T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLE UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE BAZI FONKSİYONLARIN TEKİLLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

EZGİ CERİT

AĞUSTOS

EZGİ CERİT	MATEMATİK ANABİLİM DALI	AĞUSTOS 2021

GALİLE UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE BAZI FONKSİYONLARIN TEKİLLİKLERİ

EZGİ CERİT

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2021

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimler Enstitüsü Tez Yazım Kılavuzuna uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- ✓ Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- ✓ Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- ✓ Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- ✓ Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- ✓ Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Ezgi CERİT
20.08.2021

GALİLE UZAYINDA DARBOUX ÇATISINA GÖRE
BAZI FONKSİYONLARIN TEKİLLİKLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Ezgi CERİT

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2021

ÖZET

Bu çalışmada, Galile uzayında Darboux çatısına göre tanımlanan bazı fonksiyonların tekillikleri için gerek ve yeter koşullar verildi. Bu koşullar kullanılarak bir yüzey üzerinde jeodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri gibi bazı özel eğriler için birçok sonuç elde edildi.

Sayfa Adedi : 75
Anahtar Kelimeler : Galile uzayı, Darboux çatısı, Tekillik
Danışman : Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

SINGULARITIES OF SOME FUNCTIONS IN GALILEAN SPACE ACCORDING TO THE DARBOUX FRAME

(M. Sc. Thesis)

Ezgi CERİT

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2021

ABSTRACT

In this study, the necessary and sufficient conditions are given for singularities of some functions defined with respect to the Darboux frame in Galilean space. Using these conditions, several results were obtained for some special curves on a surface such as geodesic, curvature line and asymptotic curve.

Page Number : 75
Key Words : Galilean Space, Darboux Frame, Singularity
Supervisor : Associate Professor Tevfik ŞAHİN

ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında Galile uzayındaki bazı fonksiyonların tekillik koşulları ve bunların özel eğriler için sonuçları incelenmek istenmiştir.

Bu çalışmanın gerçekleştirilmesinde, değerli bilgilerini benimle paylaşan, kendisine ne zaman danışsam bana kıymetli zamanını ayırıp sabırla ve büyük bir ilgiyle bana faydalı olabilmek için elinden geleni sunan her sorun yaşadığımda yanına çekinmeden gidebildiğim, güler yüzünü ve samimiyetini benden esirgemeyen ve gelecekteki mesleki hayatımda da bana verdiği değerli bilgilerden faydalanacağımı düşündüğüm kıymetli ve danışman hoca statüsünü hakkıyla yerine getiren Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN' e teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum. Ayrıca değerli zamanlarını ayırarak tez savunma sınavımda bulunan ve önerileriyle tezimize katkı sağlayan Doç. Dr. Zehra ÖZDEMİR ve Dr. Öğr.Üyesi Ferah BAYAR hocalarıma teşekkür ederim.

Teşekkürlerin az kalacağı Dr. Öğr. Üyesi Berna KOŞAR, Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN ve diğer üniversite hocalarıma, 4 yıllık üniversite hayatım boyunca kazandırdıkları her şey için ve beni gelecekte söz sahibi yapacak bilgilerle donattıkları için hepsine teker teker teşekkürlerimi sunuyorum.

Son olarak dürüst, çalışkan, vicdanlı ama her şeyden önemlisi iyi bir insan olmam için her türlü fedakarlığı yapan, benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen, her düştüğümde beni ayağa daha sağlam kaldıran yaşam kılavuzlarım Birgül CERİT ve Satılmış CERİT' e, beni hiçbir zaman yalnız bırakmayan, süreç boyunca sabırla ve anlayışla yaklaşan, tez yazımında bana çok yardımcı olan biricik kardeşim S. Didar CERİT' e ve beni tüm olumsuzluklara rağmen yüreklendiren, destek veren dostlarıma sonsuz teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv
ABSTRACT v
ÖNSÖZ VE TEŞEKKÜR vi
İÇİNDEKİLER vii
ŞEKİLLER DİZİNİ viii
ÇİZELGELER DİZİNİ ix
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ x
1. GİRİŞ 1
2. GENEL BİLGİLER 3
  2.1. Geometri Nedir? 3
  2.2. Galile Geometrisi 4
  2.3. Galile Düzleminde Uzaklık 11
  2.4. Bazı Temel Kavramlar 13
3. MATERYAL VE YÖNTEMLER 15
4. BULGULAR 20
5. SONUÇ VE ÖNERİLER 61
KAYNAKLAR 62
ÖZGEÇMİŞ 63

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil **Sayfa**

Şekil 2.1. Uzaklık……………………………………………..….…...................... 4

Şekil 2.2. Doğrusal Hareket…………………………………………………..….…..... 7

Şekil 2.3. Galile Düzlemi………………………………………………………........ 9

Şekil 2.4. Galile Uzaklık…………………………………………………….....…. 11

Şekil 2.5. Galile Çember…………………………………………….……........ 12

Şekil 3.1. Bileşke Fonksiyon………………....………………………….………......... 15

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge **Sayfa**

Çizelge 1.1. Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler……………………....... 2

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	Açıklama
$\boldsymbol{\kappa}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{\tau}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin burulma fonksiyonu
$\boldsymbol{T}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin birim teğet vektör alanı
$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin normal vektör alanı
$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin binormal vektör alanı
$\boldsymbol{\kappa_g}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin jeodezik eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{\kappa_n}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin normal eğrilik fonksiyonu
$\boldsymbol{\tau_g}(\boldsymbol{x})$	Eğrinin jeodezik burulma fonksiyonu
$\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$	n- boyutlu reel vektör uzayı
$\boldsymbol{G_3}$	3- boyutlu Galile uzayı
$\boldsymbol{u} \cdot_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{v}$	İki vektörün Galile çarpımı
$\boldsymbol{u} \times_{\boldsymbol{G}} \boldsymbol{v}$	İki vektörün Galile vektörel çarpımı
$\boldsymbol{A_k}$	k. dereceden tekillik
$\boldsymbol{S_{G^2}}$	Galile birim küre
$\boldsymbol{f_d}$	Bir değişkenli uzaklık fonksiyonu
$\boldsymbol{f_h}$	Bir değişkenli dayanak fonksiyonu
$\boldsymbol{F_d}$	Galile uzayında uzaklık fonksiyonu
$\boldsymbol{F_h}$	Galile uzayında dayanak fonksiyonu
$\boldsymbol{f', f'', \dots, f^{(i)}}$	f fonksiyonunun türevleri

1. GİRİŞ

Geometrinin temel amacı yüzyıllardır, üç boyutlu Öklid uzayında temel özelliklerin incelenmesi olarak düşünüldü.

İlk çağlardan beri küresel geometri (aslında ilk Öklidyen olmayan geometrik sistemdir) bilinmesine rağmen hiperbolik geometri keşfedilene kadar Öklid uzayı kavramının evrenselliği konusunda bir şüphe yoktu. Bu anlamda 19. yüzyılın ilk yarısında Gauss (1816), Lobachevsky (1829) ve Bolyai (1832) matematik tarihinde ender rastlanan önemli bir buluş yaparak, bin yılın düşüncesini yıkıp; Öklidyen geometri kadar geçerli yeni bir geometrik sistem olan hiperbolik geometrinin varlığını ortaya koydular.

Hiperbolik geometrinin keşfinden sonra kabul edilebilir iki geometrik sistem Öklid ve hiperbolik geometri oldu. Fakat bu görüş çok uzun sürmedi. Geometrinin tek olmaması, matematiğin temel alanlarında yeni fikirlerin ortaya çıkmasına yol açtı. Bu fikirler; soyut anlamda matematiksel geometri ile fiziksel uzayların bazı özelliklerinin incelendiği fiziksel geometri arasındaki ilişkiyi ortaya çıkardı.

Öklid geometrisinin tek olmadığı dikkate alınırsa, hiperbolik geometrinin de Öklidyen olmayan tek geometri olmadığı gözden kaçırılmamalıdır. Gerçekten Öklidyen ve hiperbolik geometrinin yanı sıra birçok geometrik sistem vardır. 19. yüzyıl, geometride hızlı gelişmelerin yaşandığı bir yüzyıldır. 1854'de ünlü Alman matematikçi G.F.B. Riemann (1826-1866) kapsamı genişletilen oldukça genel bir geometri düşüncesini formülleştirdi. Ayrıca Riemann birbiri ile bağlantılı, fakat farklı, iki değil üç geometrik sistemin; Öklid geometri, hiperbolik geometri ve eliptik geometri (küresel geometriye çok yakın olduğundan eliptik geometri denilmiştir) olduğunu belirtti.

İngiliz cebirci A. Cayley (1821-1891)'in çalışmalarının ve geometrik düşüncelerinin bir sentezi olarak 1872 yılında Alman matematikçi F. Klein (1849-1925) geometrilerin listesini genişletti. 1870 yılında ise Cayley-Klein'in yaptığı çalışmalar sonucunda, düzlemde Öklid geometrisini de içeren 9 farklı geometrik sistemin olduğu gösterildi. Bu geometriler, açıların ve uzunlukların; eliptik, parabolik ve hiperbolik ölçülmesine göre adlandırıldı (Çizelge 1.1).

Örneğin; Öklid geometrisi açının eliptik ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle, Minkowski geometrisi açının hiperbolik ve uzunluğun ise parabolik ölçülmesiyle ve Galile geometrisi de açı ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle adlandırılmıştır.

Bu dokuz geometriyi aşağıdaki çizelge ile verebiliriz.

Çizelge 1.1 Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler

GEOMETRİLER	**UZUNLUKLARIN ÖLÇÜSÜ**		
AÇILARIN ÖLÇÜSÜ	ELİPTİK	PARABOLİK	HİPERBOLİK
ELİPTİK	Eliptik Geometri	Öklid Geometri	Hiperbolik Geometri
PARABOLİK	Co-Eliptik Geometri	Galile Geometri	Co-Minkowski Geometri
HİBERBOLİK	Co-Hiperbolik Geometri	Minkowski Geometri	Doubly Hiperbolik Geometri

Ancak bugün bile Öklidyen olmayan geometri denildiğinde sıklıkla hiperbolik geometri ve nadiren de eliptik geometri ilk olarak akla gelmektedir. Bu durum büyük ölçüde fiziksel uzayın doğası hakkındaki eski tartışmaların etkisinden kaynaklanmaktadır. Uzun bir süre bütün bilimsel önemin bu tartışmalara verilmesi bu görüşü oluşturmuştur. Bu durum hiperbolik geometri ve eliptik geometri dışındaki diğer Öklidyen olmayan geometrilerin sadece özel olarak bilinmesine yol açmıştır. Bunun sonucu olarak, diğer Öklidyen olmayan geometrilere hiperbolik geometriyle kıyaslanamayacak kadar az ilgi gösterildi. Bu yüzden, Öklidyen olmayan bir geometri olarak Galile geometrisi güncel bir çalışma alanıdır.

Aslında Galile geometrisi adı, tarihsel olarak doğru değildir. Çünkü 17. yüzyılın başlarında çalışmış olan Galileo, farklı geometrik sistemlerin var olduğu düşüncesinin ortaya çıktığı 19. yüzyılın en büyük keşiflerinden biri olan bu geometriyi bilmiyordu. Aslında daha doğru adı Galile rölativite prensipleriyle birleşen geometridir. Bu ifade uzun olduğundan kısaca Galile geometrisi denilmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Geometri Nedir?

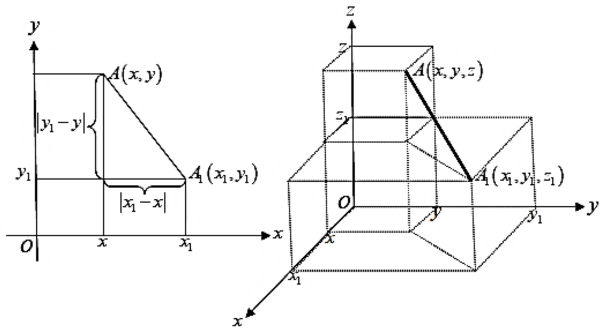
Geometri; uzayda veya düzlemde noktaların bir kümesi olarak şekilleri, bu şekiller arasındaki ilişki ve özellikleri inceleyen bir bilim dalıdır. Burada incelenen özelliklerin geometrik olarak anlamlı olması ile ilgili iki farklı yaklaşım vardır.

Bu yaklaşımlardan ilki; şekillerin eşdeğer (congruent) olması ile ilgili yaklaşımdır. İki şeklin eşdeğer olması; birinin diğerinden bir hareketle elde edilmiş olması demektir. Burada hareket; her bir şekli diğerine götüren, uzaklığı koruyan bir dönüşümdür. Dolayısıyla eşdeğer şekillerin yerleri farklı, fakat bulundukları form aynıdır. Eşdeğerlik tanımına göre; bir özelliğin geometrik olarak anlamlı olması için eşdeğer şekillerin her birinde bu özelliğin bulunması gerekir (O’neill, 1966).

İncelenen özelliklerin geometrik özellik olmasıyla ilgili ikinci yaklaşım; koordinatların kullanılmasıyla ilgilidir. Bilindiği gibi 17.yy yaşamış meşhur Fransız matematikçiler; R. Descartes (1596-1650) ve P. Fermat (1601-1665) Öklidyen geometriyi düzlemde bir koordinat sistemi yardımıyla gösterdiler. Böylece düzlemdeki her A noktası bir (x,y) sıralı ikilisiyle temsil edildi. Buradaki x ve y elemanlarına A noktasının koordinatları denildi (şekil 2.1). Böylece noktaların bir kümesi olarak verilen herhangi bir şekil; bu noktalara karşılık gelen sıralı sayı çiftlerinin yani koordinatların bir kümesi olarak düşünüldü. Bu ise herhangi bir geometrik şeklin koordinatlar yardımıyla kapalı denkleminin yazılmasına olanak sağladı. Örneğin çember, doğru ve benzeri şekillerin denklemleri bu şekilde ifade edildi.

