T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR ANTİ-PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Serdar PAŞ

ŞUBAT

BİR ANTİ-PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI

Serdar PAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2021

Serdar PAŞ tarafından hazırlanan "BİR ANTİ-PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Yadigar ŞEKERCİ FIRAT

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Hayati OLĞAR

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 10/02/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Serdar PAŞ

10/02/2021

BİR ANTİ-PERİYODİK SINIR DEĞER PROBLEMİNİN TEMEL ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Serdar PAŞ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında; anti-periyodik sınır-değer-geçiş probleminin temel çözümlerinin asimptotik davranışları araştırılmıştır. Beş bölümden oluşan bu çalışmada birinci bölümde, araştırılan konunun güncelliği, uygulama alanları ile ilgili kısa bilgiler verilmiştir. İkinci bölümde, Sturm-Liouville teorisi ile ilgili literatürde yer alan çalışmalara değinilmiştir. Üçüncü bölümde, bu tez çalışmasında kullanılacak olan temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Dördüncü bölümde anti-periyodik sınır şartları ve geçiş şartları ile birlikte Sturm-Liouville problemi ifade edilerek probleme uygun Hilbert uzayı inşa edilmiştir. Bazı yardımcı başlangıç-değer problemleri incelenerek ele alınan problem için temel çözüm fonksiyonları tanımlanmıştır ve bu temel çözümlerin özdeğer parametresine göre asimptotik davranışı incelenmiştir. Beşinci ve son bölümde ise bu çalışmadan elde edilen sonuçlara değinilmiştir.

Anahtar Kelimeler : Anti-periyodik Sturm - Liouville problemi, özdeğer, özfonksiyon, geçiş şartları.
Sayfa Adedi : 63
Danışman : Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

ASYMPTOTIC BEHAVIOR OF THE FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF AN ANTI-PERIODIC BOUNDARY VALUE PROBLEM

(M. Sc. Thesis)

Serdar PAŞ

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

February 2021

ABSTRACT

In this thesis, asymptotic behavior of fundamental solutions of the anti-periodic boundary-value-transition problem was investigated. In this study which consists of five chapters, In the first part, short information about the actuality and application areas of the researched subject is given. In the second chapter, studies in the literature on Sturm-Liouville theory are mentioned. In the third chapter, the basic definitions and theorems to be used in this thesis work are given. In the fourth chapter, the Sturm-Liouville problem is expressed with the anti-periodic boundary conditions and transition conditions, the Hilbert space corresponding to the problem is established. Basic solution functions were defined for the problem addressed by examining some auxiliary initial value problems and the asymptotic behavior of these basic solutions according to the eigenvalue parameter was examined. In the fifth and last part, the results obtained from this study are mentioned.

Key Words : Anti-periodic Sturm-Liouville problem, eigenvalue, eigenfunction, transition conditions.

Page Number : 63

Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Kadriye AYDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında her türlü bilgisini, desteğini ve tecrübesini benimle paylaşan daima yanımızda durarak karanlık noktalara ışık olan çok değerli danışman hocam Sayın Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR'e ve bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki değerli katkılarından ötürü Sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e en içten saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim.

Hayatım boyunca fedakar bir duruş sergileyerek her zaman yanımda olan ve hayata umut dolu gözlerle bakmamı sağlayan aileme, üzerimde emeği olan bütün hocalarıma teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{L_2[a,b]}$	$[a,b]$ üzerinde ölçülebilir, 2. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{L_p(E)}$	E kümesinde ölçülebilir, p. kuvvetten Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\overline{\boldsymbol{X}}$	X'in kapanışı
$\boldsymbol{T^*}$	T'nin eşleneği
$\boldsymbol{C[a,b]}$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C^n[a,b]}$	$[a,b]$ üzerinde tanımlı n. mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların uzayı
$\boldsymbol{C(I,\mathbb{F})}$	Sürekli $f : I \longrightarrow \mathbb{F}$ (Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) fonksiyonlarının sınıfı
$\boldsymbol{C^1(I,\mathbb{F})}$	Birinci mertebeden sürekli türevlenebilir $f : I \longrightarrow \mathbb{F}$ (Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) fonksiyonlarının sınıfı
$\boldsymbol{C^2(I,\mathbb{F})}$	İkinci mertebeden sürekli türevlenebilir $f : I \longrightarrow \mathbb{F}$ (Burada $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ya da $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) fonksiyonlarının sınıfı
$\boldsymbol{\lVert T\rVert}$	Sınırlı lineer T operatörünün normu
$\boldsymbol{\lVert u\rVert}$	u vektörünün (elemanının) normu
$\boldsymbol{\langle u,v\rangle}$	u ve v'nin iç çarpımı

1. GİRİŞ

Matematiksel fizikte ortaya çıkan birçok problemin çözümü için uygulanan Fourier yöntemi (değişkenlerine ayırma yöntemi) adi diferansiyel denklemler için spektral parametre içeren sınır-değer problemlerinin araştırılmasını gerektirmektedir. Bu özelliklere örnek olarak özdeğer ve özfonksiyonların asimptotiğinin bulunması, Green fonksiyonunun inşa edilmesi vb. gösterilebilir.

Bu tez çalışmasının esas amacı literatürde daha önce araştırılmamış yeni tipten bir anti-periyodik sınır-değer probleminin en temel spektral özelliklerinin incelenmesidir. Araştırılan spektral problemin en esas farklandırıcı özelliği bir iç süreksizlik noktası ile verilmesi ve bu süreksizlik noktasında geçiş şartı içermesidir. Bu nedenle tez çalışmasında incelenen problem klasik Sturm-Liouville problemlerinden farklı olan orijinal bir sınır-değer problemidir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Isı yayılımı probleminin çözümü üzerine çalışmalar yapıldığı sırada ortaya çıkan ve literatürde Sturm-Liouville problemleri (SLP) olarak adlandırılan sınır-değer problemleri ilk kez 19. yüzyılın ilk yarısında C. Sturm ve J. Liouville tarafından tanımlanmış ve incelenmiştir. Matematiksel fizik problemlerinin araştırılması, klasik Sturm-Liouville teorisini ilgi odağı haline getirmiş ve bu teorinin daha da geliştirilmesi ihtiyacı ortaya çıkmıştır.

