-Nicolson Method, Newton's linearization Method
Supervisor : Assist Prof. Dr. Serpil ŞAHİN

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca değerli yardımlarıyla ve katkılarıyla beni yönlendiren, tez konusunun belirlenmesi, tezimin hazırlanması sürecinde bütün fedakârlık ve yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN'e teşekkürlerimi sunarım.

Aynı zamanda, bu süreçte desteğini ve yardımını esirgemeyen değerli eşim Murat AYDIN'a teşekkür ederim.



İÇİNDEKİLER

	Sayfa
ÖZET.....	iv
ABSTRACT.....	v
TEŞEKKÜR.....	vi
İÇİNDEKİLER.....	vii
ÇİZELGELERİN LİSTESİ.....	ix
ŞEKİLLERİN LİSTESİ.....	x
SİMGELER VE KISALTMALAR.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. GENEL BİLGİLER.....	4
2.1. Temel Tanımlar.....	4
2.2. Kısmi Türevli Diferansiyel Denklemlerin Genel Bir Sınıflandırılması.....	4
2.3. Kısmi Diferansiyel Denklem Türleri.....	5
2.4. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı.....	8
2.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlar İçin Gösterim.....	9
3. MATERYAL VE METOT.....	12
3.1. Lineer Parabolik Denklemlerin Çözümü.....	12
3.1.1. Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu.....	12
3.1.2. Gauss yok etme metodu.....	13
3.1.3. Matris metodu ile Crank-Nicolson kapalı çözüm metodunun kararlılık analizi.....	15
3.1.4. Homotopi perturbasyon metodu.....	16

	Sayfa
3.1.5. Adomian ayrışım metodu.....	17
3.2. Lineer Olmayan Parabolik Denklemlerin Çözümü.....	18
3.2.1. Newton metodu ile lineerleştirme.....	19
3.2.2. Newton metodunun kararlılığı.....	20
3.2.3. Homotopi perturbasyon metodu.....	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	23
4.1. Örnek.....	23
4.1.1 Analitik çözüm.....	23
4.1.2. Adomain ayrışım metodu.....	25
4.1.3. Homotopi perturbasyon metodu.....	26
4.1.4. Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu.....	27
4.2. Örnek.....	29
4.2.1. Newton lineerleştirme metodu.....	29
4.2.2. Homotopi perturbasyon metodu.....	34
4.3. Örnek.....	36
4.3.1. Newton lineerleştirme metodu.....	37
4.3.2. Homotopi perturbasyon metodu.....	41
5. SONUÇ VE ÖNERİLER.....	44
KAYNAKLAR.....	45
ÖZGEÇMİŞ.....	48

ÇİZELGELERİN LİSTESİ

Çizelge	Sayfa
Çizelge 4.1. $t = 0,888264$ zamanında analitik çözüm ile Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu kullanılarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	28
Çizelge 4.2. Örnek 4.1 için Crank-Nicolson(CNM) ve Homotopi Perturbasyon (HPM) metotlarının uygulanması sonucu oluşan hatalar.....	29
Çizelge 4.3. (4.13) probleminin Newton lineerleştirme metodu ve Homotopi perturbasyon metodu kullanılarak elde edilen sayısal çözüm sonuçların karşılaştırılması.....	36
Çizelge 4.4. (4.17) probleminin analitik çözümü ile Newton lineerleştirme metodu ve Homotopi perturbasyon metodu kullanılarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması.....	43

ŞEKİLLERİN LİSTESİ

Şekil	Sayfa
Şekil 2.1. Zamana bağlı bir boyutlu ısı akışı.....	7
Şekil 2.2. Sonlu fark türev formüllerinin geometrik gösterimi.....	8
Şekil 2.3. Sonlu-fark ızgara gösterimi.....	10



SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
h, k	Düğüm ağının genişliği ve yüksekliği
$u_{i,j}$	(i, j) .düğüm noktasında sonlu-fark denklemlerinin çözümü
$O(h^n)$	$(h$ adım uzunluğuna bağlı olarak) n . ve daha yüksek dereceli kalan terimler
$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j}$	u fonksiyonunun (i, j) -inci düğüm noktasındaki x bağımsız değişkenine göre kısmi türevi
L	Diferansiyel operatör
L^{-1}	İntegral operatörü
p	Küçük bir parametre
Ω	Omega
Γ	Gama
λ	Öz değer
v_s	Öz vektör

Kısaltmalar	Açıklama
AAM	Adomian Ayrışım Metodu
CNM	Crank-Nicolson Metodu
HPM	Homotopi Pertürbasyon Metodu

NLM

Newton Lineerleştirme Metodu



1. GİRİŞ

Birçok fiziksel problem, adi veya kısmi diferansiyel denklemler içeren matematiksel modeller tarafından tanımlanabilir. Matematiksel model, matematiksel terimlerle ifade edilen fiziksel gerçeğin basitleştirilmiş bir açıklamasıdır. Problemlerin analitik veya yaklaşık çözüm araştırmaları bu matematiksel modellerin araçlarını anlamak için yardımcı olur. Adi veya kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için çeşitli sayısal yöntemler geliştirilmiştir.

Son yıllarda, lineer olmayan bilimin hızla gelişmesiyle birlikte, bilim adamlarının ve mühendislerin katıhal fiziği, plazma fiziği, akışkanlar mekaniği ve nükleer bilimler, kimyasal reaksiyonlar, ısı transferi, nüfus dinamiği ve biyolojik bilimler gibi uygulamalı bilimin birçok matematiksel modelinde lineer olmayan problemleri çözmek için analitik asimptotik tekniklere olan ilgisi giderek artmaktadır[1-6]. Birçok farklı alanda, bilim ve mühendislikte, lineer olmayan kısmi türevli denklemlerin analitik veya sayısal çözümünü bulmak önemlidir. Lineer olmayan denklemlerin analitik ve yaklaşık çözümlerini bulmak için yeni yöntemlere ihtiyaç duymak oldukça önemli bir problemdir. Lineer olmayan denklemlerin çoğu kesin bir analitiğe sahip değildir. Bu nedenle, bu denklemleri çözmek için büyük ölçüde sayısal yöntemler kullanılmıştır. Lineer olmayan denklemler için analitik teknikler de vardır. Son yıllarda, birçok araştırmacı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini çeşitli yöntemler kullanarak incelemiştir.

Sayısal analiz yöntemleri, fizik ve mühendislik alanlarında karşımıza çıkan ileri seviyede matematiksel problemleri çözmek için genellikle bilgisayar tabanlı yöntemler kullanılır. Bu sayısal yöntemler, mühendislerin ve temel bilimcilerin ve hatta sosyal bilimcilerin bile kendi problemlerini çözmek için başvurdukları bir alan haline gelmiştir. Bu yöntemlerin en önemli avantajı analitik çözümü bulunamayan problemlerin bile sonuçlarının bu yöntemlerle elde edilebilmesidir. Bu yöntemlerden biri olan, Homotopi Pertürbasyon metodu (HPM), 1998 yılında Ji-Huan He tarafından bulunmuştur. He, metodu oluştururken pertürbasyon metodu ile homotopi kavramını birleştirmiş ve lineer olmayan problemleri, çözümü daha kolay olan lineer problemlere dönüştürmüştür[7-17]. Topolojide homotopi ve klasik pertürbasyonun bir kombinasyonu olan bu yöntem lineer ve lineer olmayan fonksiyonel denklem türlerindeki birçok problemin çözümünde başarıyla uygulanmıştır. Oldukça geniş bir uygulama alanı

içinde kullanılabilen bu metot problemlerin analitik veya yaklaşık çözümlerini elde etmek için uygun bir yol sunar. Örneğin Duffing denklemi ve Blasius denklemlerinin çözümü için HPM kullanılmıştır[18-19]. Daha sonra fen bilimlerinde lineer olmayan dalga denklemleri, sınır değer problemleri, Riccati diferansiyel denklemleri ve integral denklemlerini çözmek için bu metot kullanılmıştır[20-22]. Ayrıca Klein-Gordon ve sinüs-Gordon denklemleri, başlangıç değer problemleri, Schrödinger denklemi, Emden-Fowler tipi denklemler, lineer olmayan evrim denklemleri, diferansiyel-fark denklemleri, modifiye KdV denklemi ve diğer birçok problemin çözümünde de HPM kullanılmıştır[23-27]. Bu kadar çok çeşitli uygulamada bu tekniğin kullanılması HPM'nin fonksiyonel denklemleri çözümedeki gücünü ve kullanılabilirliğini ortaya koymaktadır. HPM yönteminin en önemli avantajı, perturbasyon denkleminin topolojide homotopi ile birçok şekilde özgürce inşa edilebilmesi, başlangıç yaklaşımının da özgürce seçilebilmesi ve kolayca hesaplanabilir terimlerle yakınsak seri formlarında çözümler üretebilmesidir. Bazı durumlarda da tek bir tekrarlama analitik çözümler elde edilmiştir.

Adomian ayrışım metodu, 1980'li yıllarda George Adomian tarafından tanıtılmıştır[28-31]. "Solving Frontier Problems in Physics" kitabının da yazarı olan Adomian [32], bu kitabında metodunu anlatmıştır. Adomian bu metodu; fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte ortaya çıkan, sınır ve başlangıç şartları olan deterministik, stokastik, lineer ve lineer olmayan problemlere yaklaşık ve uygun çözümleri gözlemlemek amacıyla uygulamıştır[33]. Bu metot, lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer yöntemlere göre daha basit ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen seri çözüm yöntemidir. Yöntem, gerçek sonuca hızlı yakınsayan güvenilir bir yaklaşımdır. Birçok araştırmacı [34-36], AAM'nin pek çok karmaşık problem için başka yöntemleri kullanmaya gerek kalmadan çözüme çok hızlı yakınsadığını göstermiştir. Ayrıştırma metodu, diferansiyel denklemlere, cebirsel denklemlere, integral denklemlerine, kısmi türevli denklemlere, bunların lineer ve lineer olmayan olanların geniş bir sınıfına uygulanarak yaklaşık çözümleri ve ayrıştırma serileri türünden sayısal çözümlerinin bulunmasını kolaylaştıran bir yöntemdir.

Sayısal analizde, Crank-Nicolson yöntemi, ısı denklemini ve benzeri kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için kullanılan sonlu fark yöntemidir[37-39]. Yöntem, 20.yüzyılın ortalarında John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından geliştirilmiştir. Difüzyon denklemleri (ve diğer birçok denklem) için, Crank-Nicolson yönteminin koşulsuz olarak kararlı olduğu gösterilebilir[40]. Crank-Nicolson yöntemi, her zaman adımında çözülecek bir üç köşegenli (tridiyagonal) lineer sistem içerir. Bu sistem, Gauss eliminasyon teknikleri

ile uygun bir şekilde çözülebilir[41]. Yakınsaklık ve kararlılık göz önüne alındığında, Crank-Nicolson yöntemi, tek boyutlu ısı denklemi problemlerinin sayısal çözümünü bulmak için önemli bir algoritmadır.

Bu çalışmada kullanılan lineer olmayan parabolik türden kısmi diferansiyel denklemlerin literatürde analitik çözümleriyle ilgili çok fazla çalışma bulunmamaktadır. Bu tür denklemleri çözmek için bazı sayısal metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu nedenle literatürde bu tür sayısal çözümlerin önemli bir yeri vardır.

Biz de bu çalışmada parabolik türden lineer kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için Crank-Nicolson, Homotopi Perturbasyon ve Adomian Ayrıştırma metotlarını; parabolik türden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemleri sayısal olarak çözmek için de Newton lineerleştirme ve Homotopi Perturbasyon metotlarını kullandık. Uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte bu metotların kararlılık ve yakınsaklık özelliklerini inceledik.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Temel Tanım

2.1.1. Tanım

Birden çok bağımsız değişken, en az bir bağımlı değişken ve bu bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren denklemlere kısmi diferansiyel denklemler denir. Kısmi diferansiyel denklemlerin genel formu,

$$F(x, y, z, z_x, z_y, z_{xx}, z_{xy}, z_{yy}, \dots) = 0$$

şeklindedir.

2.2. Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Sınıflandırılması

2.2.1. Lineer olmasına göre

Kısmi diferansiyel denklemde bağımlı değişken ve bunların kısmi türevleri birinci dereceden ve denklemin bağımlı değişken ile onun türevleri parantezinde yazdığımızda katsayılar sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonu oluyorsa bu denkleme lineerdir denir.