Bir A noktasının (x,y) koordinatları, koordinat sisteminin seçimine bağlıdır. Dolayısıyla koordinat sistemi değiştiğinde, yani farklı bir koordinat sistemi seçildiğinde, noktanın koordinatları da değişecektir. Koordinat sistemi değiştiği halde (yani bir koordinat sisteminden başka bir koordinat sistemine geçilirken) aynı kalan özelliğe değişmez karaktere sahip özellik denir. Bu özellik şeklin geometrik özelliğini yansıtır. Sonuç olarak koordinat sisteminin seçimine bağlı olmayan özelliklere geometrik özellikler denir.

Örneğin bir çemberin yarıçapı ve iki nokta arasındaki uzaklık geometrik özelliklerdir (Şekil 2.1).



Şekil 2.1 Uzaklık (Yaglom, 1979)

Sonuç olarak F. Klein'e göre geometri; dönüşümler altındaki değişmez özelliklerin teorisidir. Bu dönüşümler altında korunan yani değişmeyen özelliklere geometrik özellikler denir.
Aşağıdaki kısımlarda Galile geometrisiyle ilgili temel kavramlar tanıtıldı (Yaglom, 1979).

2.2. Galile Geometrisi

Galile geometrisi; Galile hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir. Düzlemde ve uzayda bu hareket dönüşümlerini açıklamak için gerekli olan bazı dönüşümler aşağıda kısaca tanıtıldı.

2.2.1. Tanım (Afin dönüşüm)

Düzlemin kendi kendine en genel afin dönüşümü

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= cx + dy + n \end{aligned}\right\} a, b, c, d, m, n \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

şeklinde 6-parametreli bir dönüşümdür. Eğer burada lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $ad - bc = 0$ ise bu dönüşüme tekil afin dönüşüm, sıfır değil ise ($ad - bc \neq 0$) regüler afin dönüşüm denir. Regüler afin dönüşümler bileşke işlemine göre grup oluştururlar. Bu gruba afin grup denir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.2.2. Tanım (Hareket dönüşümü)

Eğer afin dönüşüm denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı $ad - bc = 1$ ise bu durumda afin dönüşüme hareket dönüşümü denir. Dolayısıyla bu dönüşümler de bir grup oluştururlar. Bu gruba hareketler grubu denir. Bu dönüşümler uzaklığı koruyan dönüşümlerdir. Eğer genel hareket dönüşümlerinde $a = d, b = -c$ yazılırsa, katsayılar matrisinin determinantı $a^2 + b^2 = 1$ şeklinde olur. Buna göre Öklid düzleminde genel hareket dönüşümleri;

$$\left.\begin{aligned} x' &= ax + by + m \\ y' &= \pm(-bx + ay + n) \end{aligned}\right\} a, b, m, n \in \mathbb{R} \tag{2.2.1a}$$

3-parametreli bir dönüşüm olarak elde edilir (Hacısalihoğlu, 1998).

2.2.3. Tanım (Galile düzleminde hareket dönüşümleri)

Afin düzlemin kendi kendine en genel regüler dönüşümünü ifade eden (2.2.1) denkleminde eğer $a = d = 1,\ b = 0$ alınırsa;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + m \\ y' &= cx + y + n \end{aligned}\right\} c, m, n \in \mathbb{R} \tag{2.2.2}$$

şeklinde 3-parametreli afin alt grubu elde edilir. Bu dönüşümün katsayılar matrisinin determinantı $\Delta_* = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{vmatrix} = 1$ olduğundan, (2.2.1) denklemiyle verilen dönüşüm bir hareket dönüşümüdür. Bu dönüşüme Galile düzlemindeki hareket dönüşümü denir. O halde Galile düzlemsel geometrisi bu hareket dönüşümleri altında değişmezlerin teorisidir (Yaglom, 1979).

2.2.4. Tanım (Galile uzayında hareket dönüşümleri)

3-boyutlu afin uzayın kendi kendine en genel bir dönüşümü;

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + b_1y + c_1z + d_1 \\ y' &= a_2x + b_2y + c_2z + d_2 \\ z' &= a_3x + b_3y + c_3z + d_3 \end{aligned}\right\} a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3 \in \mathbb{R} \qquad (2.2.3)$$

şeklinde 12-parametreli bir dönüşümdür. Eğer burada bu denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantı;

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (2.2.3a)$$

ise bu dönüşümler bileşke işlemine göre grup oluştururlar. Bu gruba Afin uzayın dönüşümler grubu denir (Hacısalihoğlu, 1998).

Eğer bu grubu F_{12} ile gösterirsek, özel olarak $b_1 = c_1 = 0$ alınırsa bir alt afin grubunu yani F_{10} grubunu elde ederiz. Bu durumda (2.2.3a) denklemiyle belli $\Delta = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) \neq 0$ olmalıdır. Eğer bu dönüşüm

$$I : (0, y, z) \to (0, z, -y) \qquad (2.2.4)$$

şeklinde bir eliptik hareketle (involution) düşünülürse; bu durumda $b_2 = c_3$ ve $c_2 = -b_3$ olarak elde edilir. Bu durumda $\Delta = a_1({b_2}^2 + {c_2}^2) \neq 0$ şeklinde olup ${b_2}^2 + {c_2}^2 = \rho^2$ olarak alındığında; $b_2 = pcos\varphi, c_2 = psin\varphi$ olacak şekilde bir φ açısı vardır. Bu ifadeler (2.2.3) denkleminde yazılırsa;

$$\left.\begin{aligned} x' &= a_1x + d_1 \\ y' &= a_2x + (\rho \cos\phi)y + (\rho \sin\phi)z + d_2 \\ z' &= a_3x - (\rho \sin\phi)y + (\rho \cos\phi)z + d_3 \end{aligned}\right\} a_1, a_2, a_3, d_1, d_2, d_3, \rho, \phi \in \mathbb{R} \qquad (2.2.5)$$

$\Delta = a_1\rho^2 \neq 0$ olan 8-parametreli dönüşümü elde edilir. Eğer $a_1 = \rho = 1$ alınırsa $\Delta = a_1\rho^2 = 1$ olacağından (2.2.5) dönüşümü;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + d_1 \\ y' &= a_2 x + (\cos\phi)y + (\sin\phi)z + d_2 \\ z' &= a_3 x - (\sin\phi)y + (\cos\phi)z + d_3 \end{aligned}\right\} a_2, a_3, d_1, d_2, d_3, \phi \in \mathbb{R} \tag{2.2.6}$$

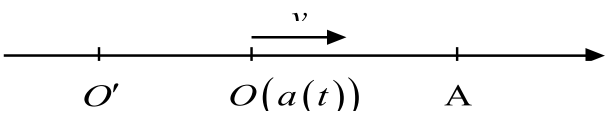
bir hareket dönüşümü olur. (2.2.6) denklemiyle verilen hareket dönüşümüne Galile uzayında hareket dönüşümü denir (Röschel, 1984).

Geometrideki düzlemsel ve uzaysal hareket ile mekanikteki doğrusal hareket arasında yakın bir ilişki vardır. Aşağıdaki kısımda bu ilişki açıklandı.

2.2.5. Doğrusal hareket

Bir ℓ doğrusu verilsin. Bu doğru üzerinde hareketli bir $A = A(x)$ noktası alınırsa, x koordinatı her bir anda $x = x(t)$ şeklinde t zamanının bir fonksiyonu olur. Bu doğru üzerinde O' merkezli sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemi ve O merkezli hareketli $\{O; x\}$ koordinat sistemi göz önüne alınsın.

Hareketli $\{O; x\}$ koordinat sisteminin O başlangıç noktası, sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre v hızıyla hareket etsin.



Şekil 2.2 Doğrusal Hareket (Yaglom, 1979)

Bu durumda hareketli O noktasının, sabit $\{O'; x'\}$ koordinat sistemine göre koordinatı $a(t)$ ise;

$$a(t) = a + vt \tag{2.2.7}$$

şeklinde olur. Burada t zaman parametresi ve a ise O noktasının $t=0$ anındaki koordinatıdır. O halde hareketli bir A noktasının sabit $\{O';x'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{O;x\}$ koordinat sistemine göre koordinatı sırasıyla x' ve x ise bu koordinatlar arasında;

$$x' = x + a(t) \tag{2.2.8}$$

bağıntısı vardır. (2.2.7) eşitliği (2.2.8) denkleminde yazılırsa;

$$x' = x + vt + a \tag{2.2.9}$$

elde edilir. Eğer $t=0$ noktasındaki zaman b, bitiş zamanı da t' ise zamanlar arasında;

$$t' = t + b \tag{2.2.10}$$

bağıntısı vardır. Sonuç olarak koordinatlar ve zamanlar arasında ;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + vt + a \\ t' &= t + b \end{aligned}\right\} \tag{2.2.11}$$

bağıntıları vardır.

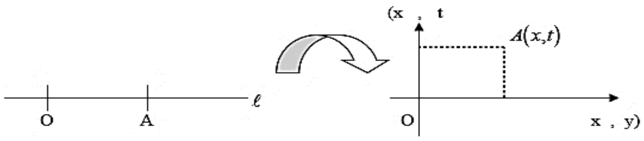
2.2.6. Tanım

(2.2.11) denklemleriyle verilen dönüşümlere doğrusal hareketteki **Galile Dönüşümleri** denir (Yaglom, 1979).

Eğer ℓ doğrusu üzerindeki harekette A noktasının koordinatını y ile ve zaman parametresi de x ile gösterilirse, Galile düzleminde hareket dönüşümleri;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + b, \\ y' &= vx + y + a \end{aligned}\right\} \tag{2.2.12}$$

denklemleriyle bellidir. (2.2.12) denklemleri doğrusal bir harekete karşılık gelir, fakat Galile düzlemini belirtir (şekil 2.3).



Şekil 2.3 Galile Düzlemi (Yaglom, 1979)

2.2.7. Tanım

(2.2.12) denklemleriyle verilen Galile düzlemindeki hareket dönüşümleri, ℓ doğrusu üzerindeki $\{O_1; y_1\}$ koordinat sisteminin O_1 merkezinin v hızıyla hareketini ifade eden bir

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x \ , \\ y_1 &= vx + y \end{aligned}\right\} \quad \text{veya} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x + vt, \\ t_1 &= t \end{aligned}\right\} \tag{2.2.12a}$$

burkulma dönüşümü (shear) ile, O noktasını O' noktasına götüren (zaman orijinindeki bir değişimle ifade edilen) bir;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_1 + b \ , \\ y' &= y_1 + a \end{aligned}\right\} \text{veya} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x_1 + a, \\ t' &= t_1 + b \end{aligned}\right\} \tag{2.2.12b}$$

öteleme dönüşümünün bileşkesidir (Yaglom, 1979).

Galile uzayında hareket dönüşümleri, düzlemsel harekete karşılık gelen dönüşümlerdir. Uzayda sabit $\{O'; x', y'\}$ koordinat sistemi ve hareketli $\{0; x, y\}$ koordinat sistemi verilsin ve x ekseni ile x' ekseni arasındaki açı da α olsun. Ayrıca O başlangıç noktası eğim açısı β olan bir ℓ doğrusu boyunca v hızıyla doğrusal hareket yapsın. Bu durum göz önünde bulundurularak düzlemdeki bir A noktasının sabit ve hareketli koordinat sistemine göre koordinatlar arasındaki ilişki, zaman boyutuyla birlikte aşağıda verilen Galile uzayındaki hareket dönüşümünü belirler.

2.2.8. Tanım

3-boyutlu Galile uzayındaki hareket dönüşümü;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x + d, \\ y' &= cx + y\cos\alpha + z\sin\alpha + a, \\ z' &= ex - y\sin\alpha + z\cos\alpha + b \end{aligned}\right\} \alpha, a, b, c, d, e \in \mathbb{R} \tag{2.2.13}$$

şeklindedir.

2.2.9. Tanım

3-boyutlu Galile uzayındaki hareket;

a)
$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y\cos\alpha + z\sin\alpha, \\ z_1 &= -y\sin\alpha + z\cos\alpha \end{aligned}\right\} \quad \text{veya} \quad \left.\begin{aligned} x_1 &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y_1 &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ t_1 &= t \end{aligned}\right\} \tag{2.2.13a}$$

denklemleriyle verilen $x-$ekseni (veya $t-$ekseni) etrafında α açılık bir **dönme hareketi,**

b) xoy düzlemini sabit bırakan her bir π düzlemini kendisine paralel ve vt $\left(v=\|\vec{v}\|\right)$ uzaklığındaki, $\vec{v}=\left(v\cos\beta, v\sin\beta, 0\right)$ vektörü yönündeki düzleme dönüştüren;

$$\left.\begin{aligned} x' &= x_2 + d, \\ y' &= y_2 + a, \\ z' &= z_2 + b \end{aligned}\right\} \quad \text{veya} \quad \left.\begin{aligned} x_2 &= x_1 + (v\cos\beta)t_1, \\ y_2 &= y_1 + (v\sin\beta)t_1, \\ t_2 &= t_1 \end{aligned}\right\} \tag{2.2.13b}$$

şeklindeki bir **burkulma hareketi** ile,

c)
$$\left.\begin{aligned} x' &= x_2 + d, \\ y' &= y_2 + a, \\ z' &= z_2 + b \end{aligned}\right\} \quad \text{veya} \quad \left.\begin{aligned} x' &= x_2 + a, \\ y' &= y_2 + b, \\ t' &= t_2 + d \end{aligned}\right\} \tag{2.2.13c}$$

denklemleriyle verilen, öteleme vektörü $\left(a,b,d\right)$ vektörü olan bir **öteleme hareketinin** bileşkesidir (Yaglom, 1979).

2.3. Galile Düzleminde Uzaklık

2.3.1. Tanım (Uzaklık)

Galile düzleminde $A(x,y)$ ve $A_1(x_1,y_1)$ noktaları verilsin. $A(x,y)$ noktasının $x-$ekseni üzerine izdüşümü $P(x,0)$ ve $A_1(x_1,y_1)$ noktasının $x-$ekseni üzerine izdüşümü $P_1(x_1,0)$ ise $\overline{PP_1}$ işaretli uzunluğuna $A(x,y)$ noktasıyla $A_1(x_1,y_1)$ noktası arasındaki uzaklık denir. Yani iki nokta arasındaki uzaklık;

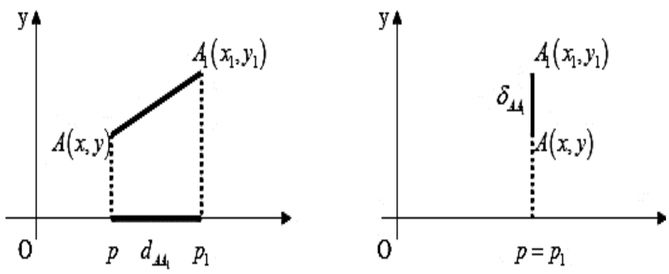
$$d\left(A(x,y),A_1(x_1,y_1)\right)=d\left(P(x,0),P_1(x_1,0)\right)=x_1-x \qquad (2.3.1)$$

şeklindedir.