Örneğin; kristal örgüde iletken elektronun hareketi için basit bir model, periyodik potansiyele sahip zamandan bağımsız Schrödinger denklemi biçiminde ifade edilir. Bu potansiyel, kristal örgüdeki iyonlar ve kristaldeki diğer elektronlardan kaynaklanan kuvvetlerin elektronun hareketi üzerindeki etkisini açıklar. Bu problemin tek boyutlu olduğu düşünülürse elektronun dalga fonksiyonu olan $V(x)$ potansiyeli periyodik bir fonksiyon olmak üzere

$$i\hbar\psi_t = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_{xx} + V(x)\psi \tag{2.1}$$

Schrödinger denklemi elde edilir. Periyodu a ile gösterilirse $V(x+a) = V(x)$ sağlanır. O halde

$$u(x) = \varphi\left(\frac{x}{a}\right), \quad q(x) = \frac{2ma^2}{\hbar}V\left(\frac{x}{a}\right), \quad \lambda = \frac{2mE}{\hbar^2}$$

değişken değişimleri yapıldıktan sonra u normal dalga fonksiyonu, λ enerji parametresi, $q(x+1) = q(x)$ olmak üzere (2.1) Schrödinger denklemi

$$-u'' + q(x)u = \lambda u \tag{2.2}$$

biçimindeki Sturm-Liouville denklemine indirgenir. Schrödinger denkleminin spektrumu genelde süreklidir ve kapalı aralıkların birleşiminden veya boşluklarla ayrılmış bantlardan oluşur. Bu bantların ve boşlukların varlığı, kristallerin iletkenlik özellikleri için önemli etkilere sahiptir. Enerjisi bantlardan birinde bulunan elektronlar kristal boyunca serbestçe hareket ederken enerjisi boşluklardan birinde bulunan elektronlar büyük mesafeler boyunca hareket edemez. Bir kristal, boş olmayan enerji bantları tamamen elektronlarla doluysa bir yalıtkan gibi davranır, bir metal gibi sadece kısmen doldurulmuş enerji bantlarına sahipse (yüzde 10 ile 90 arasında) elektrik iletir. Yarı iletkenler genellikle tam bir valans bandına sahiptir, ancak küçük bir bant boşluğu enerjileri E_g ile termal enerji $k_B T$ aynı düzendedir. Sonuç olarak elektronlar valans bandından boş bir iletim bandına termal olarak uyarılabilir. Daha sonra uyarılmış elektronlar ve valans bandında bıraktıkları delikler elektriği iletirler. Bir boyutlu Schrödinger operatörünün spektrumunu incelemek için periyodik katsayılı lineer adi diferansiyel denklemlere uygulanan Floquet teorisi kullanılır. Floquet teorisi ayrıca adi diferansiyel denklemlerin zaman-periyodik çözümlerinin kararlılığını incelemek için de kullanılır. Denklemdeki $q(x)$ katsayısının periyodikliği çözümlerin periyodik olduğu anlamına gelmez ancak $u(x)$ bir çözüm ise o zaman $u(x+1)$'in de çözüm olduğu anlamına gelir. Örneğin; $u'' + u = 0$ adi diferansiyel denklemi periyodu 1 olan katsayılara sahiptir. Bu denklemin $\cos x$ ve $\sin x$ çözümleri 1-periyodik değildir, ancak $\sin(x+1) = \sin x \cos 1 + \sin 1 \cos x$ ve $\cos(x+1) = \cos x \cos 1 - \sin x \sin 1$ bir çözümdürler. Floquet teorisi perspektifinde $q(x) = 0$ olduğu düşünülürse (2.2) denklemi

$$-u'' = \lambda u$$

şeklindedir. Eğer $\lambda < 0$ ise adi diferansiyel denklemin temel çözüm çifti

$$u_1(x;\lambda) = e^{-\sqrt{-\lambda}x}, \quad u_2(x;\lambda) = e^{\sqrt{-\lambda}x}$$

şeklindedir. Buradan

$$u_1(x+1;\lambda) = e^{-\sqrt{-\lambda}}u_1(x;\lambda), \quad u_2(x+1;\lambda) = e^{\sqrt{-\lambda}}u_2(x;\lambda)$$

elde edilir. Böylece $u_1(x+1;\lambda)$ ve $u_2(x+1;\lambda)$ çözümlerinin

$$u_1(x+1;\lambda) = \alpha_{11}u_1(x;\lambda) + \alpha_{12}u_2(x;\lambda)$$

$$u_2(x+1;\lambda) = \alpha_{21}u_1(x;\lambda) + \alpha_{12}u_2(x;\lambda)$$

biçiminde ifade edildiği görülür. Bu sistemin matrisinin

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

olduğu göz önüne alınırsa $A(\lambda)$ köşegen matrisinin izi $D(\lambda) = 2cosh\sqrt{-\lambda}$ dir.

Eğer $\lambda > 0$ ise $-u'' = \lambda u$ adi diferansiyel denklemin temel çözüm çifti

$$u_1(x;\lambda) = cos(\sqrt{\lambda}x), \quad u_2(x;\lambda) = sin(\sqrt{\lambda}x)$$

şeklindedir. Böylece

$$u_1(x+1;\lambda) = cos(\sqrt{\lambda})u_1(x;\lambda) - sin(\sqrt{\lambda})u_2(x;\lambda)$$

$$u_2(x+1;\lambda) = sin(\sqrt{\lambda})u_1(x;\lambda) + cos(\sqrt{\lambda})u_2(x;\lambda)$$

elde edilir. Burada $D(\lambda) = 2cos\sqrt{\lambda}$ dir. Böylece sürekli spektruma karşılık gelen $0 \leq x < \infty$ için $|D(\lambda)| \leq 2$ dir. Ayrıca $D(\lambda) = 2, \quad \lambda = (2m)^2\pi^2$ olduğunda denklemin iki boyutlu uzayda 1-periyodik çözümleri, $D(\lambda) = -2, \quad \lambda = (2m+1)^2\pi^2$ olduğunda denklemin iki boyutlu uzayda 2-periyodik çözümleri vardır. Sıfır olmayan periyodik potansiyeller için $D(\lambda)$ davranışı benzerdir ancak yerel maksimum değerleri genel olarak 2 den büyük ve yerel minimum değerleri genel olarak -2 den küçüktür. Bu durum boşluklarla ayrılmış, sürekli spektrum bantları olan bir yapıya yol açar. Özel olarak periyodik bir $q(x)$ potansiyeli verildiğinde iki yardımcı özdeğer problemi ortaya konmaktadır.

Şimdi

$$-u^{''} + q(x)u = \lambda u$$

$$u(0) = u(1), \quad u^{'}(0) = u^{'}(1)$$

biçimindeki sınır-değer problemi (SDP) göz önüne alınsın. Bu regüler Sturm-Liouville özdeğer problemidir ve spektrumu $n \to \infty$ için $\lambda_n \to \infty$ olmak üzere

$$\lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots$$

gibi sonsuz bir reel özdeğerler dizisinden oluşur. Burada iki katlı özdeğerler varsa diziye iki kez dahil edilir.

Diğer taraftan

$$-u^{''} + q(x)u = \mu u$$

$$u(0) = -u(1), \quad u^{'}(0) = -u^{'}(1)$$

biçimindeki Sturm-Liouville probleminin spektrumu $n \to \infty$ için $\mu_n \to \infty$ olmak üzere

$$\mu_0 \leq \mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots$$

gibi sonsuz bir reel özdeğerler dizisinden oluşur, burada iki katlı herhangi bir özdeğer iki kez yazılmıştır.

1908 yılında George D. Birkhoff yayımlanmış olduğu makalede

$$\frac{d^n y}{dx^n} + \lambda\alpha_{n-1}(x,\lambda)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + \lambda^n\alpha_0(x,\lambda)y = 0$$

formundaki özdeğer parametresine bağlı lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin asimptotik davranışlarını incelemiştir. Birkhoff bu çalışmasında regüler sınır şartları kavramını tanımlamış, probleme uygun diferansiyel operatörün özfonksiyonlarından ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonlardan oluşan sistemin tamlığı hakkında teorem ispatlamıştır [7].

Daha sonra Tamarkin, çalışmasında parametreye bağlı lineer diferansiyel denklemler için temel çözüm sisteminin asimptotiğini bulmuş, regüler sınır şartları ile birlikte güçlü regüler sınır şartları tanımlamış ve bu sınır şartları altında özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlanmış fonksiyonların serisine açılım özelliklerini incelemiştir [24].