Birinci ve ikinci mertebeden lineer kısmi diferansiyel denklemlerin genel formları sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$A(x, y)z_x + B(x, y)z_y + C(x, y)z = D(x, y)$$

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y)z_x + E(x, y)z_y + F(x, y)z = G(x, y)$$

2.2.2. Yarı Lineer (Kuasi-Linear) olmasına göre

Bir kısmi diferansiyel denklem, denklemde görülen en yüksek mertebeli kısmi türevlere göre lineer ise bu denkleme yarı lineerdir denir.

Birinci ve ikinci mertebeden yarı lineer denklemlerin genel şekilleri sırasıyla aşağıda verilmiştir.

$$P(x, y, z)z_x + Q(x, y, z)z_y = R(x, y, z)$$

$$P(x, y, z, z_x, z_y)z_{xx} + Q(x, y, z, z_x, z_y)z_{xy} + R(x, y, z, z_x, z_y)z_{yy} + T(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

2.2.3. Hemen-Hemen lineer olmasına göre

Bir kısmi türevli denklem yarı lineer ve denklemde görülen en yüksek mertebeden türevlerin katsayıları sadece bağımsız değişkenlerin fonksiyonları oluyorsa bu denkleme hemen-hemen lineer denklem denir.

İkinci mertebeden hemen- hemen lineer bir denklemin genel şekli aşağıdaki gibidir.

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

2.3. Kısmi Türevli Denklem Türleri

Bu türdeki denklemler, üç tip olarak sınıflandırılır. x ve y değişkenlerine göre

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F = 0$$

şeklinde verilen ikinci dereceden bir denklemin eğrisi kuadratik bir eğridir. Bu eğriye,

$$B^2 - 4AC > 0 \quad \text{ise bir hiperbol,}$$

$$B^2 - 4AC < 0 \quad \text{ise bir elips,}$$

$$B^2 - 4AC = 0 \quad \text{ise bir parabolüdür denir.}$$

Benzer şekilde z ; x ve y bağımsız değişkenlerinin fonksiyonu olmak üzere, ikinci mertebeden bir kısmi türevli denklemin genel formu;

$$A(x, y)z_{xx} + B(x, y)z_{xy} + C(x, y)z_{yy} + D(x, y, z, z_x, z_y) = 0$$

şeklinde verilebilir.

Diskriminant fonksiyonu,

$$\Delta(x, y) = [B(x, y)]^2 - 4A(x, y).C(x, y)$$

şeklinde tanımlanmak üzere denkleme,

$$\Delta(x, y) > 0 \quad \text{ise hiperbolik,}$$

$$\Delta(x, y) < 0 \quad \text{ise eliptik,}$$

$$\Delta(x, y) = 0 \quad \text{ise parabolik}$$

tiptendir denir.

2.3.1. Hiperbolik tip:

En tipik örneği dalga denklemdir. Dalgaların nasıl bir yayılıma sahip olduğunu ifade ettiklerinden “dalga denklemi” olarak adlandırılır. Ses, ışık ve su dalgalarının hareketlerini betimleyen fiziksel nicelikler bu denklemin çözümlerinden ortaya çıkmaktadır. Akustik, akışkanlar mekaniği ve elektromanyetikte oldukça fazla kullanılır.

c pozitif bir reel sabit ve t zaman değişkeni olmak üzere 1-boyutlu dalga denklemi aşağıdaki gibidir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

2.3.2. Eliptik tip:

En fazla karşılaşılan örnekleri Laplace ve Poisson denklemleridir ve sırasıyla

Laplace denklemi: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \nabla^2 \phi = 0;$

Poisson denklemi: $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = f(x, y) = \nabla^2 \phi = f$

şeklindedir.

Laplace denkleminin birçok uygulaması vardır. Bunlardan birisi de etrafı izole edilmiş bir bölgede zamandan bağımsız (kararlı) bir ısı dağılımı mevcut ise herhangi bir noktadaki ısı miktarını veren $\phi(x, y)$ fonksiyonu Laplace denklemini sağlar.

Poisson denklemi, dış faktörlerin etkisi altında kalan bir telin zamana bağlı durumda denge konumuna gelmesi olarak düşünülebilir.

2.3.3. Parabolik tip:

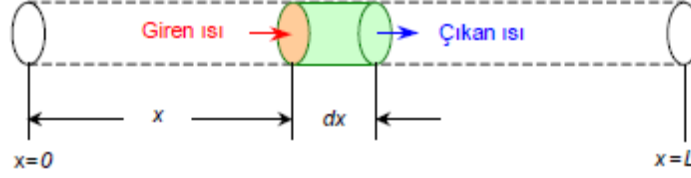
Parabolik türden bir denklem,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

şeklinde ifade edilir. Bu denklemdeki α ifadesi aşağıda belirtilmiştir. Zamana bağlı ısı veya kütle yayılması olduğundan bu denkleme ısı denklemi veya yayılım denklemi denir. Burada

biz ısı denklemini ele alacağız. Bu örneğin diğer durumlardan farkı, kararlı hal problemi değil zamana bağlı yani ısının zamanla değişkenlik gösterdiği bir problem olmasıdır.

Şekilde L uzunluğundaki çubuk üzerinde dx genişlikli izole edilmiş bir çubuk alalım.



Şekil 2.1. Bir boyutta zamana bağlı ısı akışı

$$\text{Bölgeye giren ısı} = -kA \frac{du}{dx} \quad (2.1)$$

$$\text{Bölgeden çıkan ısı} = -kA \frac{d}{dx} \left(u + \frac{du}{dx} dx \right)$$

(2.2)

Burada k , ısı iletim katsayısı; A , çubuk üzerinde alınan bölgenin alanıdır. Kararlı durumda bu bölgeye giren ısı, çıkan ısıya eşit olmaktadır. Kararlı olmayan durumdaysa, birim zamanda bölgeye giren ısı ve çıkan ısı arasındaki fark, depolanan ısıya eşit olur. Birim zamanda depolanan ısı miktarı,

$$c\rho(A dx) \frac{du}{dt} \quad (2.3)$$

olarak verilir. Burada c , birim kütle ve birim sıcaklık başına depolanan ısı; ρ , malzemenin yoğunluğu ve $A dx$, bölgenin hacmidir.

Bu ifadeleri kullanarak,

$$-kA \frac{du}{dx} - \left[-kA \left(\frac{du}{dx} + \frac{d^2u}{dx^2} dx \right) \right] = c\rho(A dx) \frac{du}{dt}$$

$$kA \frac{d^2u}{dx^2} dx = c\rho A dx \frac{du}{dt}$$

$$k \frac{d^2u}{dx^2} = c\rho \frac{du}{dt}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha = \frac{k}{c\rho}$ olmak üzere iki veya üç boyutlu halde,

$$u_t = \alpha \nabla^2 u \quad (2.4)$$

ısı denklemini elde edilir.

2.4. Türevlere Sonlu Fark Yaklaşımı

Bir u fonksiyonu ve türevleri sonlu, tek değerli, ve x değişkeninin sürekli bir fonksiyonu olduğunda Taylor teoremine göre,

$$u(x+h) = u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) + \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots$$

(2.5)

$$u(x-h) = u(x) - hu'(x) + \frac{h^2}{2!}u''(x) - \frac{h^3}{3!}u'''(x) + \dots \quad (2.6)$$

denklemleri yazılabilir. (2.5) denkleminde birinci türev çekilirse

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - \frac{h}{2!}u''(x) - \frac{h^2}{3!}u'''(x) - \dots$$

elde edilir. Burada

$$O(h) = -\frac{h}{2!}u''(x) - \frac{h^2}{3!}u'''(x) - \dots$$

hata mertebesi olarak alınırsa, yukarıdaki denklemden;

$$u(x+h) \cong u(x) + hu'(x)$$

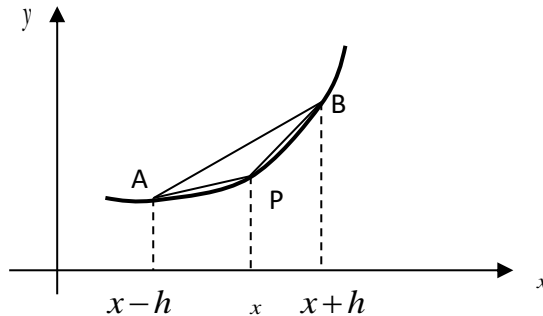
bulunur. Sonuç olarak

$$u'(x) = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + O(h)$$

(2.7)

yaklaşımı elde edilir. Bu yaklaşıma ileri fark yaklaşımı denir.

Şimdi bu söylediklerimizi geometrik olarak ifade edelim.



Şekil 2.2. Sonlu-Fark Türev Formüllerinin Geometrik Gösterimi

Şekil 2.2'de P noktasındaki teğetin eğimine, BP kirişinin eğimi yardımıyla yaklaşılabılır. O halde,

$$u'(x) \cong \frac{u(x+h) - u(x)}{h}$$

şeklinde bulunur.

(2.6) denkleminde birinci türev çekilip benzer işlemler yapılırsa,

$$u'(x) = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} + O(h) \quad (2.8)$$

geri fark yaklaşımı bulunur. Şekil 2.2'de P noktasındaki teğetin eğimine, yaklaşmak için AP kirişinin eğimi kullanıldığında aynı formül bulunur.

(2.5) ve (2.6) denklemlerini toplarsak

$$\begin{aligned} u(x+h) + u(x-h) &= 2u(x) + h^2 u''(x) + O(h^4) \\ u''(x) &= \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.9)$$

elde edilir.

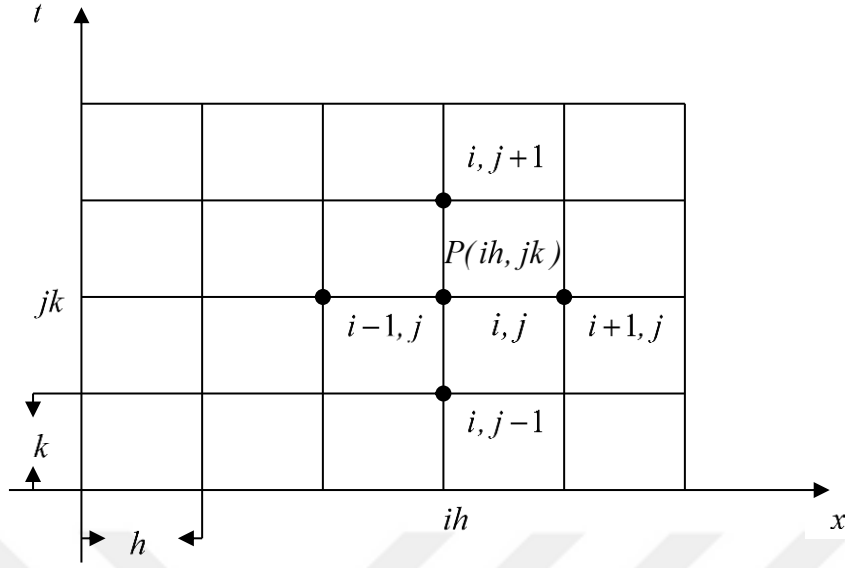
(2.5) ve (2.6) denkleminin farkı alınır,

$$\begin{aligned} u(x+h) - u(x-h) &= 2hu'(x) + O(h^3) \\ u'(x) &= \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} + O(h^2) \end{aligned} \quad (2.10)$$

merkezi fark yaklaşımı elde edilir. Şekil 2.2'de, AB kirişinin eğimi kullanılarak P noktasındaki teğetin eğimine yaklaşıldığında merkezi fark yaklaşımı elde edilir. Şekilden de görüldüğü gibi bu üç yaklaşımın içinde en iyi sonucu merkezi fark yaklaşımı verir.

2.5. Çok Değişkenli Fonksiyonlar İçin Gösterim

u , x ve t bağımsız değişkenlerinin bir fonksiyonu olmak üzere $u = u(x, t)$ şeklinde ifade edilsin. x ve t düzlemini, kenarları $\delta x = h$ ve $\delta t = k$ olan eşit dikdörtgensel bölgelere bölelim. i ve j tamsayı olmak üzere herhangi bir P noktasının (x, t) koordinatlarını $x = ih$ ve $t = jk$ şeklinde alalım. P noktasında u fonksiyonunun değerini; $u = u(ih, jk) = u_{i,j}$ şeklinde gösterelim.