Eğer $x=x_1$ ise bu durumda $A(x,y)$ ve $A_1(x,y_1)$ noktaları arasındaki uzaklık;

$$\delta_{AA_1}=y_1-y \qquad (2.3.2)$$

şeklinde bellidir. Bu uzaklığa özel uzaklık denir (Yaglom, 1979).



Şekil 2.4 Galile Uzaklık (Yaglom, 1979)

2.3.2. Tanım (Çember)

Bir düzlemde sabit bir $Q(a,b)$ noktasından mutlak değerce sabit r uzaklığında olan $M(x,y)$ noktaların geometrik yerine $Q(a,b)$ merkezli $r\geq 0$ yarıçaplı çember denir.

O halde Galile geometrisinde çemberin denklemi;

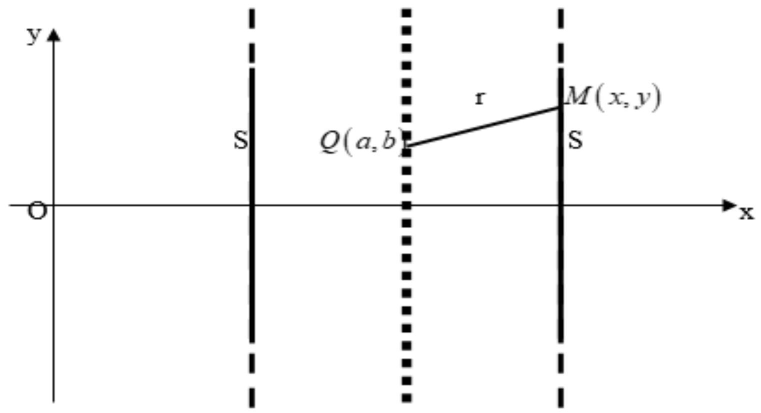
$$d\big(Q(a,b),M(x,y)\big) = |x-a| = r \tag{2.3.3}$$

eşitliğiyle bellidir. Bu eşitlik çözülürse;

$$|x-a| = r \Rightarrow x = r + a \;\; \vee \;\; x = -r + a \tag{2.3.4}$$

şeklinde olur.

Bu ise Galile düzleminde çemberin $Q(a,b)$ noktasına uzaklıkları r birim olan noktalardan, yani $y-$eksenine paralel iki doğrudan oluştuğunu gösterir (şekil 2.5).



Şekil 2.5 Galile Çember (Yaglom, 1979)

2.3.4. Sonuç

Galile çemberinin sonsuz tane merkezi vardır. $Q(a,b)$ noktasından geçen ve çemberi oluşturan doğrulara paralel olan doğru üzerindeki bütün noktalar çemberin merkezidir.

2.4. Bazı Temel Kavramlar

Aşağıda Galile uzayının bazı temel kavramları verildi.

2.4.1. Tanım

G_3 uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ gibi iki vektörün Galile çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u \cdot_G v = \begin{cases} u_1 v_1, & u_1 \neq 0 \ \ veya\ v_1 \neq 0 \\ u_2 v_2 + u_3 v_3, & u_1 = 0 \quad ve \quad v_1 = 0\ . \end{cases} \tag{2.4.1}$$

Burada $u \cdot_G v = 0$ ise u ve v vektörleri diktir (Divjak, 2003).

2.4.2. Tanım

Bir $A = (x, y, z)$ vektörünün normu,

$$\|A\|_G = \begin{cases} |x|, & x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2}, & x = 0 \end{cases} \tag{2.4.2}$$

şeklindedir. Burada $A = (x, y, z)$ vektörüne $x = 0$ ise izotropik, $x \neq 0$ ise non-izotropik vektör denir (Şahin, 2010).

2.4.3. Teorem

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to G_3$ birim hızlı eğrisi, $\gamma(x) = (x, y(x), z(x))$
şeklinde verilir. Bu eğrinin Frenet çatı elemanları,

$$T(x) = \gamma'(x) \qquad N(x) = \frac{1}{\|\gamma''(x)\|}\gamma''(x) = \frac{1}{\kappa(x)}\gamma''(x) \qquad B(x) = T(x) x_G N(x) = \frac{1}{\kappa(x)}(0, -z''(x), y''(x))$$

şeklindedir.

Burada $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu $\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2}$ olarak tanımlanır. T, N, B vektörlerine sırasıyla teğet vektör alanı, normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir (Şahin, 2010).

2.4.4. Sonuç

Frenet-Serret formülleri ve türevleri arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

şeklindedir (Şahin, 2010).

2.4.5. Tanım

Galile uzayında yüzey üzerindeki eğriler incelenirken Frenet çatısı dışında başka bir çatı daha kullanılır. Eğrinin bir P noktasında teğet vektör alanı $\boldsymbol{t}$ ve bu noktadaki yüzeyin birim normal vektör alanı $\boldsymbol{n}$ olsun. Bu durumda $\boldsymbol{n} \times_G \boldsymbol{t} = \boldsymbol{q}$ vektör alanı $\boldsymbol{t}$ ve $\boldsymbol{n}$ vektörlerine dik olan birim vektör alanıdır. O halde bu vektör alanlarının oluşturduğu $\{\boldsymbol{t}, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{n}\}$ çatısına 'Darboux çatı alanı' veya 'teğet normal çatı alanı' denir (Şahin,2013).

2.4.6. Sonuç

$\gamma: I \subset \mathbb{R} \to M \subset G_3$ birim hızlı bir eğri ve $\{t, q, n\}$, M yüzeyinin Darboux çatı alanı olmak üzere γ eğrisinin Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} t \\ q \\ n \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ 0 & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t \\ q \\ n \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir (Şahin,2013).

3. MATERYAL VE YÖNTEMLER

3.1. Tekillik Teorisiyle İlgili Bazı Temel Kavramlar

Fonksiyonların tekilliklerini incelemek bazen güç hatta olanaksız olabilir. Bu durumda bu fonksiyonlar yerine, bunlarla aynı tip tekilliğe sahip olan daha basit fonksiyonlarla çalışılabilir. Bu ise fonksiyonlar arasında tanımlanan eşdeğerlikle mümkündür.

3.1.1. Tanım

$U_i, t_i = 1,2$ reel sayılar kümesinde iki açık altküme olmak üzere; $f_i: U_i, t_i \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. Burada U_i, t_i sembolü; bu fonksiyonların t_i noktalarının bir komşuluğunda tanımlandığını gösterir. Eğer

$$h: V_1 \subset U_1 \to V_2 \subset U_2$$

fonksiyonu bir diffeomorfizm (parametre değişimi) ve $\forall t \in V_1$ için

$$h(t_1) = t_2,\ f_1(t) = f_2\big(h(t)\big) - c \qquad (3.1.1)$$

olacak şekilde $t_i \in V_i$ olan $V_i \subset U_i$ açık komşulukları ve bir $c \in \mathbb{R}$ sayısı varsa; t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu, t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonuna **eşdeğerdirler** **(**veya **sağ eşdeğerdirler)** denir (Bruce ve Giblin, 1992). Yani bu durumda t_1 noktası komşuluğunda f_1 fonksiyonu bir parametre değişimi ve sabit farkıyla t_2 noktası komşuluğunda f_2 fonksiyonundan elde edilebilir. Bu tanım şemayla

$$\begin{array}{rcl} U_1 \supset V_1 & \xrightarrow{f_1} & \mathbb{R} \\ h \downarrow & & \downarrow \\ U_2 \supset V_2 & \xrightarrow{f_2} & \mathbb{R} \end{array}$$

Şekil 3.1 Bileşke fonksiyon

şeklinde ifade edilebilir.

Ayrıca fonksiyonlar arasındaki eşdeğerlik bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Fonksiyonlar arasındaki eşdeğerliği belirleme kriteri için aşağıdaki teorem önemli bir teoremdir.

3.1.2. Teorem

$f: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ bir düzgün fonksiyon ve $k \geq 0$ bir tamsayı olsun. Eğer $1 \leq p \leq k$ olan tüm p tam sayıları için;

$$f^{(p)}(t_0) = 0\,, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

ise t_0 noktası komşuluğundaki f fonksiyonu, 0 noktası komşuluğundaki

$$g: \mathbb{R}, 0 \to \mathbb{R}, g(t) = \pm t^{k+1}$$

fonksiyonuna sağ-eşdeğerdir. Burada g fonksiyonunun işareti, $f^{(k+1)}(t_0)$ değerinin pozitif veya negatif olmasına göre sırasıyla (+) veya (-) işaretini alır.

İspat: (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.3. Tanım (A_k − tekilliği)

$f: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ düzgün fonksiyonu $\pm t^{k+1}$ fonksiyonuna sağ-eşdeğer olsun. Yani 3.1.1.Tanım ve 3.1.2.Teoremden dolayı $1 \leq p \leq k$ olan tüm p tam sayıları için;

$$f^{(p)}(t_0) = 0\,, f^{(k+1)}(t_0) \neq 0$$

olur. Bu durumda $k \geq 0$ için f fonksiyonuna t_0 noktasında A_k − tekilliğine sahiptir denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.4. Sonuç

Bir t_0 noktasında A_k singülerliğine sahip olan her $f\colon \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bu t_0 noktasının komşuluğunda $g(t) = \mp t^{k+1}$ fonksiyonlarından birine indirgenebilirdir (eşdeğerdir).

İspat: 3.1.2. Teorem ve 3.1.3. Tanımdan açıktır.

3.1.5. Tanım (Bir fonksiyonun jeti)

$\boldsymbol{f}\colon \mathbb{R}, \boldsymbol{t_0} \to \mathbb{R}$ düzgün (diferansiyellenebilir) fonksiyonunun bir t_0 noktası komşuluğundaki Taylor serisi;

$$f(t) = f(t_0) + (t - t_0)f'(t_0) + \frac{(t-t_0)^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{(t-t_0)^n}{n!}f^n(t_0) + \ldots$$

şeklindedir. Burada t yerine $t + t_0$ yazıldığında, fonksiyonun Taylor serisi;

$$f(t + t_0) = f(t_0) + tf'(t_0) + t^2 f''(t_0) + \cdots + \frac{t^n}{n!}f^n(t_0) + \ldots$$

elde edilir. Bu durumda $k \geq 1$ bir tamsayı olmak üzere;

$$J^k f(t_0) = tf'(t_0) + \frac{t^2}{2!}f''(t_0) + \cdots + \frac{t^k}{k!}f^k(t_0) \tag{3.1.2}$$

polinomuna f fonksiyonunun t_0 noktasındaki $k-$jeti denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.6. Tanım (Dallanmalar-Unfoldings)

Bir f fonksiyonunu içeren fonksiyonların ailesine, f fonksiyonun dallanmaları denir (Bruce ve Giblin, 1992).

Örneğin $f(t)=t^5$ fonksiyonunun en genel dallanması

$$F(t,x_1,x_2,x_3)=t^5+x_1t^3+x_2t^2+x_3t \tag{3.1.3}$$

şeklindedir. Burada t^4 terimi uygun bir dönüşümle yok edilebileceğinden yazılmamıştır.

$$F: \mathbb{R}\times\mathbb{R}^r, (t_0, x_0) \to \mathbb{R}$$

şeklinde düzgün bir fonksiyon olsun. Bu F fonksiyonunu aşağıdaki gibi iki fonksiyon ailesi belirtir.

i) Buna göre ilk fonksiyon ailesi;

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}, F_x(t) = F(t, x_1, \ldots, x_r) \tag{3.1.4}$$

şeklinde olup r-parametreli, 1-değişkenli bir fonksiyon ailesidir.

ii) İkinci fonksiyon ailesi de;

$$F_t: \mathbb{R}^r, x_0 \to \mathbb{R}, F_t(x) = F(t, x_1, \ldots, x_r) \tag{3.1.5}$$

şeklinde olup 1-parametreli, r-değişkenli bir fonksiyon ailesidir. Eğer

$$F_x: \mathbb{R}, t_0 \to \mathbb{R}, f(t) = F_x(t) = F(t, x_1, \ldots, x_r) \tag{3.1.6}$$

şeklinde yazılırsa F fonksiyonuna, f fonksiyonunun 1-değişkenli r-parametreli dallanması denir (Bruce ve Giblin, 1992).

3.1.11. Tanım

(3.1.4) denklemiyle tanımlanan 1-değişkenli, r -parametreli F fonksiyon ailesi ele alınsın:

i)

$$D_F = \left\{x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = 0, t \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.1.7}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin zarfı veya diskriminantı denir.

ii)

$$R_F = \left\{x \in \mathbb{R}^r : F = \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial^2 t} = 0, t \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.1.8}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin sırt (regresyon) kümesi denir.

iii)

$$S_F = \left\{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = 0\right\} \tag{3.1.9}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin (t, x) noktasındaki tekil kümesi denir.

iv)

$$B_F = \left\{x \in \mathbb{R}^r : \frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = 0, t \in \mathbb{R}\right\} \tag{3.1.10}$$

kümesine F fonksiyonlar ailesinin ayrışım (bifurcation) kümesi denir (Bruce ve Giblin, 1992).

Tekillik teorisiyle ilgili daha ayrıntılı bilgiler, Bruce ve Giblin, 1992 ve Bruce, J.W., 1981b. kaynaklarında bulunabilir.

4. BULGULAR

4.1. Galile Dayanak Fonksiyonları ve Tekillikleri

Bu kısımda aksi belirtilmedikçe eğriler $C^{\infty} -$ sınıfından alındı.