Daha sonraki yıllarda fiziğin ortaya koyduğu yeni somut fizik problemlerinin araştırılması diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin hızla gelişmesine yol açmıştır. Günümüzde de Sturm-Liouville problemleri spektral teorinin ihtiyaç duyduğu en güncel konulardan biri olmaya devam etmektedir.

Lee, çalışmasında klasik Sturm-Liouville özdeğer problemi ile ilişkili spektral ve salınım teorisinin periyodik analoglarını sunmuştur [13].

Berghe, Daele ve Meyer, çalışmasında regüler Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri periyodik ve yarı-periyodik sınır koşulları altında araştırılmış ve yaklaşık özdeğerlerin hatasını azaltmak için basit bir lineer bağımlı çok adımlı yöntemin kullanılabileceği gösterilmiştir [6].

Liu, çalışmasında

$$\begin{cases} u^n(s) = f(s, u(s), u(\alpha_1(s)), \cdots, u(\alpha_m(s))) \quad , \quad \text{a.e. } s \in [0, S] \\ \Delta u^i(s_k) = I_{i,k}(u(s_k), \cdots, u^{n-1}(s_k)) \quad , k = 1, \cdots, p \end{cases}$$

n. mertebeden fonksiyonel diferansiyel denkleminin impulse etkileri ve

$$u^n(0) = u^i(S), i = 0, \cdots, n-1$$

periyodik sınır koşulları ile birlikte periyodik sınır değer probleminin çözümleri için varlık problemlerini araştırmıştır. Kullanılan metot Mawhin'in tesadüf derecesi teorisine ve bazı teknik eşitsizliklere dayanmaktadır. Ayrıca ana sonuçları göstermek için örnekler sunulmuştur [14].

Wang, çalışmasında sabit nokta teoremini kullanarak zaman ölçeklerinde impulsive dinamik denklemleri için birinci dereceden periyodik sınır-değer problemlerinin sınıfına ait bir ve iki pozitif çözümünü araştırmıştır. Bu makalede ana sonuçları göstermek için iki örnek verilmiştir [26].

Malathi, Mohamed ve Bachok, makalesinde birinci dereceden adi diferansiyel denklemlerin sistemine indirgenme yapılmadan çekim tekniği kullanılarak doğrudan integrasyon yöntemiyle periyodik Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerleri araştırılmıştır. Bu çalışmada Floquet teorisi, Sturm-Liouville problemlerinin aşikar olmayan bir çözümünü bulmak için uygulanır ve özdeğerlere çekim teknikleri kullanılarak yaklaşılır. Ayrıca doğrudan integrasyon yöntemiyle elde edilen sonuçlar ile birinci dereceden adi diferansiyel denklemlerin azaltılmasıyla karşılaştırılan hesaplama avantajları sunulmaktadır [15].

Boumenir, yayımlamış olduğu makalede Paley-Wiener uzaylarında interpolasyon teknikleri kullanarak periyodik bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin hesaplanması ile ilgilenmiştir. Klasik regüler Sturm-Liouville problemlerinin özdeğerlerini periyodik sınır koşullarıyla hesaplamak için

$$\begin{cases} -u''(t,\mu)+Q(t)u(t,\mu)=\mu^2 u(t,\mu) \qquad t\in[0,\omega] \\ u(0,\mu)=u(\omega,\mu) \ \ \text{ve} \ \ u'(0,\mu)=u'(\omega,\mu) \end{cases} \tag{2.3}$$

şeklinde yeni bir yöntem tanıtmıştır, burada $Q(t) \in L^1(0,\omega)$ dir. Genel olarak (2.3)'ün spektrumunun, ayrılmış sınır koşullarında olduğu gibi basit olmayabileceğini ve bunun büyük bir zorluk olduğunu hatırlatmıştır. Bu durumda sınır fonksiyonunun iyi bilinen Hill diskriminantı olduğu ortaya çıkıyor ve bu yaklaşım için sadece birkaç değere ihtiyaç olduğunu belirtmiştir. Kesme hatasının sayısal tarafta daha yüksek doğruluk sağlayan ve özdeğer ile ilişkili örnekleme noktalarının sayısı arttırılarak en aza indirilebileceğini ifade ederek özdeğer eklerinin ve sonuçlarının iyi bilinen Sleign2 koduyla karşılaştırılmasının sağlandığı birkaç örneği incelemiştir. Yöntemin özelliklerinden biri, çift özdeğerlerin yerini bulma olasılığıdır. Gerçekten de kesme hatasını en aza indirgeyerek, yakın özdeğerleri yakınlaştırabileceğini ifade etmiştir. Periyodik Sturm-Liouville operatörünün spektral teorisinin kalbinde yer alan Hill diskriminantı

$$\Delta(\mu) := u_1(\omega,\mu)+u_2'(\omega,\mu)$$

şeklinde tanımlanır. Burada $u_1(t,\mu)$ ve $u_2(t,\mu)$

$$\begin{cases} u_1(0,\mu)=1 \\ u_1^{'}(0,\mu)=0 \end{cases} \quad \text{ve} \quad \begin{cases} u_2(0,\mu)=0 \\ u_2^{'}(0,\mu)=1 \end{cases}$$

şartlarını sağlayan (2.3)'ün iki bağımsız çözümüdür. μ^2 nin (2.3) ile ilişkili bir özdeğer olduğunu ve μ nin $\Delta(\mu) = 2$ denkleminin çözümü olduğunu hatırlatmıştır. Hill diskriminantının interpolasyonu için analitik fonksiyonlar açısından uygun bir temsil bulunması gerektiğini belirtmiştir. Ters spektral teoriden $u_1(t,\mu)$ ve $u_2(t,\mu)$

$$\begin{aligned} u_1(t,\mu) &= \cos t\mu + \int_0^t K_1(t,\eta)\cos\eta\mu d\eta \\ u_2(t,\mu) &= \frac{\sin t\mu}{\mu} + \int_0^t K_2(t,\eta)\frac{\sin\eta\mu}{\mu}d\eta \end{aligned}$$

eşitlikleri ile temsil edilebilir; buradaki K_1 ve K_2 dönüşüm operatörlerinin çekirdeğidir. Q'nun yerel olarak integrallenebilir m tane türevi varsa K_1 ve K_2'nin yerel olarak integrallenebilir $m+1$ tane türevi olduğunu hatırlatarak $m=0$ için bu K_1 ve K_2'nin yerel olarak integrallenebilir olduğunu, K_1 ve K_2'nin sürekli fonksiyonlar olduğunu ifade etmiştir. Lyapunov fonksiyonunun veya (2.3) için Hill diskriminantının K_1 ve K_2 kullanılarak açıklanabileceğini belirtmiştir. Buradan

$$\begin{aligned} \Delta(\mu): &= u_1(\omega,\mu)+u_2^{'}(\omega,\mu) \\ &= 2\cos\omega\mu + K_1(\omega,\omega)\frac{\sin\omega\mu}{\mu} + K_2(\omega,\omega)\frac{\sin\omega\mu}{\mu} \\ &+ \int_0^\omega \left[\frac{\partial}{\partial t}K_2(\omega,\eta)+\frac{\partial}{\partial t}K_1(\omega,\eta)\right]\frac{\sin\eta\mu}{\mu}d\eta. \end{aligned}$$