Şekil 2.3. Sonlu-Fark Izgara Gösterimi

(2.9) denkleminde

$$u''(x) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u((i+1)h, jk) - 2u(ih, jk) + u((i-1)h, jk)}{h^2} \quad (2.11)$$

eşitliği yazılabilir. Burada $u = u(ih, jk) = u_{i,j}$ şeklinde yazarsak

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

olarak yazılabilir. Burada kesme hatası $O(h^2)$ olur.

Benzer şekilde k^2 mertebeden bir hata ile

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2}$$

şeklinde yazılabilir.

Benzer şekilde P noktasındaki ileri fark yaklaşımı ile $\frac{\partial u}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ değerleri sırasıyla k ve

h mertebeden bir hata ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} \right)_{i,j} = \frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i,j} = \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{h}$$

Aynı şekilde P noktasındaki geri fark yaklaşımı ile $\frac{\partial u}{\partial t}$ ve $\frac{\partial u}{\partial x}$ değerleri sırasıyla k ve h mertebeden bir hata ile aşağıdaki şekilde yazılabilir.

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i,j-1}}{k}$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{i,j} = \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{h}$$



3. MATERYAL VE METOT

3.1. Lineer Parabolik Denklemlerin Çözümü

3.1.1. Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu

Parabolik türden kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için birçok kapalı sonlu fark yöntemi vardır. Problemden kararlılık göz önüne alındığında, zaman adımlarının sayısı ve buna bağlı olarak işlem sayısı artacaktır. Bu olumsuzluğu ortadan kaldırmanın bir yolu, zaman adımının sınırlı olmadığı Crank-Nicolson kapalı çözüm metodudur.

Crank ve Nicolson, daha az hesaplama gerektiren bir metot geliştirdiler. Bu metot,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

ısı denklemine,

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{k} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i-1,j+1}}{h^2} + \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} \right\}$$

sonlu fark yaklaşımının uygulanması esasına dayanır. Bu denklemde $r = \frac{k}{h^2}$ alınırsa,

$$-ru_{i-1,j+1} + (2 + 2r)u_{i,j+1} - ru_{i+1,j+1} = ru_{i-1,j} + (2 - 2r)u_{i,j} + ru_{i+1,j} \quad (3.1)$$

denklemini bulunur. (3.1) denklemini u fonksiyonunun üçer tane bilinen ve bilinmeyen değerini içerir. Bu denklemini,

$$-u_{i-1,j+1} + au_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i+1,j} - bu_{i,j} + u_{i-1,j} \quad (3.2)$$

şeklinde düzenlersek burada $i = 1, 2, \dots, n-1$ ve $j = 0, 1, \dots, m-1$ olmak üzere $\alpha = 2(1 + 1/r)$, $\beta = 2(1 - 1/r)$ şeklindedir. Her bir i için (3.2) denklemini yazıldığında $(n-1)$ denklemler ve bilinmeyenden oluşan bir lineer denklem sistemi elde edilir. Sınır koşullarından $u_{0,j+1}$ ve $u_{n,j+1}$ değerleri bilinmektedir. Örneğin $n=4$ için kullanacağımız lineer denklem sistemi,

$$\begin{aligned} -u_{0,j+1} + au_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= u_{2,j} - bu_{1,j} + u_{0,j} \\ -u_{1,j+1} + au_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= u_{3,j} - bu_{2,j} + u_{1,j} \\ -u_{2,j+1} + au_{3,j+1} - u_{4,j+1} &= u_{4,j} - bu_{3,j} + u_{2,j} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu denklem sistemi,

$$\begin{aligned} au_{1,j+1} - u_{2,j+1} &= b_1 \\ -u_{1,j+1} + au_{2,j+1} - u_{3,j+1} &= b_2 \\ -u_{2,j+1} + au_{3,j+1} &= b_3 \end{aligned}$$

şeklinde de yazılabilir. Burada,

$$\begin{aligned} b_1 &= u_{2,j} - bu_{1,j} + u_{0,j} + u_{0,j+1} \\ b_2 &= u_{3,j} - bu_{2,j} + u_{1,j} \\ b_3 &= u_{4,j} - bu_{3,j} + u_{2,j} + u_{4,j+1} \end{aligned}$$

şeklindedir. (3.2) fark denklemini kullanarak u 'nun yaklaşık çözümünü bulmak için $AU = B$ şeklindeki lineer denklem sistemini Gauss yok etme metoduyla çözebiliriz.

3.1.2. Gauss yok etme metodu

Her bir zaman satırı boyunca $n-1$ tane düğüm noktası olduğu zaman Crank-Nicolson denklemleri genel olarak $u_{i,j+1} = u_i$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} b_1 u_1 - c_1 u_2 &= d_1 \\ -a_2 u_1 + b_2 u_2 - c_2 u_3 &= d_2 \\ \cdot & \\ \cdot & \\ \cdot & \\ -a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} &= d_i \\ \cdot & \\ \cdot & \\ -a_{n-1} u_{n-2} + b_{n-1} u_{n-1} &= d_{n-1} \end{aligned}$$

şeklindedir. Bu denklemde a_i, b_i, c_i, d_i katsayıları bilinmektedir. Birinci denklem ikinci denklemden u_1 değerini yok etmek için, ikinci denklem üçüncü denklemden u_2 değerini yok etmek için kullanılır. Benzer şekilde devam edilerek en sondaki denklemden u_{n-2} yok edilir ve bu işlemlerin sonunda u_{n-1} değerini içeren bir bilinmeyenli bir denklem elde edilir. Artık son denklemden başlanarak tüm bilinmeyenler bulunabilir. Sondan bir önceki $(n-1)$. denklem u_n ve u_{n-1} şeklinde iki bilinmeyeni içermektedir. Fakat u_n zaten bilindiği için bu denklemde bilinmeyen sayısı aslında bir tanedir. Bu şekilde diğer $u_{n-2}, u_{n-3}, \dots, u_2, u_1$ bilinmeyenleri geriye yerine koyma işlemleri yapılarak bulunabilir.

Burada dikkat edilmelidir ki her bir yeni denklemde mevcut olan c_i katsayısı, ilgili eski denklemdeki katsayı ile aynıdır. Yani işlem yapıldıkça c_i katsayıları değişmez. Kabul edelim ki, ardı ardına yaptığımız yok etme işlemleri sonucu şu denklemler elde edilsin.

$\alpha_1 = b_1, S_1 = d_1$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\alpha_{i-1}u_{i-1} - c_{i-1}u_i &= S_{i-1} \\ -a_i u_{i-1} + b_i u_i - c_i u_{i+1} &= d_i\end{aligned}$$

denklem sisteminden u_{i-1} değerini yok edersek,

$$\left(b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}\right)u_i - c_i u_{i+1} = d_i + \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}}$$

ifadesini elde ederiz. Burada,

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \quad S_i = d_i + \frac{a_i S_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \quad i = 2, 3, \dots, n-1$$

olarak alırsak

$$\alpha_i u_i - c_i u_{i+1} = S_i \quad (3.3)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}\alpha_{n-2}u_{n-2} - c_{n-2}u_{n-1} &= S_{n-2} \\ -a_{n-1}u_{n-2} + b_{n-1}u_{n-1} &= d_{n-1}\end{aligned}$$

denklem sistemini buluruz. Bu denklem sisteminden u_{n-2} değerini yok edersek,

$$\left(b_{n-1} - \frac{a_{n-1}c_{n-2}}{\alpha_{n-2}}\right)u_{n-1} = d_{n-1} + \frac{a_{n-1}S_{n-2}}{\alpha_{n-2}}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\alpha_{n-1} = b_{n-1} - \frac{a_{n-1}c_{n-2}}{\alpha_{n-2}}, \quad S_{n-1} = d_{n-1} + \frac{a_{n-1}S_{n-2}}{\alpha_{n-2}}$$

olmak üzere,

$$\alpha_{n-1}u_{n-1} = S_{n-1} \quad (3.4)$$

şeklinde bulunur. (3.3) ve (3.4) denklemlerini kullanarak aşağıdaki denklemlere ulaşabilir ve çözümü bu denklemlerden elde edebiliriz.

$$u_{n-1} = \frac{S_{n-1}}{\alpha_{n-1}}, \quad u_i = \frac{1}{\alpha_i}(S_i + c_i u_{i+1}), \quad i = n-2, n-1, \dots, 2, 1$$

Burada α ve S değerleri,

$$A = (2I - r T_{N-1})^{-1} (2I + r T_{N-1})$$

matrisinin her bir özdeğerinin mutlak değeri birden küçük olduğundan bu sonlu fark denklemleri kararlı olacaktır. T_{N-1} matrisinin öz değeri $-4 \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)$ iken A matrisinin özdeğeri

$$\frac{2 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)}{2 + 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2N}\right)}, \quad s = 1, 2, \dots, N-1$$

olur. r - nin tüm pozitif değerleri için, A matrisinin öz değerlerinin birden küçük olduğu açıkça görülmektedir.

O halde Crank-Nicolson denklemleri şartsız kararlılığa sahiptir.

3.1.4. Homotopi perturbasyon metodu

Homotopi perturbasyon metodu çeşitli diferansiyel denklemlerin çözümü için kullanılan yeni ve etkin bir metottur. Bu metotla geleneksel perturbasyon metotlarının en ciddi kısıtlaması olan küçük bir parametreye gerek duyulmaz. Metot, çözümü zor veya uzun olan bir lineer veya lineer olmayan problemi, çözümü kolay olan lineer denklem sistemine indirger. Şimdi genel lineer olmayan bir denklem üzerinde metodun diferansiyel denklemlere uygulanışını gösterelim. A genel bir diferansiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik bir fonksiyon ve Γ, Ω bölgesinin sınırı olmak üzere,

$$A(u) - f(r) = 0, \quad r \in \Omega \quad (3.6)$$

ve denklemin sınır koşulları

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \quad r \in \Gamma$$

olsun. A operatörü genellikle L lineer ve N lineer olmayan operatörler olmak üzere ikiye ayrılır. Böylece (3.6) denklemini,

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \quad (3.7)$$

biçiminde yeniden yazılır. Homotopi tekniğiyle, $v: \Omega \times [0, 1] \rightarrow R$ bir dönüşüm, $p \in [0, 1]$ bir gömme parametresi, u_0 (3.6) denkleminin başlangıç yaklaşımı olmak üzere;

$$H(v(r, p), p) = (1 - p)[L(v) - L(u_0)] + p[A(v) - f(r)] = 0, \quad p \in [0, 1] \quad (3.8)$$

veya

$$H(v(r, p), p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p[N(v) - f(r)] = 0 \quad (3.9)$$

homotopisi oluşturulur. Buradan

$$H(v(r, 0), 0) = L(v) - L(u_0) = 0$$

$$H(v(r, 1), 1) = A(v) - f(r) = 0$$

denklemleri elde edilir. (3.7) denklemi; $p = 0$ iken lineer denkleme, $p = 1$ iken lineer olmayan orijinal denkleme dönüşür. p parametresinin 0'dan 1'e değişimi, $v(r, p)$ çözüm serisinin $u_0(r)$ başlangıç yaklaşımından denklemin çözümü olan $u(r)$ ye değişimini verir.

Topolojide buna deformasyon adı verilir. Bu durumda $L(v) - L(u_0) = 0$ ve $A(v) - f(r) = 0$ denklemlerine "homotopiktirler" denir. Eğer p gömme parametresi "küçük parametre" olarak düşünülürse, perturbasyon tekniğiyle (3.6) denkleminin çözümü p 'nin kuvvet serisi olarak yazılabilir. Yani,

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots$$

şeklinde verilebilir.

$p \rightarrow 1$ iken denklemin yaklaşık çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olarak bulunur.

Homotopi perturbasyon metodunun en önemli avantajlarından biri, topolojideki homotopi ile birçok yolda özgürce perturbasyon denkleminin kurulabilmesi ve başlangıç yaklaşımının da özgürce seçilebilmesidir. Bu metotta uygun bir başlangıç yaklaşımı ve uygun homotopi seçmek problemin çözümü için önemlidir. Çünkü uygun homotopi seçilmemesi durumunda çözümün yakınsaklığının sağlanmaması, uygun başlangıç yaklaşımının seçilmemesi durumunda istenilen çözüme ulaşılamaması ve çözümü bulmak için sonsuz iterasyon gerekmesi bu metodun dezavantajlarındandır.