4.1.1. Tanım (Galile Dayanak Fonksiyonu)

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \to G^3 , \qquad \alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

Regüler birim hızlı eğrisi verilsin. Bu durumda

$$F_h: I \times {S_G}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, u) \to F_h(x, u)$$

olmak üzere;

$$F_h(x, u) = |t(x) \;\; n(x) \;\; u(x)|$$

şeklinde tanımlı düzgün fonksiyonların iki parametreli bir ailesi olarak F_h fonksiyonuna birim hızlı bir α eğrisi üzerinde Darboux çatısına göre Galile dayanak fonksiyonu denir. Burada $t(x)$ ve $n(x)$ vektörleri α eğrisinin birim teğet ve α eğrisinin bulunduğu yüzeyin birim normal vektörleridir. ${S_G}^2$ kümesi ise Galile uzayında birim vektörlerin kümesidir. Bu F_h fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon (3.1.5) denkleminden $f_{hu}(x)$ fonksiyonu ise $f_{hu}(x) = F_{hu}(x, u)$ şeklinde olur. Bu durumda F_h fonksiyonu $f_{hu}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.1.2. Teorem

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Darboux çatısı $\{t(x),\ q(x),\ n(x)\}$ olmak üzere f_{hu} fonksiyonunun tekillik koşulları aşağıdaki gibidir.

(1) $f'_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} n(x_0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)' + \kappa_n(x_0) \right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} n(x_0)$$

(3) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)' + \kappa_n(x_0) \right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} n(x_0),$$

$$\kappa_g''(x_0)\tau_g(x_0) - \tau_g(x_0)\, \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g^{\,2}(x_0)\kappa_n'(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$-3\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$$

(4) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)' + \kappa_n(x_0) \right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} n(x_0),$$

$$\kappa_g'''(x_0)\tau_g^{\,3}(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g^{\,4}(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$-\kappa_g(x_0)\tau_g^{\,2}(x_0)\tau_g'''(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g'^{\,3}(x_0)$$
$$-3\kappa_n(x_0)\tau_g^{\,2}(x_0)\tau_g'^{\,2}(x_0) - 4\tau_g^{\,2}(x_0)\tau_g''(x_0)\kappa_g'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g'^{\,2}(x_0)\kappa_g'(x_0) = 0$$

(5) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}_{hu}(x_0) = f^{(5)}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)' + \kappa_n(x_0) \right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} n(x_0),$$

$$\kappa_g^{(4)}(x_0)\tau_g^{\,3}(x_0) + 6\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g''(x_0)\kappa_n'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g'''(x_0)$$
$$+4\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + \tau_g^{\,4}(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g^{\,3}(x_0)\tau_g'^{\,2}(x_0)$$
$$+\kappa_g(x_0)\tau_g^{\,4}(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\tau_g^{\,4}(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0) - \tau_g^{\,5}(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\,\tau_g^{\,6}(x_0)$$

$$+\kappa_n(x_0)\,\tau_g{}^5(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}^{(4)}(x_0) + 5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}'''(x_0)$$
$$+10\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 10\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)$$
$$-5\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'''(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 10\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\kappa_g{}'(x_0) = 0$$

İspat

(1) (⇒) Determinant özelliklerinden yararlanarak,

$$f_{hu}(x_0) = \left| t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınırsa;

$$f'_{hu}(x_0) = \left| t'(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right| + \left| t(x_0)\;\; n'(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$

olur. Burada Darboux çatısına ait denklemler kullanılırsa;

$$f'_{hu}(x_0) = \left| \kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$
$$+ \left| t(x_0) - \tau_g(x_0)q(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left| q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right| + \kappa_n(x_0)\left| n(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$
$$-\tau_g(x_0)\left| t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0) \right|$$

bulunur. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left| q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right| - \tau_g(x_0)\left| t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0) \right| \qquad (4.1.1)$$

elde edilir. $f'_{hu}(x_0) = 0$ olması için,

$$\kappa_g(x_0)\left| q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0) \right| - \tau_g(x_0)\left| t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0) \right| = 0$$

olmalıdır. $\{t(x_0)\ q(x_0)\ n(x_0)\}$ çatı alanı olduğundan $u(x_0) = \lambda_1 t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon \mathbb{R}$ sayıları var ve tektir. Burada u vektörü $u = (\lambda_1, \dots, \dots)$ şeklinde bir vektör olup, aynı zamanda birim vektör olduğundan Galile norm tanımından dolayı

$||u||_G = \left|\lambda_1\right| = 1$ olmalıdır. O halde $\lambda_1 = \pm 1$ şeklindedir. $\lambda_1 = 1$ alınırsa;

$$u(x_0) = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \tag{4.1.2}$$

olarak bulunur. O halde (4.1.1) denkleminde $u(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)\right|$$
$$-\tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)\right|$$

bulunur. Denklem düzenlenirse;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right| + \lambda_2 \kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ n(x_0)\ q(x_0)\right|$$
$$+ \lambda_3 \kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ n(x_0)\ n(x_0)\right| - \tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0)\right|$$
$$- \lambda_2 \tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ q(x_0)\right| - \lambda_3 \tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ n(x_0)\right|$$

yazılır. Determinant özelliğinden dolayı;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right| - \lambda_3 \tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ n(x_0)\right|$$

elde edilir. Burada $\left|t(x_0)\ q(x_0)\ n(x_0)\right| = 1$ olduğundan;

$$f'_{hu}(x_0) = \kappa_g(x_0) - \lambda_3 \tau_g(x_0) \tag{4.1.3}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'_{hu}(x_0) = 0$ olması durumunda,

$$\kappa_g(x_0) - \lambda_3 \tau_g(x_0) = 0$$

olur. Burada $\tau_g(x_0) \neq 0$ olduğu kullanılırsa;

$$\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu eşitlik (4.1.2) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$u(x_0) = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$$

elde edilir.

(⇐): $u(x_0) = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$ şeklinde alınırsa $f'_{hu}(x_0) = 0$ bulunur.

(2) (⇒) (4.1.1) denkleminin türevi alınırsa;

$$f''_{hu}(x_0) = \kappa_g{}'(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right| + \kappa_g(x_0)\left(\left|q'(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right.$$
$$\left. + \left|q(x_0)\ \ n'(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right) - \tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g(x_0)\left(\left|t'(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right| + \left|t(x_0)\ \ q'(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right)$$

olur. Darboux çatısı denklemleri kullanılırsa;

$$f''_{hu}(x_0) = \kappa_g{}'(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right| + \kappa_g(x_0)\left(\left|\tau_g(x_0)n(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right.$$
$$\left. + \left|q(x_0)\ \ -\tau_g(x_0)q(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right) - \tau'_g(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g(x_0)\left(\left|\kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right| + \left|t(x_0)\ \ \tau_g(x_0)n(x_0)\ \ u(x_0)\right|\right)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f''_{hu}(x_0) = \kappa_g{}'(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right| + \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\left|n(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$- \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right| - \tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$

$-\tau_g(x_0)\,\kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right| - \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)\left|n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$

$-{\tau_g}^2(x_0)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$

bulunur. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f''_{hu}(x_0) = {\kappa_g}'(x_0)\left|q(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right| - {\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)\left|n(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right| - {\tau_g}^2(x_0)\left|t(x_0)\ n(x_0)\,u(x_0)\right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f''_{hu}(x_0) = ({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-{\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right| - {\tau_g}^2(x_0)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right| \qquad (4.1.4)$$

bulunur. $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = 0$ olması için;

$$({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right| - {\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-{\tau_g}^2(x_0)\left|t(x_0)\ n(x_0)\,u(x_0)\right| = 0$$

olmalıdır. O halde (4.1.4) denkleminde $u(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f''_{hu}(x_0) = ({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|$$
$$-{\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|$$
$$-{\tau_g}^2(x_0)\left|t(x_0)\ n(x_0)\ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|$$

bulunur. Denklem düzenlenirse;

$$f''_{hu}(x_0) = ({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right|$$
$$+\lambda_2({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)\right|$$
$$+\lambda_3({\kappa_g}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ n(x_0)\right|$$
$$-{\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ \ t(x_0)\right| - \lambda_2{\tau_g}'(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ \ q(x_0)\right|$$

$$-\lambda_3 \tau_g{}'(x_0) \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| - \tau_g{}^2(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right|$$
$$-\lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; q(x_0) \right| - \lambda_3 \tau_g{}^2(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; n(x_0) \right|$$

yazılır. Determinant özelliğinden dolayı;

$$f''_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right|$$
$$-\lambda_3 \tau_g{}'(x_0) \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| - \lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; q(x_0) \right|$$

elde edilir. Burada $\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| = 1$ olduğundan;

$$f''_{hu}(x_0) = \kappa_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) - \lambda_3 \tau_g{}'(x_0) + \lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) \tag{4.1.5}$$

olarak bulunur. Sonuç $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) - \lambda_3 \tau_g{}'(x_0) + \lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) = 0$$

olur. Burada $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\kappa_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) - \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \tau_g{}'(x_0) + \lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) = 0$$
$$\lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \tau_g{}'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) - \kappa_g{}'(x_0)$$
$$\lambda_2 \tau_g{}^2(x_0) = \frac{\kappa_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g{}'(x_0)}{\tau_g(x_0)}$$
$$\lambda_2 = \frac{\kappa_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g{}'(x_0)}{\tau_g{}^3(x_0)}$$
$$\lambda_2 = \frac{\kappa_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g{}'(x_0)}{\tau_g{}^2(x_0)} \frac{1}{\tau_g(x_0)} - \frac{\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0)}{\tau_g{}^3(x_0)}$$
$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)} \left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} \right)' + \kappa_n(x_0) \right]$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu eşitlik (4.1.2) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$u(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\ [\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \kappa_n(x_0)\ ]\ q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\ n(x_0)$$

olarak elde edilir.

(⇐): İspat açık.

(3) (⇒) (4.1.4) denkleminin türevi alınırsa;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))(\left|q'(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right| + \left|q(x_0)\ n'(x_0)\ u(x_0)\right|)$$
$$-\tau_g''(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right| - \tau_g'(x_0)(\left|t'(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\ q'(x_0)\ u(x_0)\right|) - 2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-\tau_g^2(x_0)(\left|t'(x_0)\ n(x_0)\,u(x_0)\right| + \left|t(x_0)\ n'(x_0)\ u(x_0)\right|)$$

bulunur. Darboux çatı denklemleri kullanılırsa;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0))(\ \left|\tau_g(x_0)n(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$+\left|q(x_0)\ -\tau_g(x_0)q(x_0)\ u(x_0)\right|) - \tau_g''(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-\tau_g'(x_0)(\ \left|\kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\ \tau_g(x_0)n(x_0)\ u(x_0)\ \right) - 2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\ n(x_0)\,u(x_0)\right|$$
$$-\tau_g^2(x_0)(\left|\kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\ n(x_0)\,u(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\ -\tau_g(x_0)q(x_0)\ u(x_0)\right|)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\ (\kappa_g'(x_0)\tau_g(x_0) + \tau_g^2(x_0)\kappa_n(x_0))\left|n(x_0)\ n(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-\ (\kappa_g'(x_0)\tau_g(x_0) + \tau_g^2(x_0)\kappa_n(x_0))\left|q(x_0)\,q(x_0)\ u(x_0)\right|$$
$$-\tau_g''(x_0)\left|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right| - \tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\right|$$

$$- \tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0)\left|n(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right| - \tau_g{}'(x_0)\tau_g(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$- 2\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\, u(x_0)\right| - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0)\left|n(x_0)\;\; n(x_0)\, u(x_0)\right| + \tau_g{}^3(x_0)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$

bulunur. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g{}''(x_0)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right| - \tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0)\left|n(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right| - 2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\, u(x_0)\right|$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right| + \tau_g{}^3(x_0)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}''(x_0) + 2\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right| + (\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$- 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\, u(x_0)\right| \qquad (4.1.6)$$

bulunur. $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0$ olması için;

$$(\kappa_g{}''(x_0) + 2\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)\right|$$
$$+ (\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)\right| - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\, u(x_0)\right| = 0$$

olmalıdır. O halde (4.1.6) denkleminde $u(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}''(x_0) + 2\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)\right|$$
$$+ (\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)\right|$$
$$- 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)\right|$$

bulunur. Denklem düzenlenirse;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$-\tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right| + \lambda_2(\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; q(x_0)\right|$$
$$+\lambda_3(\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; n(x_0)\right|$$
$$+(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; t(x_0)\right| + \lambda_2(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\left|t(x_0)\; q(x_0)\; q(x_0)\right|$$
$$+\lambda_3(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; n(x_0)\right| - 3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right|$$
$$-3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; q(x_0)\right| - 3\lambda_3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; n(x_0)\right|$$

yazılır. Determinant özelliğinden dolayı;

$$f'''_{hu}(x_0) = (\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$-\tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right| + \lambda_3(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; n(x_0)\right|$$
$$-3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; q(x_0)\right|$$

elde edilir. Burada $\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; n(x_0)\right| = 1$ olduğundan;

$$f'''_{hu}(x_0) = \kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$+\lambda_3(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0)) + 3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) \tag{4.1.7}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0) + \lambda_3(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))$$
$$+3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$$

olur. Burada $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \kappa_n(x_0)\right]$, $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\kappa_g''(x_0)+2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))$$
$$-3\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \kappa_n(x_0)\right]\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\kappa_g''(x_0)\tau_g(x_0) - \tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g^2(x_0)\kappa_n'(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$-3\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)'\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$$

sonucu elde edilir.

(⇐): İspat açık.