elde edilir. Aşağıda

$$\begin{aligned} S(\mu) &= \int_0^\omega \left[\frac{\partial}{\partial t}K_2(\omega,\eta)+\frac{\partial}{\partial t}K_1(\omega,\eta)\right]\frac{\sin\eta\mu}{\mu}d\eta \\ q &:= \int_0^\omega |Q(\eta)|d\eta \\ \xi &:= exp\left(c\int_0^\omega \eta|Q(\eta)|d\eta\right) \end{aligned}$$

gösterimlerinden ve

$$\left|\frac{\sin z}{z}\right| \leq c\ \frac{exp(|Imz|)}{1+|z|}$$

eşitsizliğinden yararlandığını belirterek daha sonra Paley-Wiener uzayının

$$PW_\omega = \left\{ F(\mu) \ : \ |F(\mu)| < Me^{\omega|Im\mu|} \ \text{ ve } \ \int_{-\infty}^{\infty} |F(\mu)|^2 d\mu < \infty \right\}$$

eşitliği ile tanımlandığını elde etmiştir.

$$K_1(\omega,\omega) = K_2(\omega,\omega) = \frac{1}{2}\int_0^\omega Q(\eta)d\eta$$

eşitliğini hatırlatarak sonuç olarak

$$\Delta(\mu) := 2\cos\omega\mu + \frac{\sin\omega\mu}{\mu}\int_0^\omega Q(\eta)d\eta + S(\mu)$$

elde edildiğini göstermiştir [8].

Aydemir ve Mukhtarov, çalışmasında iki aralıklı Sturm-Liouville özfonksiyon açılımlarına esas olarak integral denklemler yöntemine dayanan yeni bir yaklaşım sunmuşlardır. Burada Sturm-Liouville problemi bir iç noktada iki tamamlayıcı geçiş şartıyla birlikte ele alınmıştır [1].

Kandemir, çalışmasında lokal olmayan sınır koşulları ve geçiş koşulları ile birlikte süreksiz katsayılı ikinci mertebeden eliptik diferansiyel operatör denklemlerini içeren lokal olmayan sınır-değer problemleri ele alınmıştır [10].

Aydemir ve Mukhtarov, çalışmasında bir iç noktada süreksizliğe sahip olan bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Kendi yaklaşımlarını kullanarak özfonksiyon genişlemelerinin düzgün yakınsaması, Parseval eşitliği, Rayleigh-Ritz formülü, minimax ilkesi ve dikkate alınan sınır-değer-geçiş problemi için özdeğerlerin monotonluğu gibi özellikler araştırılmıştır [2].

Aydemir ve Mukhtarov, makalesinde özdeğer parametresinin sadece denklemde değil, aynı zamanda sınır ve geçiş koşullarında da ortaya çıktığı iki ayrık aralıkta Sturm-Liouville problemlerinin yeni bir sınıfı araştırılmıştır. Özdeğerlerin ve özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Özellikle özdeğerlerin asimptotik davranışı ve karşılık gelen özfonksiyonlar incelenmiştir [3].

Mukhtarov, Olğar, Aydemir ve Jabbarov makalesinde iki ayrık aralıkta Sturm-Liouville denkleminin bir sınır-değer problemi sınıfını süreksizlik noktasındaki ilave geçiş şartlarıyla birlikte incelemiştir. λ spektral parametresi sadece Sturm-Liouville denkleminde değil aynı zamanda sınır koşullarında da bulunmaktadır. Bu sınır-değer problemlerinin operatör-denklem formülasyonu oluşturularak spektral özellikleri araştırılmıştır [22].

Kandemir ve Mukhtarov, çalışmalarında iki ayrık aralıkta sınır geçiş koşulları ile birlikte eliptik diferansiyel-operatör denklemi ele alınmıştır. Sınır geçiş koşullarının, sonlu sayıda iç noktalar ve soyut lineer operatörler içerebileceği belirtilmiştir. Kök fonksiyonları sisteminin ilgili Hilbert uzayında bir Abel bazı oluşturduğu kanıtlanmıştır [12].

Son yıllarda geçiş şartı içeren Sturm-Liouville problemleri [4, 11, 16, 17, 18, 19, 20, 21] vb. çalışmalarında da oldukça geniş ve farklı özellikleri ile araştırılmıştır.

3. GENEL BİLGİLER

Bu kesimde $u(x)$ fonksiyonlarının reel değerli ya da kompleks değerli fonksiyon oldukları kabul edilecektir. Bu nedenle aşağıda $\mathbb{F}$ gösterimi hem $\mathbb{R}$ hem de $\mathbb{C}$ cisimlerini temsil edecek şekilde kullanılacaktır. Ayrıca burada $[a,b]$, (a,b), $[a,b)$, $(a,b]$ aralıklarının her biri ortak I simgesi ile gösterilecektir; burada $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ dur (yani I açık, kapalı, yarı açık, sınırlı veya sınırsız olsun). $C(I,\mathbb{F})$, $C^1(I,\mathbb{F})$, $C^2(I,\mathbb{F})$, $\cdots$ gösterimleri sürekli, birinci mertebeden sürekli türevlenebilir, ikinci mertebeden sürekli türevlenebilir fonksiyonların sınıfları için kullanılacaktır.

Her $i \in \mathbb{N}$ için $C^i(I,\mathbb{F}) \subset C^{i-1}(I,\mathbb{F})$ ve $C^0(I,\mathbb{F}) := C(I,\mathbb{F})$ dir.

3.1. Tanım H, $\mathbb{F}$ (kompleks veya reel) cismi üzerinde tanımlanan bir lineer uzay olsun. $\langle\ ,\ \rangle : H \times H \longrightarrow \mathbb{F}$ fonksiyonu

i. $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{F},\ \forall\ x,y,z \in H$ için $\langle \alpha x + \beta y, z\rangle = \alpha\langle x,z\rangle + \beta\langle y,z\rangle$
ii. $\forall\ x,y \in H$ için $\overline{\langle x,y\rangle} = \langle y,x\rangle$
iii. $\forall\ x \in H$ için $\langle x,x\rangle \geq 0$ ve $\langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

koşullarını sağlıyorsa $\langle\ ,\ \rangle$ fonksiyonuna H lineer uzayı üzerinde bir iç çarpım H'ye de iç çarpım uzayı denir ve $(H,\langle\ ,\ \rangle)$ ile gösterilir [9].

3.2. Tanım $(H,\langle\ ,\ \rangle)$ iç çarpım uzayı olsun. Eğer H, $\forall x \in H$ için $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ iç çarpımdan indirgenen norma göre tam ise H'ye Hilbert uzayı denir [9].

3.3. Tanım $p \in C^1(I,\mathbb{F})$ ve $q \in C(I,\mathbb{F})$ olmak üzere ve

$$(Lu)(x) := \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) - q(x)u(x)$$

$L : C^2(I,\mathbb{F}) \longrightarrow C(I,\mathbb{F})$, $u(x) \mapsto (Lu)(x)$ şeklinde tanımlanan dönüşüme Sturm-Liouville operatörü adı verilir.

3.1. Not Dikkat edilirse $u \in C^2(I,\mathbb{F})$ ise $Lu \in C(I,\mathbb{F})$ olduğu açıktır. L'nin bir lineer operatör olduğu kolayca gösterilebilir.