3.1.5. Adomian ayrışım metodu

Bu metot, lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümünde kullanılan diğer yöntemlere göre daha basit ve daha karmaşık denklemlere uygulanabilen seri çözüm yöntemidir. Şimdi genel olarak Adomian ayrışım metodunun nasıl kullanıldığı inceleyelim. Bunun için lineer bir

$$Lu + Ru = g \quad (3.10)$$

diferansiyel denklemini ele alalım. Burada, L tersi bulunabilen lineer operatör ve R de geriye kalan lineer terimi belirtmektedir. Verilen bu denklemin genel çözümü,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$$

şeklinde yazılır. (3.10) ifadesinden,

$$Lu = g - Ru$$

yazılabilir. Bu eşitliğin her iki tarafına L^{-1} ters operatörü uygulandığında

$$u = f - L^{-1}(Ru) \quad (3.11)$$

bulunur. Buradaki f fonksiyonu, g fonksiyonunun integralinden elde edilen terimleri temsil etmektedir.

Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.12)$$

şeklinde olduğundan (3.11) ve (3.12) ifadeleri göz önüne alınırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = f - L^{-1}\left(R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)\right)$$

yazılabilir. Yani,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = f - L^{-1}(R(u_0 + u_1 + u_2 + \dots))$$

şeklinde. Bu seri çözüm fonksiyonunun birinci terimi u_0 , verilen fonksiyonun başlangıç koşuluna eşittir. Daha sonra u_0 terimi kullanılarak u_1, u_2, u_3, \dots terimleri elde edilir. Bu da aşağıdaki tekrarlama bağıntısı kullanılarak gösterilebilir.

$$\begin{aligned} u_0 &= f, \\ u_{k+1} &= -L^{-1}(R(u_k)), k \geq 0 \end{aligned}$$

Böylece bu değerler (3.12) denkleminde yerine yazılarak u çözümü elde edilir.

3.2. Lineer Olmayan Parabolik Denklemlerin Çözümü

Lineer olmayan parabolik denklemlere sonlu fark metotlarını uygulamanın zorluğu yoktur. Zorluk, sonlu fark denklemleriyle ilgilidir. Eğer denklemler lineer ise, yakınsaklık ve kararlılık için sağlanması gereken koşulların belirli olduğu problemlerin çözümü kolaydır. Çünkü bilinmeyenlerin katsayıları ilk zaman adımındaki çözüm fonksiyonu olacaktır. Eğer denklemler lineer değilse, açık çözüm metotları ile çözüme ulaşmak zordur. Bu nedenle bazı

yollarla denklemler lineerleştirildikten sonra ardışık yaklaşımlar yöntemi ile çözülür. Lineer olmayan parabolik denklemlerin genel formu $m \geq 2$ bir tamsayı olmak üzere;

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$$

şeklindedir. Bu tür denklemler genel olarak Taylor serisi yardımıyla lineerleştirilirler. Yani, Taylor açılımı bu işlemi yapmanın standart bir yoludur ve bu işlemde elde edilen çözüm metodu genellikle Newton metodu olarak adlandırılır. Ayrıca Richtmyer metoduyla da lineer olmayan parabolik bir denklem, lineer hale getirilip çözülebilmektedir[42].

3.2.1. Newton metodu ile lineerleştirme

$$f_i(u_1, u_2, \dots, u_N) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.13)$$

denklemi ile N tane u_1, u_2, \dots, u_N bağımlı değişkenine göre N tane denklemi gösterelim. u_i tam çözümüne bilinen bir yaklaşım olarak V_i değerini alalım. Böylece $u_i = V_i + \varepsilon_i$ şeklinde yazılabilir. Bu eşitliği (3.13) denkleminde yerine yazıp, elde ettiğimiz fonksiyona Taylor açılımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} & f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial u_N} \right) f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) \\ & + \frac{1}{2!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial u_N} \right)^2 f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + \dots + \\ & \frac{1}{N!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial u_N} \right)^N f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + R_N = 0 \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $0 < \theta < 1$ olmak üzere R_N kalan terimi,

$$R_N = \frac{1}{(N+1)!} \left(\varepsilon_1 \frac{\partial}{\partial u_1} + \varepsilon_2 \frac{\partial}{\partial u_2} + \dots + \varepsilon_N \frac{\partial}{\partial u_N} \right)^{N+1} f_i(V_1 + \theta \varepsilon_1, V_2 + \theta \varepsilon_2, \dots, V_N + \theta \varepsilon_N)$$

şeklindedir. Elde edilen bu Taylor açılımında birinci mertebeden sonraki terimler ihmal edilirse,

$$f_i(V_1, V_2, \dots, V_N) + \left[\frac{\partial f_i}{\partial u_1} \varepsilon_1 + \frac{\partial f_i}{\partial u_2} \varepsilon_2 + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial u_N} \varepsilon_N \right]_{u_i=V_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (3.14)$$

eşitliği elde edilir. İkinci parantez üzerindeki alt indis ifadesi, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ ifadelerinin katsayılarında görünen u_1, u_2, \dots, u_N bağımlı değişkenleri, diferansiyellendikten sonra sırasıyla V_1, V_2, \dots, V_N ile yer değiştirdiğini belirtmektedir.

(3.14) denklemi N tane $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_N$ bilinmeyen için N tane lineer denklemi ifade eder. Çünkü V_1, V_2, \dots, V_N değerleri bilinmektedir. ε değerleri hesaplandığında yöntem tekrarlanır ve bir sonraki iterasyon için bağımlı değişkenlerin başlangıç değerleri $(V_i + \varepsilon_i)$, $i = 1, 2, \dots, N$ şeklinde olur. Bu şekilde birbirini izleyen yaklaşımlar yöntemine, $i = 1, 2, \dots, N$ olmak üzere $|\varepsilon_i| < 10^{-8}$ gibi bir doğruluk derecesi için, u_i değerleri bulunana kadar devam edilir.

3.2.2. Newton metodunun kararlılığı

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}$$

denklemine $(i, j + \frac{1}{2})$ noktasında sonlu fark yaklaşımı uygulanırsa,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \delta_t u_{i, j + \frac{1}{2}} &= \frac{1}{2h^2} \{ \delta_x^2 u_{i, j+1}^2 + \delta_x^2 u_{i, j}^2 \} \\ \Rightarrow \frac{1}{k} (u_{i, j+1} - u_{i, j}) &= \frac{1}{2h^2} \{ (u_{i-1, j+1}^2 - 2u_{i, j+1}^2 + u_{i+1, j+1}^2) + (u_{i-1, j}^2 - 2u_{i, j}^2 + u_{i+1, j}^2) \} \end{aligned}$$

elde edilir. $f = \frac{h^2}{k}$ ve $u_{i, j+1} = u_i$ alınırsa,

$$u_{i-1}^2 - 2u_i(u_i + f) + u_{i+1}^2 + \{ u_{i-1, j}^2 - 2u_{i, j}(u_{i, j} - f) + u_{i+1, j}^2 \} = 0 \equiv f_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1}) \quad (3.15)$$

eşitliği elde edilir. V_i, u_i tam çözüme bilinen bir yaklaşım olsun. Yani $u_i = V_i + \varepsilon_i$ şeklinde alalım. Bu eşitliği (3.15) denkleminde yerine koyulur ve ε_i 'deki birinci mertebeli terimlere Taylor açılımı uygulanırsa,

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}} \varepsilon_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \varepsilon_i + \frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}} \varepsilon_{i+1} \right]_{u_i = V_i} + f_i(V_{i-1}, V_i, V_{i+1}) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

eşitliği elde edilir. Bu ifadeden de,

$$b = \begin{bmatrix} V_0^2 + u_{0,j}^2 - 2u_{1,j}(u_{1,j} - f) + u_{2,j}^2 \\ u_{1,j}^2 - 2u_{2,j}(u_{2,j} - f) + u_{3,j}^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ V_N^2 + u_{N-2,j}^2 - 2u_{N-1,j}(u_{N-1,j} - f) + u_{N,j}^2 \end{bmatrix} \text{ ve } T_{N-1} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ 1 & -2 & 1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$$\varepsilon_i = (-2cT_{N-1} + 2fI)^{-1} (cT_{N-1} - 2fI)V_i + (-2cT_{N-1} + 2fI)^{-1} b$$

elde edilir. Buradan da

$$\varepsilon_i = A V_i + b'$$

eşitliği yazılabilir. Kararlılık için A matrisinin öz değerlerinin mutlak değeri 1'den küçük olmalıdır. T_{N-1} matrisinin öz değerlerinin

$$-4 \sin^2 \left(\frac{s\pi}{2N} \right), \quad s = 1, 2, \dots, N-1$$

şeklinde olduğunu biliyoruz.

O halde A matrisinin λ_s öz değerleri

$$\lambda_s = \frac{-4c \sin^2 \left(\frac{s\pi}{2N} \right) - 2f}{8c \sin^2 \left(\frac{s\pi}{2N} \right) + 2f} = \frac{- \left(4c \sin^2 \left(\frac{s\pi}{2N} \right) + 2f \right)}{8c \sin^2 \left(\frac{s\pi}{2N} \right) + 2f}$$

şeklinde elde edilir.

Kararlılık için, $|\lambda_s| \leq 1$ olduğu açıkça görülmektedir[42-43].

3.2.3. Homotopi perturbasyon metodu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^m}{\partial x^2}$$

şeklinde verilen lineer olmayan parabolik türden denkleme bir önceki kısımda anlatılan Homotopi Perturbasyon metodu uygulanacaktır. Burada $m \geq 2$ bir tamsayıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Örnek:

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} & 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(0, t) = 0, u(\pi, t) = 0, & t \geq 0 \\ u(x, 0) = \sin x + 3 \sin(2x) \end{cases} \quad (4.1)$$

şeklinde verilen parabolik denkleminin çözümünü araştıralım. Şimdi bu problemin analitik ve sayısal çözümünü bulalım.

4.1.1. Analitik çözüm

Bu denklemin analitik çözümünü aşağıdaki gibi değişkenlerine ayrılabilir formda arayalım.

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (4.2)$$

Bu eşitlikte X yalnızca x değişkeninin bir fonksiyonu, T yalnızca t değişkeninin bir fonksiyonudur.

(4.2) formundan gerekli türevleri alıp, (4.1) denkleminde yerine koyalım. Bu durumda,

$$X \frac{\partial T}{\partial t} = T \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} \quad (4.3)$$

denklemini elde edilir. Bu denklemdaki değişkenler tek değişkene bağlı olduğundan (4.3) denklemini bir adi türevli diferansiyel denklemdir. Dolayısıyla (4.3) denkleminin her iki tarafı XT ile bölüldükten sonra

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} \quad (4.4)$$

ifadesi elde edilir. (4.4) ifadesinden,

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = s = -\lambda^2, \quad \lambda > 0$$

veya

$$T' + \lambda^2 T = 0, \quad X'' + \lambda^2 X = 0 \quad (4.5)$$

denklemleri bulunur. Burada λ^2 sabiti, ayırma sabiti olarak adlandırılır. (4.5) denklemlerinin çözümü,

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 t} \quad (4.6)$$

ve

$$X(x) = A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x) \quad (4.7)$$

şeklinde olup, sınır koşullarını yerine yazarsak

$$\begin{aligned} u(0, t) = X(0)T(t) = 0, &\Rightarrow X(0) = 0 \\ u(\pi, t) = X(\pi)T(t) = 0, &\Rightarrow X(\pi) = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

elde edilir. Böylece $X(0) = 0$ 'dan dolayı, $A = 0$ ve $X(\pi) = 0$ eşitliğinden de $B \sin \lambda \pi = 0$ bulunur. Burada $B = 0$ seçilirse denklemin aşıkâr çözümüne ulaşılır. $B \neq 0$ olmak üzere, $\sin \lambda \pi = 0$ ifadesinden,

$$\lambda \pi = n\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

bulunur. Buradan da $\lambda_n = n$, $n = 1, 2, \dots$ elde edilir. λ_n 'nin sonsuz sayıdaki çözümünü göz önüne aldığımızda,

$$\begin{aligned} u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = B_n \sin(nx)C_n e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \\ \Rightarrow u_n(x, t) = a_n \sin(nx) e^{-n^2 t}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada $a_n = B_n C_n$ 'dir. Isı denklemi lineer olduğundan,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) e^{-n^2 t} \quad (4.10)$$

serisi de verilen denklemin bir çözümüdür. Bu serinin yakınsak olduğu her yerde bu seri, denklemin gerçek çözümü olur. Son olarak $u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x)$ başlangıç koşulunu uygularsak,

$$u(x, 0) = \sin(x) + 3 \sin(2x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)$$

elde edilir. Buradan da,

$$\sin(x) + 3 \sin(2x) = a_1 \sin(x) + a_2 \sin(2x) + a_3 \sin(3x) + \dots$$

ifadesi yazılabilir. Her iki tarafın benzer terimlerinin katsayılarını eşitlersek;

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 3 \quad \text{ve} \quad a_n = 0, \quad n \geq 3$$

elde edilir. Bu değerleri (4.10) denkleminde yerine yazarsak

$$u(x, t) = e^{-t} \sin(x) + 3e^{-4t} \sin(2x)$$

analitik çözümü elde edilir[44].