(4) (⇒) (4.1.6) denkleminin türevi alınırsa;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\,\kappa_g'''(x_0) + 2\tau_g''(x_0)\,\kappa_n(x_0) + 2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\,\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) - 2\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\,)\,|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,(\kappa_g''(x_0) + 2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\,(\,|q'(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,|q(x_0)\;\; n'(x_0)\;\; u(x_0)|\,) + (3\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0))\,|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\,(\,|t'(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)| + |t(x_0)\;\; q'(x_0)\;\; u(x_0)|\,)$$
$$-\,(3\tau_g'^2(x_0) + 3\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0))\,|t(x_0)\;\; n(x_0)\; u(x_0)|$$
$$-\,3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\,(\,|t'(x_0)\;\; n(x_0)\; u(x_0)| + |t(x_0)\;\; n'(x_0)\; u(x_0)|\,)$$

olur. Darboux çatı denklemleri kullanılırsa;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\,\kappa_g'''(x_0) + 2\tau_g''(x_0)\,\kappa_n(x_0) + 3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$-\,2\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\,)\,|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,(\kappa_g''(x_0) + 2\,\tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) - \tau_g^2(x_0)\kappa_g(x_0))\,(\,|\tau_g(x_0)n(x)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,|q(x_0)\;\; -\tau_g(x_0)q(x_0)\;\; u(x_0)|\,) + (3\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0))\,|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\,(\,|\kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\;\; q(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$+\,|t(x_0)\;\; \tau_g(x_0)n(x_0)\;\; u(x_0)|\,) - \left(3\tau_g'^2(x_0) + 3\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)\right)|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; u(x_0)|$$
$$-3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\,(\,|\kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0)\;\; n(x_0)\; u(x_0)| + |t(x_0)\;\; -\tau_g(x_0)q(x_0)\;\; u(x_0)|\,)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\ \kappa_g{}'''(x_0) + 2\tau_g{}''(x_0)\ \kappa_n(x_0) + 3\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \ \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\ 2\tau_g(x_0)\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0)\ )\ \big|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ \tau_g(x_0)\ (\kappa_g{}''(x_0) + 2\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0) + \ \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$-\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0))\,\big|n(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big| -\ \tau_g(x_0)\ (\kappa_g{}''(x_0) + 2\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\ \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g(x_0))\,\big|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+(3\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\,\big|t(x_0)\ q(x_0)\ u(x_0)\big|$$
$$+\ \kappa_g(x_0)\ (\tau_g{}^3(x_0) - \ \tau_g{}''(x_0))\,\big|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\kappa_n(x_0)\ (\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\,\big|n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ \tau_g(x_0)(\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\ \big|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$-\ (3\tau_g{}'^2(x_0) + \ 3\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0))\,\big|t(x_0)\ \ n(x_0)\ u(x_0)\big|$$
$$-\ 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0)\,\big|q(x_0)\ \ n(x_0)\ u(x_0)\big|$$
$$-\ 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n(x_0)\,\big|n(x_0)\ \ n(x_0)\ u(x_0)\big|$$
$$+\ 3\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)\,\big|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$

bulunur. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\ \kappa_g{}'''(x_0) + 2\tau_g{}''(x_0)\ \kappa_n(x_0) + 3\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \ \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\ 2\tau_g(x_0)\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0)\ )\ \big|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ (3\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\,\big|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ \kappa_n(x_0)\ (\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0))\ (\big|n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$-\ (3\tau_g{}'^2(x_0) + \ 3\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0))\,\big|t(x_0)\ \ n(x_0)\ u(x_0)\big|$$
$$-\ 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0)\ (\big|q(x_0)\ \ n(x_0)\ u(x_0)\big| + 3\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)\,\big|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}'''(x_0) + 3\ \kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \ \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\ 5\tau_g(x_0)\ \tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0) - \ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\ )\ \big|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ (6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\,\big|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\big|$$
$$+\ (\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\ \big|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\big| \tag{4.1.8}$$

bulunur. $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = 0$ olması için;

$$
\begin{aligned}
&(\kappa_g'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0)+3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)\\
&-\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0))\,\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|\\
&+(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)-\tau_g'''(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|\\
&+(\tau_g^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3\tau_g'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|=0
\end{aligned}
$$

olmalıdır. O halde (4.1.8) denkleminde $u(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}{}_{hu}(x_0) &= (\kappa_g'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0)+3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)\\
&-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)-\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\\
&-\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0))\,\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|\\
&+(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)-\tau_g'''(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|\\
&+(\tau_g^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3\tau_g'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\lambda_3 n(x_0)\right|
\end{aligned}
$$

bulunur. Denklem düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
f^{(4)}{}_{hu}(x_0) &= (\kappa_g'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0)+3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)\\
&-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)-\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0))\,\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right|\\
&+\lambda_2(\kappa_g'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0)+3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)\\
&-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)-\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0))\,\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)\right|\\
&+\lambda_3(\kappa_g'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0)+3\,\tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)\\
&-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)-\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0))\,\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ n(x_0)\right|\\
&+(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)-\tau_g'''(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0)\right|\\
&+\lambda_2(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)-\tau_g'''(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ q(x_0)\right|\\
&+\lambda_3(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)-\tau_g'''(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)\right|\\
&+(\tau_g^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3\tau_g'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right|\\
&+\lambda_2\,(\tau_g^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3\tau_g'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)\right|\\
&+\lambda_3(\tau_g^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3\tau_g'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ n(x_0)\right|
\end{aligned}
$$

yazılır. Determinant özelliğinden dolayı;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = (\,\kappa_g{}'''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\,)\,\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right|$$
$$+\,\lambda_3(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; n(x_0)\right|$$
$$+\,\lambda_2\,(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\,\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; q(x_0)\right|$$

elde edilir. Burada $\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; n(x_0)\right| = 1$ olduğundan;

$$f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = \kappa_g{}'''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) + \lambda_3(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$-\tau_g{}'''(x_0)) - \lambda_2\,(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x) - 3\tau_g{}'^2(x_0)) \qquad (4.1.9)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'{}_{hu}(x_0) = f''{}_{hu}(x_0) = f'''{}_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g{}'''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0) - 5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\,(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))$$
$$+\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \kappa_n(x_0)\right](\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0)) = 0$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\kappa_g{}'''(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \tau_g{}^4(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\,\kappa_g(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'''(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^3(x_0)$$
$$-\,3\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) - 4\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0) = 0$$

sonucu bulunur.

(⇐): İspat açık.

(5) ($\Rightarrow$) (4.1.8) denkleminin türevi alınırsa;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g{}''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+\,3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0)+\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n{}'''(x_0)-5\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}''(x_0)\kappa_g(x_0)-5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)-2\,\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)-3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0))\,\left|q(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|$$
$$+\,(\,\kappa_g{}'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0)+3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)-5\tau_g(x_0)\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g{}'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\,)\,(\left|q'(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+\left|q(x_0)\;\;n'(x_0)\;\;u(x_0)\right|)$$
$$+\,(12\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)+6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0)-\tau_g{}^{iv}(x_0))\left|t(x_0)\;\;q(x_0)\;\;u(x_0)\right|$$
$$+\,(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)-\tau_g{}'''(x_0))\,(\left|t'(x_0)\;\;q(x_0)\;\;u(x_0)\right|+\left|t(x_0)\;\;q'(x_0)\;\;u(x_0)\right|)$$
$$+(4\tau_g{}'''(x_0)\tau_g{}'(x_0)-4\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0)$$
$$-\,6\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0))\,\left|t(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+(\tau_g{}^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$-3\tau_g{}'^2(x_0))\,(\left|t'(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+\left|t(x_0)\;\;n'(x_0)\;\;u(x_0)\right|)$$

olur. Darboux çatı denklemleri kullanılırsa;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+\,3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0)+\tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n{}'''(x_0)-5\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)-5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)-2\,\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)-3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0))\,\left|q(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|$$
$$+\,(\,\kappa_g{}'''(x_0)+3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0)+3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0)-\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g'(x_0)-\kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\,)$$
$$(\left|\tau_g(x_0)n(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+\left|q(x_0)\;-\tau_g(x_0)q(x_0)\;\;u(x_0)\right|)$$
$$+\,(12\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)+6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0)-\tau_g{}^{iv}(x_0))\left|t(x_0)\;\;q(x_0)\;\;u(x_0)\right|$$
$$+\,(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)-\tau_g{}'''(x_0))\,(\left|\kappa_g(x_0)q(x_0)+\kappa_n(x_0)n(x_0)\;\;q(x_0)\;\;u(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\;\;\tau_g(x_0)n(x_0)\;\;u(x_0)\right|)+(4\tau_g{}'''(x_0)\tau_g{}'(x_0)-10\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)$$
$$-\,4\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0))\,\left|t(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+(\tau_g{}^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$-3\tau_g{}'^2(x_0))\,(\left|\kappa_g(x_0)q(x_0)+\kappa_n(x_0)n(x_0)\;\;n(x_0)\;\;u(x_0)\right|+\left|t(x_0)\;-\tau_g(x_0)q(x_0)\;\;u(x_0)\right|)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0) + 3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0) + 3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0) + \ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 5\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0) - 5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0) - \ 2\,\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0))\ \left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\tau_g(x_0)(\,\kappa_g{}'''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \ 3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0) - \ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g'(x_0) - \ \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\ )\,(\left|n(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|)$$
$$-\ \tau_g(x_0)(\,\kappa_g'''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \ 3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g(x_0) - \ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g'(x_0) - \ \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\ )\,(\left|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|)$$
$$+\ \left(12\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_g(x_0)(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\ (\left|q(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_n(x_0)\ (6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\ (\left|n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\tau_g(x_0)\left(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\ \left(4\tau_g'''(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 10\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_g(x_0)(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_n(x_0)(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\left|n(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$-\,\tau_g(x_0)(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\left|t(x_0)\ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$

bulunur. Burada determinant özelliğinden dolayı;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0) + 3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0) + 3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+3\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0) + \ \tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'''(x_0) - 5\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$-\,5\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)\ -\ 5\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \ 2\,\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)$$
$$-\,\tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\,\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0))\ \left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\ \left(12\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_n(x_0)\ (6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))\ (\left|n(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\tau_g(x_0)\left(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\ \left(4\tau_g'''(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 10\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$
$$+\,\kappa_g(x_0)(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g{}'^2(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$

$$-\tau_g(x_0)({\tau_g}^4(x_0)-4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0)-3{\tau_g}'^2(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\begin{aligned}
f^{(5)}{}_{hu}(x_0) &= ({\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\,{\kappa_n}'(x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)\\
&+4\,{\tau_g}'(x_0){\kappa_n}''(x_0)+\ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)\\
&-7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)-\ {\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)-9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0)\tau_g'(x_0)\\
&+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|+\ (15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)\\
&-{\tau_g}^{iv}(x_0)-{\tau_g}^5(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|+\ (10{\tau_g}^3(x_0)\tau_g'(x_0)-5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)\\
&-10\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0))\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|
\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

bulunur. $f'{}_{hu}(x_0)=f''{}_{hu}(x_0)=f'''{}_{hu}(x_0)=f^{(4)}{}_{hu}(x_0)=f^{(5)}{}_{hu}(x_0)=0$ olması için;

$$\begin{aligned}
&({\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\,{\kappa_n}'(x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)+4\,{\tau_g}'(x_0){\kappa_n}''(x_0)\\
&+\tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)\\
&-{\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)-9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0){\tau_g}'(x_0)\\
&+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|+(\,15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)\\
&-{\tau_g}^{iv}(x_0)-{\tau_g}^5(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ u(x_0)\right|+(\,10{\tau_g}^3(x_0)\tau_g'(x_0)-5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)\\
&-10\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0))\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ u(x_0)\right|\ =0
\end{aligned}$$

olmalıdır. O halde (4.1.10) denkleminde $u(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned}
f^{(5)}{}_{hu}(x_0) &= ({\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\,{\kappa_n}'(x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)\\
&+4\,{\tau_g}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+\tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)\\
&-7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)-\ {\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)\\
&-9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0){\tau_g}'(x_0)+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0))\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ t(x_0)+\lambda_2q(x_0)+\lambda_3n(x_0)\right|\\
&+(15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0){\tau_g}''(x_0)-{\tau_g}^{iv}(x_0)\\
&-{\tau_g}^5(x_0))\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2q(x_0)+\lambda_3n(x_0)\right|+\ (10{\tau_g}^3(x_0){\tau_g}'(x_0)\ -5\tau_g(x_0){\tau_g}'''(x_0)\\
&-10{\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0))\ \left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)+\lambda_2q(x_0)+\lambda_3n(x_0)\ \right|
\end{aligned}$$

bulunur. Denklem düzenlenirse;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ 4\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 8\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0) - 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$- 7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\,|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)|$$
$$+ \lambda_2(\kappa_g{}^{iv}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ 4\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 8\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0) - 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$- 7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\,|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)|$$
$$+ \lambda_3(\kappa_g{}^{iv}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ 4\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 8\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0) - 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$- 7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\,|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ n(x_0)|$$
$$+ \left(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0)\right)|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0)|$$
$$+ \lambda_2\left(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0)\right)|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ q(x_0)|$$
$$+ \lambda_3\left(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0)\right)|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)|$$
$$+ \left(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0) - 10\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)|$$
$$+ \lambda_2\left(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0) - 10\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)|$$
$$+ \lambda_3\left(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0) - 10\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ n(x_0)|$$

yazılır. Determinant özelliğinden dolayı;

$$f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = (\kappa_g{}^{(4)}(x_0)+3\,\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g{}'''(x_0)+3\,\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ 4\,\tau_g{}'(x_0)\kappa_n''(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 8\tau_g{}'^2(x_0)\kappa_g(x_0) - 9\tau_g(x_0)\,\tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)$$
$$- 7\tau_g(x_0)\,\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\,|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)|$$

$$+\lambda_3\left(15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)-{\tau_g}^{iv}(x_0)-\ {\tau_g}^5(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)\right|$$

$$+\lambda_2\left(10{\tau_g}^3(x_0)\tau_g'(x_0)-5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)-10\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0)\right)\left|t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0)\ \right|$$

elde edilir. Burada $\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)\right|=1$ olduğundan;

$$\begin{aligned}
{f^{(5)}}_{hu}(x_0)&={\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\ \kappa_n'(x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\ \tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)\\
&+4\ {\tau_g}'(x_0){\kappa_n}''(x_0)+\ \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\ \tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)\\
&-7\tau_g(x_0)\ \tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)-\ {\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)-\ 9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0)\tau_g'(x_0)\\
&+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0)\ +\ \lambda_3(15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)-{\tau_g}^{iv}(x_0)\\
&-{\tau_g}^5(x_0))-\ \lambda_2\left(10{\tau_g}^3(x_0)\tau_g'(x_0)-5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)-10\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0)\right)
\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak ${f'}_{hu}(x_0)=\ {f''}_{hu}(x_0)={f'''}_{hu}(x_0)={f^{(4)}}_{hu}(x_0)={f^{(5)}}_{hu}(x_0)=0$ olması durumunda;