Gerçekten $\forall u,v \in C^2(I,\mathbb{F})$, $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{F}$ için

$$L(\alpha u + \beta v) = \frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{d(\alpha u + \beta v)}{dx}\right) - q(x)(\alpha u + \beta v)$$

$$L(\alpha u + \beta v) = \alpha L(u) + \beta L(v)$$

elde edilir.

3.4. Tanım $r \in C(I, \mathbb{F})$ olmak üzere $\lambda \in \mathbb{F}$ özdeğer parametresine bağlı

$$Lu + \lambda r u = 0, \quad x \in I \tag{3.1}$$

denklemine Sturm-Liouville denklemi denir.

(3.1) Sturm-Liouville denklemi uygun sınır koşulları ile birlikte Sturm-Liouville problemi (sistemi) olarak adlandırılır.

Aşağıdaki tanımlarda $I = [a, b]$ nin sınırlı veya kapalı aralık; p, q, r reel değerli fonksiyonlar; $p \in C^1(I, \mathbb{R})$, $q, r \in C(I, \mathbb{R})$ ve $u \in C^2(I, \mathbb{F})$ olduğu göz önüne alınacaktır.

3.5. Tanım Bir Sturm-Liouville denkleminde yukarıdaki şartlara ek olarak $\forall\, x \in [a, b]$ için $p(x),\ r(x) > 0$ şartları da sağlanırsa o halde bu denkleme regüler Sturm-Liouville operatörü (veya denklemi) denir.

3.6. Tanım $I = [a, b]$ aralığında verilmiş "L" operatörü regüler Sturm-Liouville operatörü ise

$$Lu + \lambda r u = 0$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u^{'}(a) = 0 \ \ , \ \ \beta_1 u(b) + \beta_2 u^{'}(b) = 0$$

problemine regüler Sturm-Liouville problemi denir. Burada $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ ve $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ dir.

3.7. Tanım $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2 \in \mathbb{R}$, $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0$ ve $\beta_1^2 + \beta_2^2 > 0$ olmak üzere

$$Lu + \lambda r u = 0$$

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u^{'}(a) = 0 \ \ , \ \ \beta_1 u(b) + \beta_2 u^{'}(b) = 0$$

regüler Sturm-Liouville problemi verilsin. Regüler olmayan Sturm-Liouville problemine singüler Sturm-Liouville problemi denir. O halde

i. a ve b noktalarından en az biri sonsuzdur

ii. Herhangi bir $x \in [a, b]$ için $p(x) = 0$ veya $r(x) = 0$

iii. $p(x)$ ve $q(x)$ fonksiyonlarının en az birinin sınır noktalarının en az birinde sonlu limiti yoktur durumlarından en az biri sağlanıyorsa singüler Sturm-Liouville problemi elde edilir.

3.8. Tanım $p \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $q, r \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nin $(b-a)$ periyotlu fonksiyonlar olduğu durumda

$$u(a) = u(b) \ \ , \ \ u^{'}(a) = u^{'}(b)$$

periyodik sınır şartları ile verilen regüler bir Sturm-Liouville denkleminden oluşan probleme periyodik Sturm-Liouville problemi denir (burada u periyodik olarak $[a,b]$ den $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$'ye genişletilebilir).

3.9. Tanım $p \in C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $q, r \in C(\mathbb{R},\mathbb{R})$ nin $(b-a)$ periyotlu fonksiyonlar olduğu durumda

$$u(a) = -u(b) \ \ , \ \ u^{'}(a) = -u^{'}(b)$$

anti-periyodik sınır şartları ile verilen regüler bir Sturm-Liouville denkleminden oluşan probleme anti-periyodik Sturm-Liouville problemi denir (burada u periyodik olarak $[a,b]$ den $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$'ye genişletilebilir).

3.1. Teorem (Lagrange Özdeşliği) $\forall\, u, v \in C^2(I,\mathbb{F})$ için

$$uLv - vLu = \frac{d}{dx}[p(x)W(u,v;x)]$$

eşitliği sağlanır.

Burada $W(u,v;x) = u^{'}v - uv^{'}$ fonksiyonuna Wronskian denir.

İspat

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= u(pv^{'})^{'} - (pu^{'})^{'} + vqu \\ &= (pv^{'}u)^{'} - (pu^{'}v)^{'} \\ &= \frac{d}{dx}[p(uv^{'} - u^{'}v)] \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Lagrange özdeşliğinden kolayca aşağıdaki önemli formül elde edilir.

3.10. Tanım (Green Formülü) $\forall\, u, v \in C^2(I,\mathbb{F})$ için

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = [p(uv^{'} - u^{'}v)]|_a^b = [pW(u,v)]|_a^b$$

eşitliği sağlanır.

3.11. Tanım u ve v aynı homojen sınır şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun.

$$L = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d}{dx}) - q(x), \quad a \leq x \leq b$$

operatörü

$$\langle u, Lv\rangle = \langle Lu, v\rangle \quad \text{yani} \quad \int_a^b (uLv - vLu)dx = 0$$

eşitliğini sağlıyorsa L operatörü kendine eşleniktir denir.

3.2. Teorem $p(a) = p(b),\ I = [a, b]$ olmak üzere $u \in C^2(I, \mathbb{F}),\ p \in C^1(I, \mathbb{R}),\ q, r \in C(I, \mathbb{R})$, her $x \in I$ için $p(x) > 0,\ r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız kompleks parametre olsun.

$$Lu + \lambda ru = 0$$

$$u(a) = u(b) \quad , \quad u^{'}(a) = u^{'}(b)$$

eşitlikleriyle verilen periyodik Sturm-Liouville problemi kendine eşleniktir.

İspat $u,\ v \in C^2(I, \mathbb{F})$ olmak üzere verilen problemin kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart $\int_a^b (uLv - vLu)dx = 0$ olmasıdır.

$$\begin{aligned} Lu &= \frac{d}{dx}(p(x)\frac{du(x)}{dx}) - q(x)u(x) + \lambda r(x)u(x) \\ Lv &= \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dv(x)}{dx}) - q(x)v(x) + \lambda r(x)v(x) \end{aligned}$$

eşitliklerinden Lu ifadesi v ile Lv ifadesi u ile çarpılırsa

$$vLu = pu^{''}v + p^{'}u^{'}v - quv + \lambda ruv$$

$$uLv = puv^{''} + p^{'}uv^{'} - quv + \lambda ruv$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} uLv - vLu &= p(uv^{''} - u^{''}v) + p^{'}(uv^{'} - u^{'}v) \\ &= p(uv^{'} - u^{'}v)^{'} + p^{'}(uv^{'} - u^{'}v) \\ &= [p(uv^{'} - u^{'}v)]^{'} \end{aligned}$$

olduğu görülür. Son eşitlik a 'dan b 'ye integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_a^b (uLv - vLu)dx &= p(uv^{'} - u^{'}v)|_a^b \\ &= p(b)[u(b)v^{'}(b) - u^{'}(b)v(b)] - p(a)[u(a)v^{'}(a) - u^{'}(a)v(a)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada $p(a) = p(b),\ u(a) = u(b),\ u^{'}(a) = u^{'}(b),\ v(a) = v(b),\ v^{'}(a) = v^{'}(b)$ eşitlikleri dikkate alınırsa

$$\int_a^b (uLv - vLu)dx = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

3.12. Tanım λ kompleks parametresine bağlı Sturm-Liouville probleminin herhangi bir aşikar olmayan $u \neq 0$ çözümü varsa λ 'ya bu problemin özdeğeri, u fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon denir.