4.1.2. Adomian ayrışım metodu

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} \\ u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, t \geq 0 \\ u(x,0) = \sin x + 3 \sin(2x) \end{cases} \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

probleminin AAM ile çözümü aşağıdaki gibidir.

Verilen problemi operatör formunda,

$$L_t u = L_x u$$

şeklinde yazabiliriz. Burada L_t tersi alınabilen lineer diferansiyel operatördür. Bu operatörler,

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t}, \quad L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t (\cdot) dt, \quad L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

şeklinde tanımlanır. (4.1) denkleminin her iki tarafına L_t^{-1} operatörünü uygularsak,

$$L_t^{-1} L_t u = L_t^{-1} L_x u$$

ya da

$$u(x,t) - u(x,0) = L_t^{-1} L_x u$$

bulunur. Ayrıştırılmış seri çözüm fonksiyonu,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t)$$

olmak üzere,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) = \sin x + 3 \sin(2x) + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) \right)$$

eşitliği yazılabilir. O halde sıfıncı bileşen,

$$u_0 = \sin x + 3 \sin(2x)$$

olarak bulunur. Diğer bileşenler aşağıdaki gibi tekrarlama bağıntısını kullanarak bulunabilirler.

$$\begin{aligned}
u_{n+1}(x,t) &= L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) \right) \right) \\
\Rightarrow u_1 &= L_t^{-1} L_x u_0 = -t (\sin x + 12 \sin(2x)) \\
u_2 &= L_t^{-1} L_x u_1 = \frac{t^2}{2!} (\sin x + 48 \sin(2x)) \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Böylece çözüm,

$$\begin{aligned}
u &= \sin x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \dots \right) + 3 \sin(2x) \left(1 - 4t + \frac{(4t)^2}{2!} - \dots \right) \\
u &= \sin x \cdot e^{-t} + 3 \sin(2x) \cdot e^{-4t}
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

4.1.3. Homotopi perturbasyon metodu

$$\begin{cases}
u_t = u_{xx} \\
u(0,t) = 0, u(\pi,t) = 0, t \geq 0 \\
u(x,0) = \sin x + 3 \sin(2x)
\end{cases} \quad 0 < x < \pi, t > 0$$

1sı denkleminin HPM ile çözümü aşağıdaki gibidir.

He'nin homotopi perturbasyon metoduna göre, aşağıdaki homotopi oluşturulabilir.

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.11)$$

Şimdi çözümü p 'nin bir kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + p v_1 + p^2 v_2 + \dots \quad (4.12)$$

şeklinde alalım. Başlangıç koşulu göz önüne alınırsa $u_0(x,t) = \sin x + 3 \sin(2x)$ seçilebilir. Böylece, u_0 ve (4.12) denklemi, (4.11) denkleminde yerine yazılıp, p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned}
p^0 : \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0 \\
p^1 : \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - \frac{\partial u_0}{\partial t} \\
p^2 : \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} \\
p^3 : \frac{\partial v_3}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Bu sistem çözümlerse,

$$\begin{aligned}
v_0(x, t) &= \sin x + 3 \sin(2x), \\
v_1(x, t) &= -t(\sin x + 4 \cdot 3 \sin(2x)), \\
v_2(x, t) &= \frac{t^2}{2!} (\sin x + 4^2 \cdot 3 \sin(2x)), \\
v_3(x, t) &= \frac{t^3}{3!} (\sin x + 4^3 \cdot 3 \sin(2x)), \\
&\vdots
\end{aligned}$$

eşitlikleri bulunur. p parametresi 1' e yakınsarken denklemin çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
u(x, t) &= \sin x \left(1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right) + 3 \sin(2x) \left(1 - 4t + \frac{(4t)^2}{2!} - \frac{(4t)^3}{3!} + \dots \right) \\
u(x, t) &= \sin x \cdot e^{-t} + 3 \sin(2x) \cdot e^{-4t}
\end{aligned}$$

elde edilir.

4.1.4. Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu

Aynı problemi şimdi Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu ile tekrar çözelim. Bu metot r değerinin tüm sonlu değerleri için geçerli olsa da, r ' nin seçeceğimiz büyük bir değeri için $\frac{\partial u}{\partial t}$ yaklaşımı hatalı bir yaklaşıma yol açar. Uygun bir değer olarak, $h = \frac{\pi}{10}$ değeri için $r=1$ alalım. O zaman $k = 0,098696$ olacaktır. Aynı şekilde $r=1$ değeri için (2.2) denkleminde $u_{i,j}$ değerlerinin katsayıları sıfır olacaktır. O halde (2.2) denklemini aşağıdaki şekilde olur.

$$-u_{i-1,j+1} + 4u_{i,j+1} - u_{i+1,j+1} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j}$$

$i = 1, 2, \dots, 9$ olmak üzere $u_{i,j+1}$ değerini u_i ile gösterelim. Birinci zaman adımındaki u değerleri için aşağıdaki denklemleri yazabiliriz.

$$\begin{aligned} -0 + 4u_1 - u_2 &= 0 + 3,440952 \\ -u_1 + 4u_2 - u_3 &= 2,072370 + 3,662187 \\ -u_2 + 4u_3 - u_4 &= 3,440952 + 2,714412 \\ -u_3 + 4u_4 - u_5 &= 3,662187 + 1 \\ -u_4 + 4u_5 - u_6 &= 2,714412 - 0,812296 \\ -u_5 + 4u_6 - u_7 &= 1 - 2,044150 \\ -u_6 + 4u_7 - u_8 &= -0,812296 - 2,265384 \\ -u_7 + 4u_8 - u_9 &= -2,044150 - 1,454340 \\ -u_8 + 4u_9 - 0 &= -2,265384 + 0 \end{aligned}$$

Bu denklem sistemi, Gauss yok etme metodu ile çözülürse,

$$\begin{aligned} u_1 &= 1,477999, \quad u_2 = 2,471047, \quad u_3 = 2,671634, \quad u_4 = 2,060125, \quad u_5 = 0,906681, \\ u_6 &= -0,335515, \quad u_7 = -1,204594, \quad u_8 = -1,405181, \quad u_9 = -0,917641 \end{aligned}$$

değerleri elde edilir. Bu şekilde devam edilerek $t = 0,888264$ zamanına kadar u değerleri hesaplanırsa ve $t = 0,888264$ zamanında sonlu fark çözümleriyle ilgili kısmi diferansiyel denklemin analitik çözümü karşılaştırılırsa aşağıdaki tablo elde edilir.

Çizelge 4.1. $t = 0,888264$ zamanında analitik çözüm ile Crank-Nicolson kapalı çözüm metodu kullanılarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması

	Analistik Çözüm	Crank Nicolson Metodu	Hata
$x = 0$	0	0	0
$x = 0,314159$	0,177614	0,194688	0,017074
$x = 0,628318$	0,323499	0,355773	0,032274
$x = 0,9424777$	0,414507	0,460275	0,045768
$x = 1,256637$	0,441729	0,505842	0,064113

$x = 1,570796$	0,411368	0,527900	0,116532
$x = 1,884955$	0,340738	0,652625	0,311887
$x = 2,199114$	0,251100	0,352960	0,10186
$x = 2,513274$	0,160092	0,198292	0,0382
$x = 2,827433$	0,076624	0,090646	0,014022
$x = 3,141592$	0	0	0

Çizelge 4.2. Örnek 4.1 için Crank-Nicolson(CN) ve Homotopi Perturbasyon(HPM) metodlarının uygulanması sonucu oluşan hatalar

	Analitik Çözüm	Crank Nicolson Metodu	ADM/HPM $N = (12)$	Hata $ u_{tam} - u_{CN} $	Hata $ u_{tam} - u_{HPM} $
$x = 0$	0	0	0	0	0
$x = 0,314159$	0,177614	0,194688	0,165953	0,017074	0,011661
$x = 0,628318$	0,323499	0,355773	0,304631	0,032274	0,018868
$x = 0,9424777$	0,414507	0,460275	0,395639	0,045768	0,018868
$x = 1,256637$	0,441729	0,505842	0,430069	0,064113	0,01166
$x = 1,570796$	0,411368	0,527900	0,411369	0,116532	0,000001
$x = 1,884955$	0,340738	0,652625	0,352400	0,311887	0,011662
$x = 2,199114$	0,251100	0,352960	0,269969	0,10186	0,018869
$x = 2,513274$	0,160092	0,198292	0,178961	0,0382	0,018869
$x = 2,827433$	0,076624	0,090646	0,088285	0,014022	0,011661
$x = 3,141592$	0	0	0	0	0

4.2. Örnek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1 \quad (4.13)$$

başlangıç koşulu ve sınır koşulları:

$$u = 4x(1-x), \quad 0 < x < 1, \quad t = 0$$

$$u = 0, \quad x = 0 \quad \text{ve} \quad x = 1 \text{ 'de}, \quad t \geq 0$$

olan parabolik denklemin çözümünü araştıralım. Şimdi bu problemin sayısal çözümünü bulalım.

4.2.1. Newton lineerleştirme metodu

(4.13) denklemi $x-t$ düzleminde $\left\{ih, (j + \frac{1}{2})k\right\}$ noktasında sonlu fark yaklaşımı ile yer

değiştirirse,

$$\frac{1}{k} \delta_i u_{i,j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2h^2} \{ \delta_x^2 u_{i,j+1}^2 + \delta_x^2 u_{i,j}^2 \}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) = \frac{1}{2h^2} \{ (u_{i-1,j+1}^2 - 2u_{i,j+1}^2 + u_{i+1,j+1}^2) + (u_{i-1,j}^2 - 2u_{i,j}^2 + u_{i+1,j}^2) \}$$

eşitliği bulunur. $p = \frac{h^2}{k}$ ve $u_{i,j+1} = u_i$ ile tanımlanırsa,

$$u_{i-1}^2 - 2(u_i^2 + pu_i) + u_{i+1}^2 + \{ u_{i-1,j}^2 - 2(u_{i,j}^2 - pu_{i,j}) + u_{i+1,j}^2 \} = 0 \equiv f_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$$

olarak yazılabilir. $u_i = v_i + \varepsilon_i$ ifadesini yukarıdaki denklemlerde yerine koyar ve ε_i 'deki birinci mertebeli terimlere Taylor açılımını uygularsak;

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}} \varepsilon_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \varepsilon_i + \frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}} \varepsilon_{i+1} \right]_{u_i=v_i} + f_i(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan da,

$$2v_{i-1}\varepsilon_{i-1} - 2(2v_i + p)\varepsilon_i + 2v_{i+1}\varepsilon_{i+1} + \left[\{ v_{i-1}^2 - 2(v_i^2 + pv_i) + v_{i+1}^2 \} + \{ u_{i-1,j}^2 - 2(u_{i,j}^2 - pu_{i,j}) + u_{i+1,j}^2 \} \right] = 0$$

...(4.14)

eşitliği elde edilir. Burada $v_i, u_{i,j+1}$ değerine bir yaklaşımdır.

$x_i = \frac{1}{6}i$, $i = 1(1)5$ ve $t = k = \frac{1}{36}$ alalım.