$$\begin{aligned}
&{\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\ \kappa_n'\ (x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\ \tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)+4\ {\tau_g}'(x_0){\kappa_n}''(x_0)\\
&+\tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\ \tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 7\tau_g(x_0)\ \tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)\\
&-{\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)-\ 9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0)\tau_g'(x_0)+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0)\\
&+\lambda_3\left(15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)-{\tau_g}^{iv}(x_0)-\ {\tau_g}^5(x_0)\right)\\
&-\lambda_2(10{\tau_g}^3(x_0){\tau_g}'(x_0)\ -5\tau_g(x_0){\tau_g}'''(x_0)-10{\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0)=0
\end{aligned}$$

olur. Burada $\lambda_2=-\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)'+\ \kappa_n(x_0)\right]$, $\lambda_3=\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\begin{aligned}
&{\kappa_g}^{(4)}(x_0)+3\ \kappa_n'\ (x_0){\tau_g}''(x_0)+4\kappa_n(x_0){\tau_g}'''(x_0)+3\ \tau_g''(x_0){\kappa_n}'(x_0)+4\ {\tau_g}'(x_0){\kappa_n}''(x_0)\\
&+\tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)-8{\tau_g}'^2(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 9\tau_g(x_0)\ \tau_g''(x_0)\kappa_g(x_0)-\ 7\tau_g(x_0)\ \tau_g'(x_0){\kappa_g}'(x_0)\\
&-{\tau_g}^2(x_0)\kappa_g''(x_0)-\kappa_n'(x_0){\tau_g}^3(x_0)-\ 9\kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0)\tau_g'(x_0)+\kappa_g(x_0){\tau_g}^4(x_0)\\
&+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\left(15\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^2(x_0)\tau_g''(x_0)-{\tau_g}^{iv}(x_0)-\ {\tau_g}^5(x_0)\right)\\
&-\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)'+\ \kappa_n(x_0)\right](10{\tau_g}^3(x_0){\tau_g}'(x_0)\ -5\tau_g(x_0)\tau_g'''(x_0)-10\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0)=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$\kappa_g{}^{(4)}(x_0)\tau_g{}^3(x_0) + 6\tau_g{}^3(x_0)\tau_g''(x_0)\kappa_n{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'''(x_0) + 4\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_n{}''(x_0)$$
$$+\tau_g{}^4(x_0)\kappa_n'''(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\tau_g{}^4(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g{}'(x_0)$$
$$-\tau_g{}^5(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\,\tau_g{}^6(x_0) + \kappa_n(x_0)\,\tau_g{}^5(x_0)\tau_g'(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}^{\iota v}(x_0)$$
$$+5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g{}'''(x_0) + 10\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)\tau_g''(x_0) - 10\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)$$
$$-5\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'''(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 10\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\kappa_g{}'(x_0) = 0$$

bulunur.

($\Leftarrow$): İspat açık.

Şimdi yukarda verdiğimiz genel sonuçları bir yüzey üzerinde bazı önemli eğriler için ifade edeceğiz. Bu eğriler yüzey üzerindeki bir eğrinin eğrilik fonksiyonları ile karakterize edilip

$\kappa_n \equiv 0 \;\Leftrightarrow\;$ asimptotik eğri
$\kappa_g \equiv 0 \;\Leftrightarrow\;$ jeodezik eğri
$\tau_g \equiv 0 \;\Leftrightarrow\;$ eğrilik çizgisi

şeklindedir.

4.1.3. Sonuç

$\alpha\colon I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı asimptotik bir eğri olsun. Bu durumda f_{hu} fonksiyonunun tekillikleri aşağıdaki gibidir:

(1) $f'_{hu}(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow\; u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = 0 \;\Leftrightarrow$

$$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$$

(3) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)\,,$

$\kappa_g''(x_0)\tau_g(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' \tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$

(4) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$

$\kappa_g'''(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'''(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g''(x_0)$

$+3\kappa_g(x_0)\tau_g'^3(x_0) - 4\tau_g{}^2(x_0)\tau_g''(x_0)\kappa_g'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0)\kappa_g'(x_0) = 0$

(5) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)} \left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$

$\kappa_g{}^{\iota v}(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g{}^3(x_0)\tau_g'^2(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\tau_g{}^4(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0)$

$-\tau_g{}^5(x_0)\kappa_g''(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}^{\iota v}(x_0) + 5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g'''(x_0)$

$+10\kappa_g(x_0)\tau_g'^2(x_0)\tau_g''(x_0) - 5\tau_g{}^2(x_0)\tau_g'''(x_0)\kappa_g'(x_0) - 10\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g''(x_0)\kappa_g'(x_0) = 0$

İspat: Eğrimiz asimptotik eğri olduğu için $\kappa_n \equiv 0$ olur. Bu durum 4.1.2 teoreminde yerine yazılırsa yukarıdaki denklemler elde edilir.

4.1.4. Sonuç

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı jeodezik bir eğri olsun. Bu durumda f_{hu} fonksiyonunun tekillikleri aşağıdaki gibidir:

(1) $f'_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow u = t(x_0) - \frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, q(x_0)$

(3) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow u = t(x_0) - \frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, q(x_0),$

$\frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)} = \text{c, sabit}$

(4) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow\ u = t(x_0) - \frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, q(x_0)$,

$\frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)} =$ c, sabit

(5) $f'_{hu}(x_0) = f''_{hu}(x_0) = f'''_{hu}(x_0) = f^{(4)}{}_{hu}(x_0) = f^{(5)}{}_{hu}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$u = t(x_0) - \frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, q(x_0)$,

$$6\tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0) + 4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n{}''(x_0) + \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n{}'''(x_0)$$
$$- \tau_g{}^4(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \kappa_n(x_0)\,\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 10\kappa_n(x_0)\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) = 0$$

İspat: Eğrimiz jeodezik eğri olduğu için $\kappa_g \equiv 0$ olur. Bu durum 4.1.2 teoreminde yerine yazılırsa yukarıdaki denklemler elde edilir.

4.1.5. Sonuç

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için birim hızlı bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda f_{hu} fonksiyonu için ardışık türevler sıfırdır.

İspat: Eğrimiz eğrilik çizgisi olduğu için $\tau_g \equiv 0$ olur. Bu durum 4.1.2 teoremde yerine yazılırsa ardışık türevlerin sıfır olduğu elde edilir.

4.1.6. Tanım (Galile Uzaklık Fonksiyonu)

$I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere

$$\alpha: I \to G^3\,, \qquad \alpha(x) = (x, y(x), z(x))$$

regüler birim hızlı eğrisi verilsin. Bu durumda

$$F_d: I \times S_G{}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, \alpha - u) \to F_d(x, \alpha - u)$$

olmak üzere

$$F_d(x,u) = |t(x) \quad n(x) \quad (\alpha - u)(x)|$$

şeklinde tanımlı düzgün fonksiyonların iki parametreli bir ailesi olarak F_d fonksiyonuna**,** birim hızlı bir α eğrisi üzerinde Darboux çatısına göre Galile uzaklık fonksiyonu denir. Burada $t(x)$ ve $n(x)$ vektörleri α eğrisinin birim teğet ve α eğrisinin bulunduğu yüzeyin birim normal vektörleridir. ${S_G}^2$ kümesi ise Galile uzayında birim vektörlerin kümesidir. Bu F_d fonksiyon ailesinin belirlediği bir değişkenli fonksiyon (3.1.5) denkleminden $f_{du}(x)$ fonksiyonu ise $f_{du}(x) = F_{du}(x, \alpha - u)$ şeklinde olur. Bu durumda F_d fonksiyonu, $f_{du}(x)$ fonksiyonunun bir dallanması olur.

4.1.7. Teorem

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir eğri olsun. Bu eğri için $\forall x \in I$ noktasındaki Darboux çatısı $\{t(x),\ q(x),\ n(x)\}$ olmak üzere f_{du} fonksiyonunun tekillik koşulları aşağıdaki gibidir:

(1) $f'_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$$

(3) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$$

$$\tau_g^3(x_0)\,\kappa_g''(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g^4(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0){\tau_g}^5(x_0)$$
$$+2\tau_g^3(x_0)\kappa_g'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0) + \kappa_g(x_0){\tau_g}^5(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0) - 3\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0)\kappa_g'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0) = 0$$

(4) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$$

$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g'''(x_0) + 3\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g^4(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+ \tau_g^5(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0) - \kappa_n(x_0){\tau_g}^6(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0)$$
$$+ 3\tau_g^3(x_0)\kappa_g''(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0) + 2\,\tau_g^4(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^5(x_0)$$
$$- \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\kappa_g'''(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0){\tau_g}''(x_0)$$
$$+ 3\kappa_g(x_0)\tau_g'^{3}(x_0) + \tau_g^5(x_0)\kappa_g'(x_0) - 4\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g'^{2}(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g^6(x_0) - 3\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'^{2}(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^5(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\kappa_g''(x_0)$$
$$+3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^{2}(x_0) = 0$$

(5) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = f^{(5)}{}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$$
$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g^{iv}(x_0) + 4\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\tau_g^3(x_0)\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'''(x_0)$$
$$+\tau_g^4(x_0)\kappa_n'''(x_0) + \tau_g^5(x_0)\kappa_n''(x_0) + 4\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0)$$
$$+2\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}''(x_0) - \tau_g^6(x_0)\kappa_n'(x_0) - 9\kappa_n(x_0){\tau_g}^5(x_0){\tau_g}'(x_0)$$
$$+ 7{\tau_g}^4(x_0){\tau_g}'(x_0){\kappa_g}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0) - 7\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+ \kappa_g(x_0){\tau_g}^7(x_0) + 4\tau_g^3(x_0){\kappa_g}'''(x_0) + 8\tau_g^3(x_0)\kappa_n'(x_0){\tau_g}'(x_0) + 6\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0){\tau_g}''(x_0)$$
$$+ 3\tau_g^4(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2{\tau_g}^5(x_0)\kappa_n'(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0) - \kappa_n(x_0){\tau_g}^6(x_0)$$
$$- 13\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0)15\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0) + 10{\tau_g}^4(x_0){\tau_g}''(x_0) - \tau_g^2(x_0){\tau_g}^{iv}(x_0) - {\tau_g}^7(x_0)$$
$$- 10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0) + 5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0) + 10\kappa_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$- 5\tau_g^2(x_0){\kappa_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0) - 10\tau_g(x_0){\kappa_g}'(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0) - 10\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0)$$
$$+ 5\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'''(x_0) + 10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0) = 0$$

İspat

(1) ($\Rightarrow$) Determinant özelliklerinden yararlanarak,

$$f_{du}(x_0) = \left| t(x_0) \quad n(x_0) \quad (\alpha - u)(x_0) \right|$$

şeklinde tanımlı fonksiyonun türevi alınırsa;

$$f'_{du}(x_0) = \left| t'(x_0) \quad n(x_0) \quad (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \quad n'(x_0) \quad (\alpha - u)(x_0) \right|$$

$$+\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)'(x_0) \right|$$

olur. Burada Darboux çatısına ait denklemler kullanılırsa;

$$f'_{du}(x_0) = \left| \kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right|$$
$$+\left| t(x_0) \;\; -\tau_g(x_0)q(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenirse;

$$f'_{du}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| + \kappa_n(x_0)\left| n(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right|$$
$$-\tau_g(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|$$

bulunur. Burada $\alpha'(x_0) = t(x_0)$ eşitliğinden ve determinant özelliğinden dolayı;

$$f'_{du}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| - \tau_g(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| \qquad (4.1.12)$$

elde edilir. $f'_{du}(x_0) = 0$ olması için,

$$\kappa_g(x_0)\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| - \tau_g(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha-u)(x_0) \right| = 0$$

olmalıdır. $\{t(x_0) \; q(x_0) \; n(x_0)\}$ çatı alanı olduğundan $\alpha - u = \lambda_1 t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0)$ olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \epsilon \mathbb{R}$ sayıları var ve tektir. Burada u vektörü $u = (\lambda_1, \dots, \dots)$ şeklinde bir vektör olup, aynı zamanda birim vektör olduğundan Galile norm tanımından dolayı $||u||_G = \left| \lambda_1 \right| = 1$ olmalıdır. O halde
$\lambda_1 = \pm 1$ şeklindedir. $\lambda_1 = 1$ alınırsa;

$$\alpha - u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \qquad (4.1.13)$$

olarak bulunur. O halde (4.1.12) denkleminde $(\alpha - u)(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f'_{du}(x_0) = \kappa_g(x_0)\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$-\tau_g(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

bulunur. Denklem düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$\kappa_g(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0)\right| - \lambda_3\tau_g(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)\right|$$

elde edilir. Burada $\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0)\right| = 1$ olduğundan;

$$f'_{du}(x_0) = \kappa_g(x_0) - \lambda_3\tau_g(x_0) \tag{4.1.14}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'_{du}(x_0) = 0$ olması durumunda,

$$\kappa_g(x_0) - \lambda_3\tau_g(x_0) = 0$$

olur. Burada $\tau_g(x_0) \neq 0$ olduğu kullanılırsa;

$$\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu eşitlik (4.1.13) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$\alpha - u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$$

elde edilir.

(⇐): $\alpha - u = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$ alınırsa $f'_{du}(x_0) = 0$ elde edilir.