3.13. Tanım $r \in C(I, \mathbb{R})$ ve $\forall\ x \in I$ için $r(x) > 0$ olsun. $u,\ v \in C(I, \mathbb{F})$ olmak üzere eğer

$$\langle u, v\rangle_r := \int_I u(x)v(x)r(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa u ve v fonksiyonları r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir denir.

3.1. Lemma u_1 ve u_2 periyodik Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonları ise

$$W(u_1, u_2; x) = \begin{vmatrix} u_1(x) & u_1^{'}(x) \\ u_2(x) & u_2^{'}(x) \end{vmatrix}$$

Wronskianı için

$$W(u_1, u_2; a) = W(u_1, u_2; b)$$

eşitliği sağlanır.

3.3. Teorem Periyodik Sturm-Liouville probleminin $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olmak üzere λ_1 ve λ_2 özdeğerlerine karşılık gelen u_1 ve u_2 özfonksiyonları r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir. Yani

$$\langle u_1, u_2\rangle_r := 0$$

dir.

İspat $p(a) = p(b)$ olmak üzere

$$L[u] + \lambda r(x)u = 0$$

$$u(a) = u(b) \quad , \quad u^{'}(a) = u^{'}(b)$$

periyodik Sturm-Liouville problemi göz önüne alınsın. Bu periyodik Sturm-Liouville sınır değer probleminin farklı özdeğerleri λ_1 , λ_2 ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonları sırasıyla u_1 ve u_2 olsun.

Green formülü kullanılarak

$$\int_a^b (u_1 L u_2 - u_2 L u_1)dx = [p(u_1 u_2^{'} - u_1^{'} u_2)]|_a^b = [pW(u_1, u_2)]|_a^b \tag{3.2}$$

yazılabilir. O halde;

$$u_1(a) = u_1(b) \quad , \quad u_1^{'}(a) = u_1^{'}(b)$$

$$u_2(a) = u_2(b) \quad , \quad u_2^{'}(a) = u_2^{'}(b)$$

$$Lu_1 + \lambda_1 r u_1 = 0 \quad , \quad Lu_2 + \lambda_2 r u_2 = 0$$

eşitlikleri yazılabilir. Ayrıca

$$Lu_1 = -\lambda_1 r u_1 \quad , \quad Lu_2 = -\lambda_2 r u_2 \tag{3.3}$$

eşitlikleri (3.2)'nin sol tarafında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\int_a^b (u_1 Lu_2 - u_2 Lu_1)dx &= \int_a^b [u_1(-\lambda_2 r u_2) - u_2(-\lambda_1 r u_1)]dx \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \int_a^b u_1(x) u_2(x) r(x) dx \\
&= (\lambda_1 - \lambda_2) \langle u_1, u_2 \rangle_r
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle_r &= [pW(u_1, u_2)]|_a^b \\
&= p(b)W(u_1, u_2)(b) - p(a)W(u_1, u_2)(a) \\
&= p(b) \begin{vmatrix} u_1(b) & u_1^{'}(b) \\ u_2(b) & u_2^{'}(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} u_1(a) & u_1^{'}(a) \\ u_2(a) & u_2^{'}(a) \end{vmatrix} \\
&= p(b) \begin{vmatrix} u_1(b) & u_1^{'}(b) \\ u_1(b) & u_1^{'}(b) \end{vmatrix} - p(a) \begin{vmatrix} u_1(a) & u_1^{'}(a) \\ u_1(a) & u_1^{'}(a) \end{vmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $(\lambda_1 - \lambda_2)\langle u_1, u_2 \rangle_r = 0$ ve $\lambda_1 \neq \lambda_2$ olduğu için $\langle u_1, u_2 \rangle_r = 0$ olduğu görülür. O halde u_1 ve u_2 özfonksiyonları r ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir.

3.2. Lemma (λ, u) bir özdeğer-özfonksiyon çifti ise $(\overline{\lambda}, \overline{u})$ de bir özdeğer-özfonksiyon çiftidir.

İspat $Lu + \lambda r u = 0$ denkleminde eşitliğin her iki tarafının eşleniği alınırsa;

$$\overline{Lu + \lambda r u} = \overline{0} = 0$$

olur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$L\overline{u} + \overline{\lambda} r \overline{u} = 0$$

olduğu görülür.

3.4. Teorem Periyodik Sturm-Liouville sınır-değer probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat Periyodik Sturm-Liouville sınır-değer probleminin $\lambda \in \mathbb{C}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu u olsun. O halde

$$L[u] + \lambda r(x)u = 0 \quad , \quad u(a) = u(b) \quad , \quad u^{'}(a) = u^{'}(b) \tag{3.4}$$

$$L[\overline{u}] + \overline{\lambda} r(x)\overline{u} = 0 \quad , \quad \overline{u}(a) = \overline{u}(b) \quad , \quad \overline{u}^{'}(a) = \overline{u}^{'}(b) \tag{3.5}$$

yazılabilir. (3.4) eşitliği $\overline{u}$, (3.5) eşitliği u ile çarpılırsa;

$$\overline{u}L[u] + \lambda r(x)u\overline{u} = 0 \tag{3.6}$$

$$uL[\overline{u}] + \overline{\lambda} r(x)u\overline{u} = 0 \tag{3.7}$$

elde edilir. (3.6), (3.7) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılıp düzenlenirse;

$$[p(u^{'}\overline{u} - u\overline{u}^{'})]^{'} + (\lambda - \overline{\lambda})ru\overline{u} = 0 \tag{3.8}$$

eşitliği elde edilir. (3.8) eşitliği a dan b ye integrallenirse;

$$[p(u^{'}\overline{u} - u\overline{u}^{'})]|_a^b = -(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx$$

bulunur. Buradan

$$\begin{aligned} p(b)[u^{'}(b)\overline{u}(b) - u(b)\overline{u}^{'}(b)] - p(a)[u^{'}(a)\overline{u}(a) - u(a)\overline{u}^{'}(a)] \\ = -(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

yazılabilir. (3.4) ve (3.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} p(b)[u^{'}(b)\overline{u}(b) - u(b)\overline{u}^{'}(b)] - p(b)[u^{'}(b)\overline{u}(b) - u(b)\overline{u}^{'}(b)] \\ = -(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \end{aligned}$$

olduğu görülür ve buradan

$$0 = -(\lambda - \overline{\lambda}) \int_a^b r(x)|u(x)|^2 dx \tag{3.9}$$

eşitliği elde edilir. u bir özfonksiyon ve $r > 0$ olduğundan

$$\lambda - \overline{\lambda} = 0 \Rightarrow \lambda = \overline{\lambda}$$

eşitliği bulunur. O halde λ özdeğeri reeldir.