Eğer v_i , $x_i = \frac{1}{6}i$, $i = 1(1)5$ ve $t = 0$ noktasındaki başlangıç değerine eşit verilirse,

$j = 0$ için $v_i = u_{i,0}$ olur. Ayrıca problem $x = \frac{1}{2}$ 'ye göre simetriktir. (4.14) denklemi,

$$2u_{i-1,0}\varepsilon_{i-1} - 2(p + 2u_{i,0})\varepsilon_i + 2u_{i+1,0}\varepsilon_{i+1} + [u_{i-1,0}^2 - 2(u_{i,0}^2 + pu_{i,0}) + u_{i+1,0}^2] + \{u_{i-1,0}^2 - 2(u_{i,0}^2 - pu_{i,0}) + u_{i+1,0}^2\} = 0$$

$$\Rightarrow 2u_{i-1,0}\varepsilon_{i-1} - 2(p + 2u_{i,0})\varepsilon_i + 2u_{i+1,0}\varepsilon_{i+1} + \{2u_{i-1,0}^2 - 4u_{i,0}^2 + 2u_{i+1,0}^2\} = 0$$

şeklinde olur. O halde,

$v_i = x_i \Rightarrow i = 1(1)5$ için;

$$v_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{6}, v_1 = 4x_1(1-x_1) = \frac{5}{9}$$

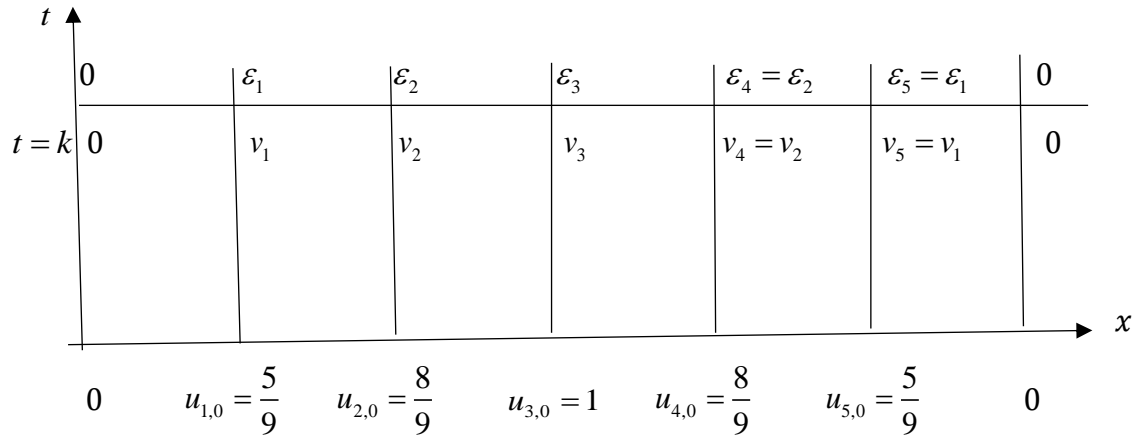
$$v_2 \rightarrow x_2 = \frac{2}{6}, v_2 = 4x_2(1-x_2) = \frac{8}{9}$$

$$v_3 \rightarrow x_3 = \frac{3}{6}, v_3 = 4x_3(1-x_3) = 1$$

$$v_4 \rightarrow x_4 = \frac{4}{6}, v_4 = 4x_4(1-x_4) = \frac{8}{9}$$

$$v_5 \rightarrow x_5 = \frac{5}{6}, v_5 = 4x_5(1-x_5) = \frac{5}{9}$$

elde edilir.



$j = 0$, $i = 1$ için;

$$2u_{0,0}\varepsilon_0 - 2(p + 2u_{1,0})\varepsilon_1 + 2u_{2,0}\varepsilon_2 + \{2u_{0,0}^2 - 4u_{1,0}^2 + 2u_{2,0}^2\} = 0$$

eşitliği bulunur. $p = 1$ alınırsa,

$$-2\left(1 + 2 \cdot \frac{5}{9}\right)\varepsilon_1 + 2 \cdot \frac{8}{9}\varepsilon_2 + \left\{-4 \cdot \frac{25}{81} + 2 \cdot \frac{64}{81}\right\} = 0$$

$$-19\varepsilon_1 + 8\varepsilon_2 + \frac{14}{9} = 0 \quad \dots(a_1)$$

$j = 0$, $i = 2$ için;

$$2u_{1,0}\varepsilon_1 - 2(p + 2u_{2,0})\varepsilon_2 + 2u_{3,0}\varepsilon_3 + \{2u_{1,0}^2 - 4u_{2,0}^2 + 2u_{3,0}^2\} = 0$$

$$2\left(\frac{5}{9}\right)\varepsilon_1 - 2\left(1 + 2 \cdot \frac{8}{9}\right)\varepsilon_2 + 2 \cdot 1 \cdot \varepsilon_3 + \left\{2 \cdot \frac{25}{81} - 4 \cdot \frac{64}{81} + 2 \cdot 1\right\} = 0$$

$$5\varepsilon_1 - 25\varepsilon_2 + 9\varepsilon_3 - \frac{22}{9} = 0 \quad \dots(a_2)$$

$j = 0$, $i = 3$ için;

$$2u_{2,0}\varepsilon_2 - 2(p + 2u_{3,0})\varepsilon_3 + 2u_{4,0}\varepsilon_4 + \{2u_{2,0}^2 - 4u_{3,0}^2 + 2u_{4,0}^2\} = 0$$

$$2\left(\frac{8}{9}\right)\varepsilon_2 - 2(1 + 2 \cdot 1)\varepsilon_3 + 2 \cdot \frac{8}{9}\varepsilon_4 + \left\{2 \cdot \frac{64}{81} - 4 + 2 \cdot \frac{64}{81}\right\} = 0$$

$$8\varepsilon_2 - 27\varepsilon_3 + 8\varepsilon_4 - \frac{34}{9} = 0 \quad \dots(a_3)$$

$j = 0$, $i = 4$ için;

$$2u_{3,0}\varepsilon_3 - 2(p + 2u_{4,0})\varepsilon_4 + 2u_{5,0}\varepsilon_5 + \{2u_{3,0}^2 - 4u_{4,0}^2 + 2u_{5,0}^2\} = 0$$

$$2\varepsilon_3 - 2\left(1 + 2 \cdot \frac{8}{9}\right)\varepsilon_4 + 2 \cdot \frac{5}{9}\varepsilon_5 + \left\{2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{64}{81} + 2 \cdot \frac{25}{81}\right\} = 0$$

$$9\varepsilon_3 - 25\varepsilon_4 + 5\varepsilon_5 - \frac{22}{9} = 0 \quad \dots(a_4)$$

$j = 0$, $i = 5$ için;

$$2u_{4,0}\varepsilon_4 - 2(1 + 2u_{5,0})\varepsilon_5 + 2u_{6,0}\varepsilon_6 + \{2u_{4,0}^2 - 4u_{5,0}^2 + 2u_{6,0}^2\} = 0$$

$$2\left(\frac{8}{9}\right)\varepsilon_4 - 2\left(1 + 2 \cdot \frac{5}{9}\right)\varepsilon_5 + \left\{2 \cdot \frac{64}{81} - 4 \cdot \frac{25}{81}\right\} = 0$$

$$8\varepsilon_4 - 19\varepsilon_5 + \frac{14}{9} = 0 \quad \dots(a_5)$$

elde edilir.

$(a_1), (a_2), (a_3), (a_4), (a_5)$ 'in matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} -19 & 8 & & & \\ 5 & -25 & 9 & & \\ & 8 & -27 & 8 & \\ & & 9 & -25 & 5 \\ & & & 8 & -19 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{14}{9} \\ \frac{22}{9} \\ \frac{34}{9} \\ \frac{22}{9} \\ -\frac{14}{9} \end{pmatrix}$$

O halde,

$$b_1 = -19 \quad a_2 = -5 \quad c_1 = -8 \quad d_1 = -\frac{14}{9}$$

$$b_2 = -25 \quad a_3 = -8 \quad c_2 = -9 \quad d_2 = \frac{22}{9}$$

$$b_3 = -27 \quad a_4 = -9 \quad c_3 = -8 \quad d_3 = \frac{34}{9}$$

$$b_4 = -25 \quad a_5 = -8 \quad c_4 = -5 \quad d_4 = \frac{22}{9}$$

$$b_5 = -19 \quad c_5 = 19 \quad d_5 = -\frac{14}{9}$$

şeklindedir. Şimdi Gauss yok etme metodunu uygulayalım.

$$\alpha_1 = b_1, \quad \delta_1 = d_1 \Rightarrow \alpha_1 = -19, \quad \delta_1 = -\frac{14}{9}$$

ve

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i \cdot c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, i = 2,3,4,5$$

eşitliğinden,

$$\alpha_2 = -22,894736$$

$$\alpha_3 = -23,855172$$

$$\alpha_4 = -21,981786$$

$$\alpha_5 = -17,180311$$

bulunur. Ayrıca,

$$\delta_i = d_i + \frac{a_i}{\alpha_{i-1}} \delta_{i-1}, \quad i = 2,3,4,5$$

eşitliğinden de

$$\delta_2 = 2,035088$$

$$\delta_3 = 4,488888$$

$$\delta_4 = 4,137996$$

$$\delta_5 = -0,049583$$

değerleri elde edilir. Yukarıda bulduğumuz değerler kullanılarak,

$$\varepsilon_{5,1} = \varepsilon_5 = \frac{\delta_5}{\alpha_5} = 0,002886$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{\alpha_4} (\delta_4 + c_4 \varepsilon_5) = -0,187590$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\alpha_3} (\delta_3 + c_3 \varepsilon_4) = -0,251082$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\alpha_2} (\delta_2 + c_2 \varepsilon_3) = -0,187590$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1} (\delta_1 + c_1 \varepsilon_2) = 0,002886$$

eşitlikleri bulunur. O halde u çözümleri,

$$u_{1,1} = v_1 + \varepsilon_1 = 0,558441$$

$$u_{2,1} = v_2 + \varepsilon_2 = 0,701298$$

$$u_{3,1} = v_3 + \varepsilon_3 = 0,748918$$

$$u_{4,1} = v_4 + \varepsilon_4 = 0,701298$$

$$u_{5,1} = v_5 + \varepsilon_5 = 0,558441$$

şeklinde elde edilir.

4.2.2. Homotopi perturbasyon metodu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u^2}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1$$

$$u = 4x(1-x), \quad 0 < x < 1, \quad t = 0$$

$$u = 0, \quad x = 0 \text{ ve } x = 1 \text{ de, } \quad t \geq 0$$

problemini homotopi perturbasyon metodu ile çözelim.

He'nin homotopi perturbasyon metoduna göre, aşağıdaki homotopi oluşturulabilir.

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \left(\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.15)$$

Şimdi çözümleri p 'nin bir kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (4.16)$$

şeklinde alalım. Başlangıç koşulu göz önüne alınırsa $u_0(x, t) = 4x(1 - x)$ seçilebilir.

Böylece, u_0 ve (4.16) denklemi, (4.15) denklemine yerine yazılıp, p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} p^0: \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0, & v_0(x, 0) &= 4x(1 - x) \\ p^1: \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_0^2}{\partial x^2} & v_1(x, 0) &= 0 \\ p^2: \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_1^2}{\partial x^2} & v_2(x, 0) &= 0 \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ p^n: \frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_{n-1}^2}{\partial x^2} & v_n(x, 0) &= 0, \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned}$$

Bu sistem çözümlerse,

$$v_0(x, t) = 4x(1 - x),$$

$$v_1(x, t) = 64t,$$

$$v_2(x, t) = 0,$$

·

·

$$v_n(x, t) = 0$$

·

·

·

eşitlikleri bulunur. p parametresi 1'e yakınsarken ısı denklemin çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$u(x, t) = 4x - 4x^2 + 64t$$

elde edilir.

Çizelge 4.3. (4.13) probleminin Newton lineerleştirme metodu ve Homotopi perturbasyon metodu kullanılarak elde edilen sayısal çözüm sonuçlarının karşılaştırılması

	NLM	HPM
$u_{1,1}$	0,558441	0,555555
$u_{2,1}$	0,701298	0,888888
$u_{3,1}$	0,748918	1
$u_{4,1}$	0,701298	0,888888
$u_{5,1}$	0,558441	0,555555

4.3. Örnek:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u^3 \quad (4.17)$$

Başlangıç koşulu ve sınır koşulları:

$$u(x, 0) = \frac{1+2x}{x^2+x+1}$$

$$u(0, t) = \frac{1}{6t+1}, \quad u_x(0, t) = \frac{12t+1}{(6t+1)^2}$$

olan bir boyutlu ısı problemini ele alalım.