(2) (⇒) (4.1.12) denkleminin türevi alınırsa;

$$\begin{aligned}
f''_{du}(x_0) &= \kappa_g{}'(x_0)\left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| + \kappa_g(x_0)(\left|q'(x_0)\ \ n(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| \\
&+ \left|q(x_0)\ \ n'(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| + \left|q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ (\alpha-u)'(x_0)\right|) \\
&-\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| - \tau_g(x_0)(\left|t'(x_0)\ \ q(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| \\
&+\left|t(x_0)\ \ q'(x_0)\ \ (\alpha-u)(x_0)\right| + \left|t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ (\alpha-u)'(x_0)\right|)
\end{aligned}$$

olur. Darboux çatısı denklemleri kullanılırsa;

$$f''_{du}(x_0) = \kappa_g{}'(x_0)\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+\kappa_g(x_0)(\left| \tau_g(x_0)n(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| q(x_0) \;\; -\tau_g(x_0)q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|)$$
$$-\tau_g{}'(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$-\tau_g(x_0)(\left| \kappa_g(x_0)q(x_0) + \kappa_n(x_0)n(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+\left| t(x_0) \;\; \tau_g(x_0)n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|)$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f''_{du}(x_0) = \left(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\,\kappa_n(x_0) \right) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \kappa_g(x_0)$$
$$-\tau_g{}'(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| - \tau_g{}^2(x_0)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| \quad (4.1.15)$$

bulunur. $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = 0$ olması için;

$$\left(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\,\kappa_n(x_0) \right) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \kappa_g(x_0)$$
$$-\tau_g{}'(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| - \tau_g{}^2(x_0)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| = 0$$

olmalıdır. O halde (4.1.15) denkleminde $(\alpha - u)(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f''_{du}(x_0) = \left(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\,\kappa_n(x_0) \right) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$+\kappa_g(x_0) - \tau_g{}'(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$-\tau_g{}^2(x_0)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

bulunur. Denklem düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f''_{du}(x_0) = \left(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) \right) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right| + \kappa_g(x_0)$$
$$-\lambda_3 \tau_g'(x_0)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| - \lambda_2 \tau_g^2(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; q(x_0) \right|$$

elde edilir. Burada $\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| = 1$ olduğundan;

$$f''_{du}(x_0) = \kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0) - \lambda_3\tau_g'(x_0) + \lambda_2\tau_g^2(x_0) \tag{4.1.16}$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0) - \lambda_3\tau_g'(x_0) + \lambda_2\tau_g^2(x_0) = 0$$

olur. Burada $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$ olduğu kullanılırsa;

$$\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0) - \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\tau_g'(x_0) + \lambda_2\tau_g^2(x_0) = 0$$

$$\tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) + \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) + \lambda_2\tau_g^3(x_0) = 0$$

$$\lambda_2\tau_g^3(x_0) = \kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)$$

$$\lambda_2 = \frac{\kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)}{\tau_g^3(x_0)}$$

$$\lambda_2 = \frac{\kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0)}{\tau_g^2(x_0)}\frac{1}{\tau_g(x_0)} - \frac{\kappa_n(x_0)}{\tau_g(x_0)} - \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g^2(x_0)}$$

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right]$$

olarak bulunur. Sonuç olarak bu eşitlik (4.1.13) denkleminde yerine yazılırsa ;

$$\alpha - u = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right]q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0)$$

olarak elde edilir.

($\Leftarrow$): İspat açık.

(3) ($\Rightarrow$) (4.1.15) denkleminin türevi alınırsa;

$$f'''_{du}(x_0) = \Big(\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)\Big) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \Big(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)\Big) (\left| q'(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| q(x_0) \;\; n'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0) \right|) + \kappa_g'(x_0) - \tau_g''(x_0) \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$- \tau_g{}'(x_0)(\left| t'(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; q'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0) \right|) - 2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)(\left| t'(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; n'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|)$$
$$+ \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0) \right|$$

olur. Darboux çatısı denklemleri kullanılırsa;

$$f'''_{du}(x_0) = \Big(\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)\Big) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \Big(\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)\Big) (\left| \tau_g(x_0) n(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| q(x_0) \;\; -\tau_g(x_0) q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|)$$
$$+ \kappa_g'(x_0) - \tau_g''(x_0) \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$- \tau_g{}'(x_0)(\left| \kappa_g(x_0) q(x_0) + \kappa_n(x_0) n(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| t(x_0) \;\; \tau_g(x_0) n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|)$$
$$- 2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$- \tau_g{}^2(x_0)(\left| \kappa_g(x_0) q(x_0) + \kappa_n(x_0) n(x_0) \;\;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left| t(x_0) \;\; -\tau_g(x_0) q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|) + \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; \alpha'(x_0) \right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f'''_{du}(x_0) = (\kappa_g{}''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)) \left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + 2\kappa_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+ \Big(\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0)\Big) \left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$-3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) \left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| \tag{4.1.17}$$

bulunur. $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = 0$ olması için;

$$(\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| + 2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\left(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0) \right) \left| t(x_0) \ \ q(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$-3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left| t(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| = 0$$

olmalıdır. O halde (4.1.17) denkleminde $(\alpha - u)(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f'''_{du}(x_0) = (\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right| + 2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\left(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0) \right) \left| t(x_0) \ \ q(x_0) \ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$- 3\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left| t(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

bulunur. Denklem düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f'''_{du}(x_0) = (\ \kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) \right|$$
$$+2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \lambda_3\left(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0) \right) \left| t(x_0) \ \ q(x_0) \ \ n(x_0) \right|$$
$$-3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\left| t(x_0) \ \ n(x_0) \ \ q(x_0) \right|$$

elde edilir. Burada $\left| t(x_0) \ q(x_0) \ n(x_0) \right| = 1$ olduğundan;

$$f'''_{du}(x_0) = \kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)$$
$$+2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \lambda_3\left(\tau_g^3(x_0) - \tau_g''(x_0) \right) + 3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) \qquad (4.1.18)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0) + 2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\lambda_3\left({\tau_g}^3(x_0) - \tau_g''(x_0)\right) + 3\lambda_2\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) = 0$$

olur. Burada $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$,

$$\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right]$$

olduğu kullanılırsa;

$$\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0){\tau_g}^2(x_0)$$
$$+ 2\kappa_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\left({\tau_g}^3(x_0) - \tau_g''(x_0)\right)$$
$$+ 3\,\frac{\kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) - {\tau_g}^2(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)}{\tau_g^3(x_0)}\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\,\Big| = 0$$

yazılır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\tau_g^3(x_0)\,\kappa_g''(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g^4(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0){\tau_g}^5(x_0)$$
$$+2\tau_g^3(x_0)\kappa_g'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0) + \kappa_g(x_0){\tau_g}^5(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0) - 3\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0)\kappa_g'(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0) = 0$$

bulunur.

(⇐): İspat açık.

(4) (⇒) (4.1.17) denkleminin türevi alınırsa;

$$f^{(4)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g'''(x_0) + 2{\kappa_n}'(x_0){\tau_g}'(x_0) + 2\kappa_n(x_0){\tau_g}''(x_0) + {\tau_g}'(x_0){\kappa_n}'(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0){\kappa_n}''(x_0) + {\kappa_n}'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0))\,\big|\,q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\,\big|$$
$$+\left(\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0){\kappa_n}'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)\right)\left(\big|\,q'(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\,\big|\right.$$
$$\left.+\big|\,q(x_0)\;\; n'(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\,\big| + \big|\,q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)'(x_0)\,\big|\right)$$

$$+ 2\kappa_g''(x_0)+\tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \left(3\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+(\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g''(x_0))\,(\left|t'(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right| + \left|t(x_0)\;\; q'(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)'(x_0)\right|) - \left(3\tau_g'^2(x_0) + 3\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$-3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\,(\left|t'(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right| + \left|t(x_0)\;\; n'(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)'(x_0)\right|)$$

olur. Darboux çatısı denklemleri kullanılırsa;

$$f^{(4)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)+ \kappa_n{}'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+ \left(\kappa_g''(x_0)+ 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)+ \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)\right)\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right|$$
$$+2\kappa_g''(x_0)+\tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0)+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \left(3\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+ \kappa_n(x_0)\left(\tau_g{}^3(x_0) - \tau_g{}''(x_0)\right)\left|n(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+ \left(\tau_g{}^4(x_0) - \tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$- \left(3\tau_g'^2(x_0) + 3\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+ 3\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f^{(4)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g'''(x_0) + 3\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+ \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$-3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right| + (\kappa_g''(x_0)+ 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)+ \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left|q(x_0)\;\; n(x_0)\;\; t(x_0)\right| + 2\kappa_g''(x_0)+\tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; q(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right|$$
$$+ \left(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right)\left|t(x_0)\;\; n(x_0)\;\; (\alpha-u)(x_0)\right| \qquad (4.1.19)$$

bulunur. $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}_{du}(x_0) = 0$ olması için;

$$(\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$-3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| + (\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right| + 2\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right|$$
$$+ \left(\tau_g^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0) \right| = 0$$

olmalıdır. O halde (4.1.19) denkleminde $(\alpha - u)(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$f^{(4)}_{du}(x_0) = (\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$-3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$+(\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right|$$
$$+2\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + (6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0)$$
$$- \tau_g'''(x_0))\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$
$$+ \left(\tau_g^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

bulunur. Denklem düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f^{(4)}_{du}(x_0) = (\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right| + (\kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0))\left| q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0) \right| + 2\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \lambda_3\left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right|$$
$$+\lambda_2\left(\tau_g^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right)\left| t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; q(x_0) \right|$$

elde edilir. Burada $\left| t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; n(x_0) \right| = 1$ olduğundan;

$$f^{(4)}{}_{du}(x_0) = \kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)$$
$$+2\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \lambda_3\left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)$$
$$-\lambda_2\left(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right) \qquad (4.1.20)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak $f'{}_{du}(x_0) = f''{}_{du}(x_0) = f'''{}_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \kappa_g''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n{}'(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_g''(x_0) + \tau_g'(x_0)\,\kappa_n(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\lambda_3\left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right) - \lambda_2\left(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 3\tau_g'^2(x_0)\right) = 0$$

olur. Burada $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right]$ olduğu kullanılırsa,

$$\kappa_g'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \kappa_n'(x_0)\tau_g^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$
$$-3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 3\kappa_g''(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g'(x_0) + 2\,\tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\left(6\tau_g^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g'''(x_0)\right)$$
$$-\frac{\kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)}{\tau_g^3(x_0)}\left(\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) -\right.$$
$$\left.3\tau_g'^2(x_0)\right) = 0$$

yazılır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g'''(x_0) + 3\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g''(x_0) + \tau_g^4(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+ \tau_g^5(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^6(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$+ 3\tau_g^3(x_0)\kappa_g''(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0) + 2\,\tau_g^4(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g^5(x_0)$$

$$- \kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'''(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g{}''(x_0)$$
$$+ 3\kappa_g(x_0)\tau_g'^3(x_0) + \tau_g^5(x_0)\kappa_g'(x_0) - 4\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g'^2(x_0)$$
$$+ \kappa_n(x_0)\tau_g^6(x_0) - 3\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'^2(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^5(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0) = 0$$

bulunur.

(⇐): İspat açık.

(5) (⇒) (4.1.19) denkleminin türevi alınırsa;

$$f^{(5)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g^{(4)}(x_0) + 3\kappa_n''(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 3\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0)$$
$$+ \tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) + \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0)$$
$$+ 2\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$- 3\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\kappa_g{}'(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)$$
$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0))\left|q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right| + (\kappa_g{}'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$+ 3\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$-\kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))(\left|q'(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right|$$
$$+\left|q(x_0) \;\; n'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right| + \left|q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0)\right|)$$
$$+(\kappa_g{}'''(x_0) + 2\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))\left|q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0)\right|$$
$$+(\kappa_g{}''(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0))(\left|q'(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t(x_0)\right|$$
$$+\left|q(x_0) \;\; n'(x_0) \;\; t(x_0)\right| + \left|q(x_0) \;\; n(x_0) \;\; t'\right|) + 2\kappa_g{}'''(x_0) + \tau_g{}''(x_0)\kappa_n(x_0)$$
$$+\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + (12\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)$$
$$+6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0))\left|t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right|$$
$$+(6\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \tau_g{}'''(x_0))(\left|t'(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right| + \left|t(x_0) \;\; q'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0) \;\; q(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0)\right| + (4\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 4\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0)$$
$$-6\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0))\left|t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right| + (\tau_g{}^4(x_0) - 4\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0)$$
$$-3\tau_g{}'^2(x_0)(\left|t'(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right| + \left|t(x_0) \;\; n'(x_0) \;\; (\alpha - u)(x_0)\right|$$
$$+\left|t(x_0) \;\; n(x_0) \;\; (\alpha - u)'(x_0)\right|$$

olur. Darboux çatısı denklemleri ve determinant özellikleri kullanılıp, ifade düzenlenirse;

$$
\begin{aligned}
&f^{(5)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) \\
&+ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) \ + 4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) \\
&- \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0) - \ 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) \\
&- 7\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| + (2\kappa_g{}'''(x_0) \\
&+ 6\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \ 5\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 2\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) \\
&+ 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))(\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) \right| \\
&+ 2\kappa_g{}'''(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 2\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + (+(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) \\
&+ 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0)\left| t(x_0) \ \ q(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| + \ (10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) \\
&-5\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0) - 10\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\left| t(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| \qquad (4.1.21)
\end{aligned}
$$

bulunur. $f'{}_{du}(x_0) = f''{}_{du}(x_0) = f'''{}_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = f^{(5)}{}_{du}(x_0) = 0$ olması için;

$$
\begin{aligned}
&(\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) \\
&+ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) \ + 4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) \\
&- \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0) - \ 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) \\
&- 7\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| + (2\kappa_g{}'''(x_0) \\
&+ 6\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + \ 5\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 2\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) \\
&+ 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0))(\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) \right| \\
&+ 2\kappa_g{}'''(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 2\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + (+(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) \\
&+ 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0)\left| t(x_0) \ \ q(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| + \ (10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) \\
&-5\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0) - 10\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\left| t(x_0) \ \ n(x_0) \ \ (\alpha - u)(x_0) \right| = 0
\end{aligned}
$$

olmalıdır. O halde (4.1.21) denkleminde $(\alpha - u)(x_0)$ yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
&f^{(5)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0) \\
&+ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) \ + 4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) \\
&- \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0) - \ 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) \\
&- 7\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0))\left| q(x_0) \ \ n(x_0) \ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|
\end{aligned}
$$

$$+(2\kappa_g{'''}(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g{'}(x_0) + 5\kappa_n(x_0)\tau_g{''}(x_0) + 2\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0)$$

$$+ 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0))(\left| q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0) \right|$$

$$+ 2\kappa_g{'''}(x_0) + \kappa_n(x_0)\tau_g{''}(x_0) + 2\tau_g{'}(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + (15\tau_g(x_0)\tau_g{'}^2(x_0)$$

$$+ 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{''}(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0))\left| t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

$$+ (10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{'}(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g{'''}(x_0)$$

$$-10\tau_g{'}(x_0)\tau_g{''}(x_0)\left| t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0) + \lambda_2 q(x_0) + \lambda_3 n(x_0) \right|$$