3.14. Tanım L regüler ya da periyodik Sturm-Liouville operatörü olsun.
Regüler durumda L operatörünün tanım bölgesi

$$\begin{aligned} D(L) = \{u \in C^2(I) \ \mid \ & \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u^{'}(a) = 0 \ , \ \beta_1 u(b) + \beta_2 u^{'}(b) = 0 \ , \\ & \alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \ , \ \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0\} \end{aligned} \tag{3.10}$$

periyodik durumda L operatörünün tanım bölgesi

$$D(L) = \{u \in C^2(I) \mid u(a) = u(b) \ , \ u^{'}(a) = u^{'}(b)\} \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlansın.

$L : D(L) \longrightarrow C(I)$ ve $\forall u, v \in D(L)$ olmak üzere eğer $\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle$ eşitliği sağlanıyorsa L operatörü simetriktir denir.

3.3. Lemma Periyodik Sturm-Liouville operatörü simetriktir.

İspat Green formülü yardımıyla; $\forall \ u, v \in D(L)$ olmak üzere

$$\langle u, Lv \rangle - \langle Lu, v \rangle = \int_a^b (uLv - Luv)dx = [p \ (uv^{'} - u^{'}v)]|_a^b = 0$$

olduğu açıktır. O halde (3.11)'den yararlanılırsa

$$\langle u, Lv \rangle = \langle Lu, v \rangle$$

eşitliği elde edilir.

3.2. Not Teorem 3.2, Lemma 3.1, Teorem 3.3, Lemma 3.2, Teorem 3.4, Lemma 3.3'ün hükümleri anti-periyodik Sturm-Liouville problemleri için de geçerlidir. İspatlar tamamen benzerdir. Tezin "4. Bulgular" bölümünde anti-periyodik Sturm-Liouville probleminin bir genelleşmesi araştırılmıştır. Bu genelleşmiş problemin özel bir durumu ($K = 1$ durumu) klasik anti-periyodik Sturm-Liouville problemine dönüştüğü için 3.2, 3.3, 3.4 Teoremlerinin ve de 3.1, 3.2, 3.3 Lemmalarının anti-periyodik durumları "4. Bulgular" bölümündeki uygun teorem ve lemmaların özel durumlarına indirgenmiş olur. Bu nedenle yukarıda bahsedilen Teorem ve Lemmaların ispatları sadece periyodik durumlar için verilmiştir.

3.15. Tanım λ özdeğerine uygun $\forall u_1,\ u_2$ özfonksiyon çifti için

$$u_1 = cu_2$$

olacak biçimde $c \neq 0$ sabiti bulunursa, o halde λ basit özdeğerdir denir.

Örnek: (Özdeğerleri Basit Olmayan Periyodik Sturm-Liouville Problemi)

$$u'' + \lambda u = 0 \quad , \quad I = (-1, 1)$$

$$u(-1) = u(1)$$
$$u'(-1) = u'(1)$$

biçiminde verilen periyodik Sturm-Liouville sınır-değer problemi incelenecektir.

(a) $\lambda < 0$ için; $u'' + \lambda u = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x) = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

şeklindedir. $u(-1) = u(1)$ sınır koşulları genel çözümde yazılırsa;

$$\begin{aligned} Ae^{-\sqrt{-\lambda}} + Be^{\sqrt{-\lambda}} &= Ae^{\sqrt{-\lambda}} + Be^{-\sqrt{-\lambda}} \\ A(e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}}) &= B(e^{-\sqrt{-\lambda}} - e^{\sqrt{-\lambda}}) \\ A &= B \end{aligned}$$

olduğu görülür. O halde

$$u(x) = A(e^{\sqrt{-\lambda}x} + e^{-\sqrt{-\lambda}x}) = 2Acosh\sqrt{-\lambda}x$$

$$u'(x) = 2A\sqrt{-\lambda}sinh\sqrt{-\lambda}x$$

eşitliği elde edilir. $u'(-1) = u'(1)$ sınır koşulları genel çözümde yazılırsa;

$$-2A\sqrt{-\lambda}sinh\sqrt{-\lambda} = 2A\sqrt{-\lambda}sinh\sqrt{-\lambda}$$

$$4A\sqrt{-\lambda}sinh\sqrt{-\lambda} = 0 \ \Rightarrow \ \sqrt{-\lambda} = 0$$

olup $\lambda = 0$ olur. Bu ise $\lambda < 0$ kabulü ile çelişki oluşturuyor. Yani çözüm $\lambda < 0$ biçiminde özdeğer bulunmamaktadır.

(b) $\lambda = 0$ için; $u'' = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x) = Ax + B$$

şeklindedir. $u(-1) = u(1)$ sınır koşulları genel çözümde yazılırsa;

$$-A + B = A + B$$

eşitliğinden $A = 0$ olduğu görülür. $u^{'}(-1) = u^{'}(1)$ sınır koşulları genel çözümde yazılırsa;

$$A = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $u(x) = B,\ B \neq 0$ için bir özfonksiyondur.

$$\|u\|^2 = \int_{-1}^{1} B^2 dx = 2B^2 = 1$$

olduğundan $B = \frac{1}{\sqrt{2}}$ normal özfonksiyondur, yani $(0, \frac{1}{\sqrt{2}})$ normal özdeğer-özfonksiyon çiftidir.

(c) $\lambda > 0$ için; $u^{''} + \lambda u = 0$ diferansiyel denkleminin genel çözümü

$$u(x) = Acos\sqrt{-\lambda}x + Bsin\sqrt{-\lambda}x$$

şeklindedir. $u(-1) = u(1)$ sınır koşulları genel çözümde yazılırsa;

$$\begin{aligned} Acos\sqrt{-\lambda} - Bsin\sqrt{-\lambda} &= Acos\sqrt{-\lambda} - Bsin\sqrt{-\lambda} \\ Bsin\sqrt{-\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$u^{'}(x) = -A\sqrt{-\lambda}sin\sqrt{-\lambda}x + B\sqrt{-\lambda}cos\sqrt{-\lambda}x$$

eşitliğinde $u^{'}(-1) = u^{'}(1)$ sınır koşulları yazılırsa;

$$\begin{aligned} A\sqrt{-\lambda}sin\sqrt{-\lambda} + B\sqrt{-\lambda}cos\sqrt{-\lambda} &= -A\sqrt{-\lambda}sin\sqrt{-\lambda} + B\sqrt{-\lambda}cos\sqrt{-\lambda} \\ A\sqrt{-\lambda}sin\sqrt{-\lambda} &= 0 \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$Bsin\sqrt{-\lambda} = 0 \ \text{ ve } \ A\sqrt{-\lambda}sin\sqrt{-\lambda} = 0$$

olup herhangi $A,\ B \in \mathbb{R}$ için hem A hem de B sıfır olmadığından $sin\sqrt{-\lambda} = 0$ olur ve buradan

$$\forall\ n \in \mathbb{N} \ \text{ için } \ \sqrt{-\lambda} = n\pi$$

şeklindedir. $(n^2\pi^2, Acosn\pi x + Bsinn\pi x)$ özdeğer-özfonksiyon çiftidir. Yani özdeğerler

$$\lambda_0 = 0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n = n^2\pi^2 < \cdots$$

şeklinde olup $n \geq 1$ için λ_n özdeğerine karşılık gelen $cosn\pi x$ ve $sinn\pi x$ lineer bağımsız özfonksiyonları vardır. Bu nedenle özdeğerleri basit değildir.