Bu problemin analitik çözümü aşağıdaki gibidir[45].

$$u(x, t) = \frac{1+2x}{x^2+x+6t+1} \quad (4.18)$$

4.3.1. Newton lineerleştirme metodu

Problemimiz (4.17) denklemi $x-t$ düzleminde $\left\{ih, (j + \frac{1}{2})k\right\}$ noktasında sonlu fark yaklaşımı ile yer değiştirirse,

$$\begin{aligned} \frac{1}{k} \delta_t u_{i,j+\frac{1}{2}} &= \frac{1}{2h^2} \left\{ \delta_x^2 u_{i,j+1} - 2u_{i,j+1}^3 + \delta_x^2 u_{i,j} - 2u_{i,j}^3 \right\} \\ \Rightarrow \frac{1}{k} (u_{i,j+1} - u_{i,j}) &= \frac{1}{2h^2} \left\{ (u_{i-1,j+1} - 2u_{i,j+1} + u_{i+1,j+1} - 2u_{i,j+1}^3) + (u_{i-1,j} - 2u_{i,j} + u_{i+1,j} - 2u_{i,j}^3) \right\} \end{aligned}$$

eşitliği bulunur. $p = \frac{h^2}{k}$ ve $u_{i,j+1} = u_i$ ile tanımlanırsa,

$$u_{i-1} - 2(u_i + pu_i - u_i^3) + u_{i+1} + \left\{ u_{i-1,j} - 2(u_{i,j} - pu_{i,j} + u_{i,j}^3) + u_{i+1,j} \right\} = 0 \equiv f_i(u_{i-1}, u_i, u_{i+1})$$

olarak yazılabilir. $u_i = v_i + \varepsilon_i$ ifadesini yukarıdaki denklemlerde yerine koyar ve ε_i 'deki birinci mertebeli terimlere Taylor açılımını uygularsak;

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial u_{i-1}} \varepsilon_{i-1} + \frac{\partial f_i}{\partial u_i} \varepsilon_i + \frac{\partial f_i}{\partial u_{i+1}} \varepsilon_{i+1} \right]_{u_i=v_i} + f_i(v_{i-1}, v_i, v_{i+1}) = 0$$

ifadesi bulunur. Buradan da,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i-1} - 2(1 + p - 3v_i^2) \varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \left[\left\{ v_{i-1} - 2(v_i + pv_i - v_i^3) + v_{i+1} \right\} + \left\{ u_{i-1,j} - 2(u_{i,j} - pu_{i,j} + u_{i,j}^3) + u_{i+1,j} \right\} \right] &= 0 \\ \dots(4.19) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $v_i, u_{i,j+1}$ değerine bir yaklaşımdır.

$$x_i = \frac{1}{6}i, \quad i=1(1)5 \quad \text{ve} \quad t = k = \frac{1}{36} \quad \text{alalım.}$$

Eğer $v_i, x_i = \frac{1}{6}i, i=1(1)5$ ve $t=0$ noktasındaki başlangıç değerine eşit verilirse,

$j=0$ için $v_i = u_{i,0}$ olur. Ayrıca (4.19) denklemi,

$$\varepsilon_{i-1} - 2(1 + p - 3u_{i,0}^2)\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + [\{u_{i-1,0} - 2(u_{i,0} + pu_{i,0} - u_{i,0}^3) + u_{i+1,0}\} + \{u_{i-1,0} - 2(u_{i,0} - pu_{i,0} + u_{i,0}^3) + u_{i+1,0}\}] = 0$$

$$\Rightarrow \varepsilon_{i-1} - 2(1 + p - 3u_{i,0}^2)\varepsilon_i + \varepsilon_{i+1} + \{2u_{i-1,0} - 4u_{i,0} + 2u_{i+1,0}\} = 0$$

şeklinde olur. O halde,

$$v_i = x_i \quad \Rightarrow \quad i = 1(1)5 \text{ için;}$$

$$v_1 \rightarrow x_1 = \frac{1}{6}, \quad v_1 = \frac{1 + 2x_1}{x_1^2 + x_1 + 1} = \frac{48}{43}$$

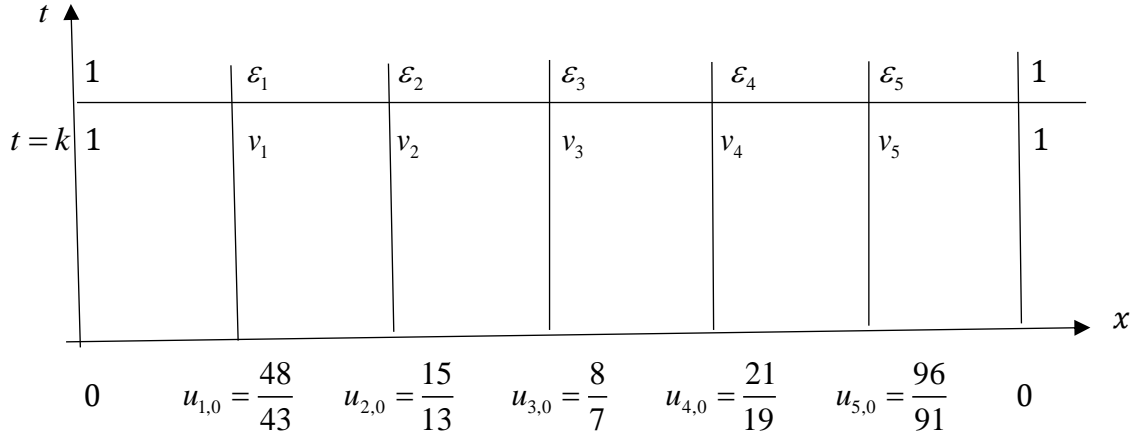
$$v_2 \rightarrow x_2 = \frac{1}{3}, \quad v_2 = \frac{1 + 2x_2}{x_2^2 + x_2 + 1} = \frac{15}{13}$$

$$v_3 \rightarrow x_3 = \frac{1}{2}, \quad v_3 = \frac{1 + 2x_3}{x_3^2 + x_3 + 1} = \frac{8}{7}$$

$$v_4 \rightarrow x_4 = \frac{2}{3}, \quad v_4 = \frac{1 + 2x_4}{x_4^2 + x_4 + 1} = \frac{21}{19}$$

$$v_5 \rightarrow x_5 = \frac{5}{6}, \quad v_5 = \frac{1 + 2x_5}{x_5^2 + x_5 + 1} = \frac{96}{91}$$

elde edilir.



$$j = 0, i = 1 \text{ için;}$$

$$\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1(1 + p - 3u_{1,0}^2) + \varepsilon_2 + \{2u_{2,0} - 4u_{1,0} + 2u_{0,0}\} = 0$$

eşitliği bulunur. $p = 1$ alınırsa,

$$\varepsilon_0 - 2\varepsilon_1 \left(2 - 3 \left(\frac{48}{43} \right)^2 \right) + \varepsilon_2 + \left\{ 2 \cdot \frac{15}{13} - 4 \cdot \frac{48}{43} + 2 \right\} = 0$$

$$\varepsilon_0 + \frac{6428}{1849} \varepsilon_1 + \varepsilon_2 - \frac{88}{559} = 0 \quad \dots(a_1)$$

$j = 0, i = 2$ için;

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2(1 + p - 3u_{2,0}^2) + \varepsilon_3 + \{2u_{3,0} - 4u_{2,0} + 2u_{1,0}\} = 0$$

$$\varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 \left(2 - 3 \left(\frac{15}{13} \right)^2 \right) + \varepsilon_3 + \left\{ 2 \cdot \frac{8}{7} - 4 \cdot \frac{15}{13} + 2 \cdot \frac{48}{43} \right\} = 0$$

$$\varepsilon_1 + \frac{674}{169} \varepsilon_2 + \varepsilon_3 - \frac{380}{3913} = 0 \quad \dots(a_2)$$

$j = 0, i = 3$ için;

$$\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3(2 - 3u_{3,0}^2) + \varepsilon_4 + \{2u_{4,0} - 4u_{3,0} + 2u_{2,0}\} = 0$$

$$\varepsilon_2 - 2\varepsilon_3 \left(2 - 3 \left(\frac{8}{7} \right)^2 \right) + \varepsilon_4 + \left\{ 2 \cdot \frac{21}{19} - 4 \cdot \frac{8}{7} + 2 \cdot \frac{15}{13} \right\} = 0$$

$$\varepsilon_2 + \frac{188}{49} \varepsilon_3 + \varepsilon_4 - \frac{92}{1729} = 0 \quad \dots(a_3)$$

$j = 0, i = 4$ için;

$$\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4(2 - 3u_{4,0}^2) + \varepsilon_5 + \{2u_{5,0} - 4u_{4,0} + 2u_{3,0}\} = 0$$

$$\varepsilon_3 - 2\varepsilon_4 \left(2 - 3 \left(\frac{21}{19} \right)^2 \right) + \varepsilon_5 + \left\{ 2 \cdot \frac{96}{91} - 4 \cdot \frac{21}{19} + 2 \cdot \frac{8}{7} \right\} = 0$$

$$\varepsilon_3 + \frac{1202}{361} \varepsilon_4 + \varepsilon_5 - \frac{44}{1729} = 0 \quad \dots(a_4)$$

$j = 0, i = 5$ için;

$$\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5(2 - 3u_{5,0}^2) + \varepsilon_6 + \{2u_{6,0} - 4u_{5,0} + 2u_{4,0}\} = 0$$

$$\varepsilon_4 - 2\varepsilon_5 \left(2 - 3 \left(\frac{96}{91} \right)^2 \right) + \varepsilon_6 + \left\{ 2 \cdot 1 - 4 \cdot \frac{96}{91} + 2 \cdot \frac{21}{19} \right\} = 0$$

$$\varepsilon_4 + \frac{22172}{8281} \varepsilon_5 + \varepsilon_6 - \frac{16}{1729} = 0 \quad \dots(a_5)$$

elde edilir.

$(a_1), (a_2), (a_3), (a_4), (a_5)$ 'in matris formu aşağıdaki gibidir.

$$\begin{pmatrix} \frac{6428}{1849} & 1 & & & \\ & 1 & \frac{674}{169} & & \\ & & 1 & \frac{188}{49} & \\ & & & 1 & \frac{1202}{361} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{88}{559} \\ \frac{380}{3913} \\ \frac{92}{1729} \\ \frac{44}{1729} \\ \frac{16}{1729} \end{pmatrix}$$

O halde,

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{6428}{1849} & a_2 &= -1 & c_1 &= -1 & d_1 &= \frac{88}{559} \\ b_2 &= \frac{674}{169} & a_3 &= -1 & c_2 &= -1 & d_2 &= \frac{380}{3913} \\ b_3 &= \frac{188}{49} & a_4 &= -1 & c_3 &= -1 & d_3 &= \frac{92}{1729} \\ b_4 &= \frac{1202}{361} & a_5 &= -1 & c_4 &= -1 & d_4 &= \frac{44}{1729} \\ b_5 &= \frac{22172}{8281} & & & & & d_5 &= \frac{16}{1729} \end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi Gauss yok etme metodunu uygulayalım.

$$\alpha_1 = b_1, \quad \delta_1 = d_1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \frac{6428}{1849}, \quad \delta_1 = \frac{88}{559}$$

ve

$$\alpha_i = b_i - \frac{a_i \cdot c_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \quad i = 2,3,4,5$$

eşitliğinden,

$$\alpha_2 = 3,700517$$

$$\alpha_3 = 3,566501$$

$$\alpha_4 = 3,049252$$

$$\alpha_5 = 2,349504$$

bulunur. Ayrıca,

$$\delta_i = d_i + \frac{a_i \cdot \delta_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, i = 2,3,4,5$$

eşitliğinden de

$$\delta_2 = 0,05183$$

$$\delta_3 = 0,039203$$

$$\delta_4 = 0,014456$$

$$\delta_5 = 0,004513$$

değerleri elde edilir. Yukarıda bulduğumuz değerler kullanılarak,

$$\varepsilon_{5,1} = \varepsilon_5 = \frac{\delta_5}{\alpha_5} = \frac{0,004513}{2,349504} = 0,001920$$

$$\varepsilon_4 = \frac{1}{\alpha_4} (\delta_4 + c_4 \varepsilon_5) = 0,004111$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{\alpha_3} (\delta_3 + c_3 \varepsilon_4) = 0,009839$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{\alpha_2} (\delta_2 + c_2 \varepsilon_3) = 0,011347$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{\alpha_1} (\delta_1 + c_1 \varepsilon_2) = 0,042018$$

eşitlikleri bulunur. O halde u çözümleri,

$$u_{1,1} = v_1 + \varepsilon_1 = 1,158297$$

$$u_{2,1} = v_2 + \varepsilon_2 = 1,165193$$

$$u_{3,1} = v_3 + \varepsilon_3 = 1,152696$$

$$u_{4,1} = v_4 + \varepsilon_4 = 1,109374$$

$$u_{5,1} = v_5 + \varepsilon_5 = 1,056865$$

şeklinde elde edilir.