bulunur. Denklem düzenlenir ve determinant özelliğinden yararlanılırsa;

$$f^{(5)}{}_{du}(x_0) = (\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)$$

$$+ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) + 4\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{'}^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{''}(x_0)$$

$$- \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0) - 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{'}(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0)\kappa_g{'}(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{'}^2(x_0)$$

$$- 7\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{''}(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0) + 2\kappa_g{'''}(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g{'}(x_0)$$

$$+ 5\kappa_n(x_0)\tau_g{''}(x_0) + 2\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0)$$

$$-\kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0))\left| q(x_0)\ \ n(x_0)\ \ t(x_0) \right| + 2\kappa_g{'''}(x_0)$$

$$+\kappa_n(x_0)\tau_g{''}(x_0) + 2\tau_g{'}(x_0)\kappa_n'(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + \lambda_3(15\tau_g(x_0)\tau_g{'}^2(x_0)$$

$$+ 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{''}(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0))\left| t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0) \right|$$

$$+ \lambda_2(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{'}(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g{'''}(x_0) - 10\tau_g{'}(x_0)\tau_g{''}(x_0)\left| t(x_0)\ \ n(x_0)\ \ q(x_0) \right|$$

elde edilir. Burada $\left| t(x_0)\ \ q(x_0)\ \ n(x_0) \right| = 1$ olduğundan;

$$f^{(5)}{}_{du}(x_0) = \kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)$$

$$+ \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n''(x_0) + 4\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{'}^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{''}(x_0)$$

$$- \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0) - 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{'}(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0)\kappa_g{'}(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{'}^2(x_0)$$

$$- 7\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{''}(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0) + 4\kappa_g{'''}(x_0) + 8\kappa_n'(x_0)\tau_g{'}(x_0) + 6\kappa_n(x_0)\tau_g{''}(x_0)$$

$$+ 3\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0) + 2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0)$$

$$- 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{'}(x_0) + \lambda_3(15\tau_g(x_0)\tau_g{'}^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{''}(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0)$$

$$-\tau_g{}^5(x_0)) - \lambda_2(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{'}(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g{'''}(x_0) - 10\tau_g{'}(x_0)\tau_g{''}(x_0)) \qquad (4.1.22)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak,

$f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = f^{(5)}{}_{du}(x_0) = 0$ olması durumunda;

$$\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)$$
$$+4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$-9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)$$
$$+\kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0) + 4\kappa_g{}'''(x_0) + 8\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 6\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$+\lambda_3(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0))$$
$$-\lambda_2\left(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0) - 10\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0)\right) = 0$$

olur. Burada $\lambda_3 = \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}$, $\lambda_2 = -\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)} + \kappa_n(x_0)\right]$ olduğu kullanılırsa,

$$\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g'''(x_0) + \tau_g(x_0)\kappa_n'''(x_0)$$
$$+4\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \kappa_n'(x_0)\tau_g^3(x_0)$$
$$-9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 3\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)$$
$$+\kappa_g(x_0)\tau_g{}^4(x_0) + 4\kappa_g{}'''(x_0) + 8\kappa_n'(x_0)\tau_g{}'(x_0) + 6\kappa_n(x_0)\tau_g{}''(x_0) + 3\tau_g(x_0)\kappa_n''(x_0)$$
$$+2\tau_g{}^2(x_0)\kappa_n'(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0) - \kappa_n(x_0)\tau_g{}^3(x_0) - 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}(15\tau_g(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) + 10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{(4)}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0))$$
$$-\frac{\kappa_g(x_0)\tau_g'(x_0) - \tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0) - \tau_g{}^2(x_0)\kappa_n(x_0) + \kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)}{\tau_g^3(x_0)}(10\tau_g{}^3(x_0)\tau_g{}'(x_0) - 5\tau_g(x_0)\tau_g{}'''(x_0)$$
$$-10\tau_g{}'(x_0)\tau_g{}''(x_0) = 0$$

yazılır. Bu ifade düzenlenirse,

$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g^{(4)}(x_0) + 4\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_n''(x_0) + 6\tau_g^3(x_0)\kappa_n'(x_0)\tau_g''(x_0) + 4\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g'''(x_0)$$
$$+\tau_g^4(x_0)\kappa_n'''(x_0) + \tau_g^5(x_0)\kappa_n''(x_0) + 4\tau_g^4(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_n'(x_0) + 2\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g{}'^2(x_0)$$
$$+2\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g^6(x_0)\kappa_n'(x_0) - 9\kappa_n(x_0)\tau_g{}^5(x_0)\tau_g{}'(x_0)$$
$$+7\tau_g{}^4(x_0)\tau_g{}'(x_0)\kappa_g{}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g^3(x_0)\tau_g{}'^2(x_0) - 7\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g''(x_0)$$

$$+\kappa_g(x_0){\tau_g}^7(x_0)+4\tau_g^3(x_0){\kappa_g}'''(x_0)+\ 8\tau_g^3(x_0)\kappa_n'(x_0){\tau_g}'(x_0)+\ 6\kappa_n(x_0)\tau_g^3(x_0){\tau_g}''(x_0)$$
$$+\ 3\tau_g^4(x_0)\kappa_n''(x_0)+2{\tau_g}^5(x_0)\kappa_n'(x_0)+\ 4\kappa_n(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0)-\kappa_n(x_0){\tau_g}^6(x_0)$$
$$-\ 13\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0)15\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+10{\tau_g}^4(x_0){\tau_g}''(x_0)-\tau_g^2(x_0){\tau_g}^{(4)}(x_0)-{\tau_g}^7(x_0)$$
$$-\ 10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)+5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0)+10\kappa_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$-\ 5\tau_g^2(x_0){\kappa_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0)-10\tau_g(x_0){\kappa_g}'(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0)-10\kappa_n(x_0)\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0)$$
$$+\ 5\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'''(x_0)+10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0)=0$$

elde edilir.

($\Leftarrow$): İspat açık.

Aşağıda asimptotik eğri, jeodezik eğri ve eğrilik çizgisi için tekillik sonuçlarını vereceğiz.

4.1.8. Sonuç

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı asimptotik bir eğri olsun. Bu durumda f_{du} fonksiyonunun tekillikleri aşağıdaki gibidir:

(1) $f'_{du}(x_0)=0 \Leftrightarrow (\alpha-u)(x_0)=t(x_0)+\lambda_2 q(x_0)+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\,n(x_0),\ \lambda_2\in\mathbb{R}$

(2) $f'_{du}(x_0)=f''_{du}(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha-u)(x_0)=t(x_0)-\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)'+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right]q(x_0)+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\,n(x_0)$$

(3) $f'_{du}(x_0)=f''_{du}(x_0)=f'''_{du}(x_0)=0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha-u)(x_0)=t(x_0)-\frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)'+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right]q(x_0)+\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\,n(x_0),$$

$$\tau_g^3(x_0)\ \kappa_g''(x_0)+2\tau_g^3(x_0)\kappa_g'(x_0)+\kappa_g(x_0){\tau_g}^5(x_0)-\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0)-3\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0)\kappa_g'(x_0)+\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0){\tau_g}'(x_0)=0$$

(4) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$$

$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g'''(x_0) + 3\tau_g^3(x_0)\tau_g'(x_0)\kappa_g'(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g'(x_0) + 3\tau_g^3(x_0)\kappa_g''(x_0)$$
$$-\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\kappa_g'''(x_0) - \kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g'(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+ 3\kappa_g(x_0)\tau_g'^3(x_0) + \tau_g^5(x_0)\kappa_g'(x_0) - 4\tau_g^2(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g''(x_0) - 3\tau_g(x_0)\kappa_g'(x_0)\tau_g'^2(x_0)$$
$$-\kappa_g(x_0)\tau_g^5(x_0) + 4\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\kappa_g''(x_0) + 3\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0)\tau_g'^2(x_0) = 0$$

(5) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}_{du}(x_0) = f^{(5)}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow$

$$(\alpha - u)(x_0) = t(x_0) - \frac{1}{\tau_g(x_0)}\left[\left(\frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right)' + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\right] q(x_0) + \frac{\kappa_g(x_0)}{\tau_g(x_0)}\, n(x_0),$$

$$\tau_g^3(x_0)\kappa_g^{(4)}(x_0) + 7{\tau_g}^4(x_0){\tau_g}'(x_0){\kappa_g}'(x_0) - 6\kappa_g(x_0)\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0) - 7\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0)\tau_g''(x_0)$$
$$+\kappa_g(x_0){\tau_g}^7(x_0) + 4\tau_g^3(x_0){\kappa_g}'''(x_0) - 13\kappa_g(x_0)\tau_g^4(x_0){\tau_g}'(x_0) + 15\tau_g^3(x_0){\tau_g}'^2(x_0)$$
$$+10{\tau_g}^4(x_0){\tau_g}''(x_0) - \tau_g^2(x_0){\tau_g}^{(4)}(x_0) - {\tau_g}^7(x_0) - 10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)$$
$$+5\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0) + 10\kappa_g(x_0){\tau_g}'^2(x_0)\tau_g''(x_0) - 5\tau_g^2(x_0){\kappa_g}'(x_0)\tau_g'''(x_0)$$
$$-10\tau_g(x_0){\kappa_g}'(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0) + 5\kappa_g(x_0)\tau_g^2(x_0)\tau_g'''(x_0) +$$
$$10\kappa_g(x_0)\tau_g(x_0){\tau_g}'(x_0){\tau_g}''(x_0) = 0$$

İspat: Eğrimiz asimptotik eğri olduğu için $\kappa_n \equiv 0$ olur. Bu durum 4.1.7 teoreminde yerine yazılırsa yukarıdaki denklemler elde edilir.

4.1.9. Sonuç

$\alpha: I \to G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı jeodezik bir eğri olsun. Bu durumda f_{du} fonksiyonunun tekillikleri aşağıdaki gibidir.

(1) $f'_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0) + \lambda_2 q(x_0),\ \lambda_2 \in \mathbb{R}$

(2) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0)$

(3) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0)$

(4) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0)$

(5) $f'_{du}(x_0) = f''_{du}(x_0) = f'''_{du}(x_0) = f^{(4)}{}_{du}(x_0) = f^{(5)}{}_{du}(x_0) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - u)(x_0) = t(x_0)$
$10\tau_g{}^2(x_0)\tau_g{}''(x_0) - \tau_g{}^{iv}(x_0) - \tau_g{}^5(x_0) = 0$

İspat: Eğrimiz jeodezik eğri olduğu için $\kappa_g = 0$ olur. Bu durum 4.1.7 teoreminde yerine yazılırsa yukarıdaki denklemler elde edilir.

4.1.10. Sonuç

$\alpha: I \rightarrow G^3$ eğrisi $\forall x \in I$ için birim hızlı bir eğrilik çizgisi olsun. Bu durumda f_{du} fonksiyonunun ardışık türevleri sıfırdır.

İspat: Eğrimiz eğrilik çizgisi olduğu için $\tau_g = 0$ olur. Bu durum 4.1.7 teoreminde yerine yazılırsa ardışık türevlerin sıfır olduğu elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, Galile uzayında Darboux çatısına göre tanımlanan bazı fonksiyonların tekillikleri için gerek ve yeter koşullar verildi. Bu koşullar kullanılarak bir yüzey üzerinde jeodezik, eğrilik çizgisi ve asimptotik eğri gibi bazı özel eğriler için sonuçlar elde edildi. Burada incelenen fonksiyonlara benzer fonksiyonlar tanımlanarak tekillik koşulları araştırılıp geometrik karakterizasyonlar verilebilir. Ayrıca bu fonksiyonlar farklı uzaylarda tanımlanıp benzer incelemeler için tekillik koşulları elde edilebilir.

KAYNAKLAR

Arnold, V.I., Gusein-Zade, S. M. and Varchenko, A. N. (1986). *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Boston: Birkhäuser Boston, Inc., 382 s.

Bruce, J.W., Giblin, P.J., and Gibson, C.G. (1981a). On caustics of plane curves. *American Mathematical Monthly,* 88, 651-667.

Bruce, J.W. (1981b). On Singularities, envelopes and elementary differential geometry. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical* Soc., 89, 43-48.

Bruce, J.W. and Giblin, P.J. (1983). Generic geometry. *American Mathematical Monthly*, 90, 529- 561.

Bruce, J.W. and Giblin, P.J. (1992). *Curves and Singularities* (Second Editions). New York: Cambridge University Press. 321 s.

Divjak, B. (2003a). Special curves on ruled surfaces in Galilean and pseudo-Galilean space. *Acta Mathematica Hungarica*, 98 (3), 203-215.

Fidal, D.L. and Giblin, P.J. (1984). Generic 1-parameter families of caustic by reflection in the Plane *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Soc*., 96, 425-432.

Hacısalihoğlu, H.H. (1982). *Diferensiyel Geometri I.* İnönü Ünv. Ankara: Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 270 s.

Hacısalihoğlu, H.H. (1998). *Dönüsümler ve Geometriler.* Ankara: Ankara ünv., Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 326 s.

O'Neill, B. (1966). *Elementary Differantial Geometry*. London: Academic Press Newyork, 411 s.

Röschel, O. (1984). *Die Geometrie des Galileischen Raumes*. PhD. Thesis, Habilitationssch., Inst. Für. Mat . und Angew. Geometrie, 120 s.

Şahin, T. (2010). *Galile uzayında uzaklık fonksiyonu, dayanak fonksiyonu ve tekillikleri*. Doktora tezi, Samsun: Ondokuz Mayız Ünv., 107 s.

Şahin, T. (2013). Intrinsic Equations for a Generalized Relaxed Elastic Line on an Oriented Surface in the Galilean Space. *Acta Mathematica Scientia*, B(33), 701-711.

Yaglom , I.M. (1979). *A Simple Non-Euclidean Geometry and Physical Basis*. Newyork: Springer-Verlag, 307 s.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Ezgi CERİT

Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

Eğitim Derecesi	**Okul/Programı**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Matematik Bölümü	2013

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2020-Halen	Devrek Çaydeğirmeni Çok Programlı Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni
2016-2020	Karaman Çok Programlı Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Sertifikalar

Mental Aritmetik Eğitmenliği

Bilgisayar İşletmenliği

Yabancı Dili

İngilizce