4.3.2. Homotopi perturbasyon metodu

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2u^3$$

Başlangıç koşulu ve sınır koşulları:

$$u(x, 0) = \frac{1 + 2x}{x^2 + x + 1}$$

$$u(0, t) = \frac{1}{6t + 1}, \quad u_x(0, t) = \frac{12t + 1}{(6t + 1)^2}$$

olan problemi, homotopi perturbasyon metodu ile çözelim.

Aşağıdaki homotopi oluşturulabilir.

$$H(v, p) = \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} - p \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - 2v^3 - \frac{\partial u_0}{\partial t} \right) = 0 \quad (4.20)$$

Şimdi çözümü p 'nin bir kuvvet serisi olarak

$$v = v_0 + pv_1 + p^2v_2 + \dots \quad (4.21)$$

şeklinde alalım. Başlangıç koşulu göz önüne alınırsa $u_0(x, t) = \frac{1+2x}{x^2+x+1}$ seçilebilir.

Böylece, u_0 ve (4.21) denklemi, (4.20) denkleminde yerine yazılıp, p 'nin aynı kuvvetlerinin katsayıları eşitlenirse, aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi elde edilir.

$$\begin{aligned} p^0: \frac{\partial v_0}{\partial t} - \frac{\partial u_0}{\partial t} &= 0, & v_0(x, 0) &= \frac{1+2x}{x^2+x+1} \\ p^1: \frac{\partial v_1}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_0}{\partial x^2} - 2v_0^3 & v_1(x, 0) &= 0 \\ p^2: \frac{\partial v_2}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} - 2v_1^3 & v_2(x, 0) &= 0 \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ p^n: \frac{\partial v_n}{\partial t} &= \frac{\partial^2 v_{n-1}}{\partial x^2} - 2v_{n-1}^3 & v_n(x, 0) &= 0, (n = 2, 3, 4, \dots) \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \\ & \cdot & & \end{aligned}$$

Bu sistem çözümlürse,

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &= \frac{1+2x}{x^2+x+1}, \\ v_1(x, t) &= \frac{-6(1+2x)t}{(x^2+x+1)^2}, \\ v_2(x, t) &= \frac{36(1+2x)t^2}{(x^2+x+1)^3}, \\ & \cdot \\ & \cdot \\ v_n(x, t) &= \frac{(-6)^n(1+2x)t^n}{(x^2+x+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

.

.

.

eşitlikleri bulunur. p parametresi 1'e yakınsarken ısı denklemin çözümü,

$$u = \lim_{p \rightarrow 1} v = v_0 + v_1 + v_2 + \dots$$

olmak üzere

$$u(x, t) = \frac{1 + 2x}{x^2 + x + 1} + \frac{(-6)(1 + 2x)t}{(x^2 + x + 1)^2} + \frac{(-6)^2(1 + 2x)t^2}{(x^2 + x + 1)^3} + \dots + \frac{(-6)^n(1 + 2x)t^n}{(x^2 + x + 1)^{n+1}} + \dots$$

elde edilir.

Çizelge 4.4. (4.17) probleminin analitik çözümü ile Newton lineerleştirme metodu ve Homotopi perturbasyon metodu kullanılarak elde edilen sonuçların karşılaştırılması

	Analitik Çözüm	NLM	HPM
$u_{1,1}$	1,116279	1,158297	1,116279
$u_{2,1}$	1,153846	1,165193	1,153846
$u_{3,1}$	1,142857	1,152696	1,142857
$u_{4,1}$	1,105263	1,109374	1,105263
$u_{5,1}$	1,054945	1,056865	1,054945

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, parabolik türden lineer ve lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin sayısal çözümleri incelenmiştir. Örnek 4.1'deki ısı denklemi, uygun başlangıç ve sınır koşullarıyla birlikte Crank-Nicolson, Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metotları ile sayısal olarak çözülmüştür. Ayrıca bu denklem analitik olarak da çözümlenip elde edilen sayısal sonuçlarla tablo halinde karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, Homotopi perturbasyon ve Adomian ayrıştırma metodunun Crank-Nicolson metoduna göre daha kararlı olduğu görülmüştür. Daha sonra Örnek 4.2 ve Örnek 4.3 deki ısı denklemi Newton lineerleştirme ve Homotopi perturbasyon metodu ile sayısal olarak çözülmüştür. Analitik sonuçlar ile yaklaşık çözümler karşılaştırıldığında Homotopi perturbasyon metodunun daha yakınsak sonuçlar verdiği gözlemlenmiştir. Benzer çalışmalar diğer parabolik türden denklemlere de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

1. Acerbi, E ve Mingione, G. (2002). Regularity results for stationary electro-rheological fluids, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 164(3), 213-259.
2. Antontsev, S. and Shmarev, S. (2010) Blow-up of solutions to parabolic equations with nonstandard growth conditions, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 234(9), 2633-2645.
3. Diening, L., Harjulehto, P., Hästö, P. and Ruzicka, M. (2011). *Lebesgue and Sobolev Spaces with Variable Exponents, Lecture Notes in Mathematics* (2017), Heidelberg, Germany: Springer, 69-97.
4. Hu B. and Yin, H.-M. (1995). Semilinear parabolic equations with prescribed energy, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 44(3), 479-505.
5. Pinasco, J. P. (2009). Blow-up for parabolic and hyperbolic problems with variable exponents, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, 71(3-4), 1094-1099.
6. Quittner P. and Souplet, P. (2007). *Superlinear Parabolic Problems. Blow-Up, Global Existence and Steady*, Berlin: Birkhauser Advanced Texts.
7. Abbasbandy, S. (2006). Numerical solutions of the integral equations: Homotopy perturbation method and Adomian's decomposition method, *Applied Mathematics and Computation*, 173, 493–500.
8. Biazar J. and Ghazvini, H. (2007). Exact solutions for nonlinear Schrodinger equations by He's homotopy perturbation method, *Physics Letters A*, 366, 79–84.
9. Ganji, D.D. (2006). The application of He's homotopy perturbation method to nonlinear equations arising in heat transfer, *Physics Letters A*, 355, 337–341.
10. Cveticanin, L. (2006). Homotopy–perturbation method for pure nonlinear differential equation, *Chaos, Solitons and Fractals*, 30, 1221–1230.
11. He, J. H. (1999). Homotopy perturbation technique, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 257-262.
12. He, J. H. (1997). A new approach to nonlinear partial differential equations, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation* 2(4), 230-235.
13. He, J.H. (2000). A Coupling Method of a Homotopy Technique and a Perturbation Technique for Non-Linear Problems, *International Journal of Non-Linear Mechanics* ,35, 37-43.

14. He, J.H. (2006). New interpretation of homotopy perturbation method, *International Journal of Modern Physics B*, 20, 2561–2568.
15. He, J.H. (2006). Homotopy perturbation method for solving boundary value problems. *Physics letters A*, 350(1-2), 87-88.
16. Odibat, Z. and Momani, S. (2008). Modified homotopy perturbation method: Application to quadratic Riccati differential equation of fractional order, *Chaos, Solitons and Fractals* ,36(1), 167–174.
17. Siddiqui, A.M., Mahmood, R. and Ghori, Q.K. (2008) Homotopy perturbation method for thin film flow of a third grade fluid down an inclined plane, *Chaos, Solitons and Fractals*, 35(1), 140–147.
18. He, J.H. and El-Dib, Y.O. (2021). The reducing rank method to solve third-order Duffing equation with the homotopy perturbation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations*,37(2),1800-1808.
19. Aghakhani, M., Suhatri, M., Mohammadhassani, M., Daie, M. and Toghroli A. (2015). A Simple Modification of Homotopy Perturbation Method for the Solution of Blasius Equation in Semi-Infinite Domains, *Hindawi Publishing Corporation Mathematical Problems in Engineering*.
20. He, J.H. (2005). Application of homotopy perturbation method to nonlinear wave equations, *Chaos, Solitons and Fractals*, 26, 695–700.
21. Abbasbandy, S. (2006). Iterated He's homotopy perturbation method for quadratic Riccati differential equation, *Applied Mathematics and Computation*, 175, 581–589.
22. El-Shahed, M. (2005). Application of He's Homotopy Perturbation method to Volterra's integro-differential equation, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 6(2), 163-168.
23. Shen, Y. and El-Dib, Y.O. (2020). A periodic solution of the fractional sine-Gordon equation arising in architectural engineering, *Journal of Low Frequency Noise, Vibration and Active Control*
24. Geng, F., Cui, M. and Zhang, B. (2010). Method for solving nonlinear initial value problems by combining homotopy perturbation and reproducing kernel Hilbert space methods, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 11(2), 637-644.
25. Ayati, Z., Biazar, J. and Ebrahimi, S. (2014). A new homotopy perturbation method for solving linear and nonlinear Schrödinger equations, *Journal of Interpolation and Approximation in Scientific Computing*, 1-8.
26. Singh, R., Singh, S. And Wazwaz, A.M. (2016). A modified homotopy perturbation method for singular time dependent Emden–Fowler equations with boundary conditions, *Journal of Mathematical Chemistry*, 54, 918–931.
27. Yıldırım, A. (2008). The homotopy perturbation method for solving the modified Korteweg-de Vries equation, *Zeitschrift für Naturforschung Section A-A Journal of Physical Science*, 63(10-11), 621-626.
28. Adomian, G. (1986). *Nonlinear stochastic operator equations*, New York: Academic Press.
29. Adomian, G. (1988). A review of the decomposition method in applied mathematics, *Journal of Mathematical Analysis Applications*, 135, 501-544.

30. Adomian, G. (1988). An adaptation of the decomposition method for asymptotic solutions, *Mathematics and Computers in Simulation*, 30, 325-329.
31. Adomian, G. (1989). *Nonlinear stochastic systems: Theory and application to physics*, Kluwer Academic Press.
32. Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method*, Boston: Kluwer Academic Publishers.
33. Calheiros, F. and Semiao, V. (2006). *Adomian Decomposition Method, Nonlinear Equations and Spectral Solutions of Burgers Equation*, Porto.
34. Wazwaz, A. M. (2002). *Partial Differential Equations Method and Applications*, Tokyo: A.A.Belkema Publishers.
35. Khudair, A.R., Ameen, A.A., and Khalaf, S.L. (2011). Mean square solutions of second order random differential equations by using adomian decomposition method. *Applied Mathematical Sciences*, 5, 2521-2535.
36. Opanuga, A.A. (2017). Comparison homotopy perturbation and adomian decomposition techniques for parabolic equations, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, 1.
37. Cebeci, T. (2002). *Convective Heat Transfer(2)*, Long Beach, California: Horizons.
38. Crank J. and Nicolson P. (1996). A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type, *Advances in Computational Mathematics*, 6, 207–226.
39. Çelik, C. and Duman, M. (2012). Crank–Nicolson method for the fractional diffusion equation with the Riesz fractional derivative, *Journal of computational physics*, 231(4), 1743-1750.
40. Thomas, J. W. (1995). *Numerical Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Berlin, New York: Springer-Verlag.
41. Morton, K. W. and Mayers, D. F. (1994). *Numerical solution of partial differential equations*, Cambridge University Press.
42. Smith, G.D. (1978). *Numerical Solution of Partial Differential Equations Finite Difference Methods*, Oxford: Oxford University Press.
43. Er, S. (2008). *Doğrusal Olmayan Parabolik Türden Denklemlerin Sayısal Çözümleri*, Yayımlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Samsun.
44. Wazwaz, A.M. (2009) *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Beijing and Springer-Verlag Berlin Heidelberg: Higher Education Press.
45. Fushchych, W. and Zhdanov, R. (1994). Antireduction and Exact Solutions of Nonlinear Heat Equations, *Journal of Nonlinear Mathematical. Physics*, 1(1), 60-64.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Derya AYDIN

Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

Eğitim Derecesi	Okul/Program	Mezuniyet Yılı
Lisans	Pamukkale Üniversitesi	2006
Tezsiz Yüksek Lisans	Pamukkale Üniversitesi	2009

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Aydın, D. and Şahin, S. (2021). Solutions of Linear Parabolic Equations with Homotopy Perturbation Method, *Palestine Journal of Mathematics*, 10, 120-127
2. Aydın, D. and Şahin, S. (2018). Solutions of Linear Parabolic Type Equations with Homotopy Perturbation Method, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2018)*, Ordu, Turkey, 363-364