3.4. Lemma Regüler ya da periyodik Sturm-Liovuille probleminin özdeğerleri artan ve sınırsız bir dizi oluşturur. Yani

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots \quad , \quad \lambda_n \longrightarrow \infty \qquad (n \longrightarrow \infty).$$

3.16. Tanım $[a, b]$ aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için öyle $\rho > 0$ sayısı varsa ki

$$\sum_{p=1}^{s} (b_p - a_p) < \rho$$

olacak biçimde her sonlu sayıda ayrık $(a_1 - b_1),\ (a_2 - b_2), \cdots,\ (a_s - b_s)$ aralıkları için

$$\sum_{p=1}^{s} |f(b_p) - f(a_p)| < \varepsilon$$

olsun. O zaman f fonksiyonuna $[a, b]$ aralığında mutlak süreklidir denir [5].

3.17. Tanım (Weierstrass M Testi) $\sum f_n$, A üzerinde tanımlı fonksiyonların bir serisi olsun.
$\forall\ x \in A$ için $|f_n(x)| \leq a_n$ ve $\sum a_n < \infty$ ise $\sum f_n$ fonksiyonlar serisi A üzerinde düzgün ve mutlak yakınsaktır.

3.18. Tanım (Cauchy İntegral Formülü) Eğer

$$y^{(n)}(x) = f(x)$$

ise o halde

$$y = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} (x - t)^{n-1} f(t) dt + P_{n-1}(x)$$

eşitliği sağlanır. Burada

$$P_{n-1}(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-1} x^{n-1}$$

keyfi $(n - 1)$. mertebeden türevlenebilen polinomdur.

3.19. Tanım $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu ve $z_0 \in \mathbb{C}$ noktası verilsin. Eğer herhangi bir n doğal sayısı için

$$g(z_0) = g^{'}(z_0) = \cdots = g^{(n-1)}(z_0) = 0 \quad , \quad g^{(n)}(z_0) \neq 0$$

ise bu durumda $z = z_0$ noktasına $g(z)$ fonksiyonunun n katlı sıfır yeri denir.

3.20. Tanım Kompleks düzlemin herhangi bir $S \subset \mathbb{C}$ bölgesinde tanımlı olan $\varphi(t),\ \omega(t),$ ve $\mu(t)$ fonksiyonları verilsin. Eğer

$$|\varphi(t)| \leq K|\omega(t)|, \quad t \in S \cap \{t : |t| > L\}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $K > 0,\ L > 0$ sayıları varsa

$$\varphi(t) = O(\omega(t)), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow \infty \tag{3.12}$$

biçiminde yazılır ve bu ifadeye asimptotik eşitlik denir. Eğer,

$$\varphi(t) - \mu(t) = O(\omega(t)), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow \infty$$

ise o halde

$$\varphi(t) = \mu(t) + O(\omega(t)), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow \infty \tag{3.13}$$

yazılır. $t_0 \in S$ olmak üzere eğer $\varphi(t) = \omega(t)\rho(t)$ ve

$$\lim_{t \to t_0, t \in S} \rho(t) = 0$$

olacak şekilde $\rho(t) : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ fonksiyonu mevcutsa

$$\varphi(t) = o(\omega(t)), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow t_0 \tag{3.14}$$

yazılır ve $\varphi(t)$ fonksiyonu t_0 noktasının yakın komşuluğunda $\omega(t)$'ye göre sonsuz küçüktür denir. $\frac{\varphi(t)}{\omega(t)}$ fonksiyonu t_0 noktasının herhangi komşuluğunda sınırlı ise

$$\varphi(t) = O(\omega(t)), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow t_0 \tag{3.15}$$

yazılır. Eğer

$$\lim_{t \to t_0} \frac{\varphi(t)}{\omega(t)} = 1$$

ise

$$\varphi(t) \sim \omega(t), \quad t \in S, \quad t \longrightarrow t_0 \tag{3.16}$$

yazılır. Hangi S bölgesinden bahsedildiği açık şekilde bilinirse $t \in S$ ifadesi yazılmaz.

$\{p_n\},\ \{q_n\}$ ve $\{r_n\}$ reel veya kompleks sayı dizileri verilsin. $\forall n \geq n_0$ için $|p_n| \leq K|q_n|$ sağlanacak şekilde $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ ve $\exists K > 0$ varsa o halde

$$p_n = O(q_n) \tag{3.17}$$

yazılır. $p_n - r_n = O(q_n)$ olduğunda ise bu durum

$$p_n = r_n + O(q_n) \tag{3.18}$$

biçiminde gösterilir. Eğer $p_n = \mu_n q_n,\ \mu_n \longrightarrow 0$ olacak biçimde (μ_n) dizisi varsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{q_n} = 0$$

olduğunda bu

$$p_n = o(q_n) \tag{3.19}$$

biçiminde gösterilir. $p_n - r_n = o(q_n)$ olduğunda ise bu

$$p_n = r_n + o(q_n) \tag{3.20}$$

biçiminde gösterilir. (3.12)-(3.20) şeklindeki formüllere asimptotik formüller denir [25].

3.5. Teorem (Rouche Teoremi) $f(z)$ ve $g(z)$ kompleks fonksiyonları basit ve kapalı bir C yolu üzerinde ve içinde analitik ve C yolu üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ olsun. O halde $f(z) + g(z)$, C içinde $f(z)$ ile aynı sayıda sıfıra sahiptir [23].

4. BULGULAR

Bu bölümde incelenen problem ifade edilecektir. Ardından incelenen sınır-değer-geçiş problemi için uygun Hilbert uzayının ve diferansiyel operatörün kurulması ele alınacaktır.

4.1. Sınır Değer Probleminin İfadesi

Bu çalışmada $L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ Hilbert uzayında

$$Lu := -u^{''}(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad , \quad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{4.1.1}$$

diferansiyel denkleminden;

$$u(-1) = -u(1) \tag{4.1.2}$$

$$u^{'}(-1) = -u^{'}(1) \tag{4.1.3}$$

anti-periyodik sınır şartlarından ve $x = 0$ noktasındaki

$$u(+0) = Ku(-0) \tag{4.1.4}$$

$$u^{'}(+0) = \frac{1}{K}u^{'}(-0) \tag{4.1.5}$$

geçiş şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özellikleri incelenecektir. Burada $q(x)$ fonksiyonu $[-1,0)$ ve $(0,1]$ aralıklarında sürekli, $x = 0$ noktasında ise sonlu $q(\mp 0)$ limit değerlerine sahip olan bir fonksiyon, $K \neq 0$ reel sayı ve λ kompleks özdeğer parametresidir.

4.2. Verilmiş Sınır-Değer-Geçiş Problemine Uygun Hilbert Uzayının ve Diferansiyel Operatörün Kurulması

4.2.1. Tanım $(4.1.1) - (4.1.5)$ ile tanımlanan sınır-değer problemi için $\lambda = \lambda_0$ değerine karşılık gelen sıfırdan farklı u_0 çözümleri varsa $\lambda = \lambda_0$ değeri $(4.1.1) - (4.1.5)$ sınır-değer probleminin özdeğeri olarak adlandırılacaktır.

Bu bölümde $(4.1.1) - (4.1.5)$ ile tanımlanan sınır-değer problemine uygun olan özel bir Hilbert uzayı kurulacak ve bu uzayda verilmiş sınır-değer-geçiş problemi ile aynı özdeğerlere sahip olan lineer operatör kurulacaktır.

$\varphi(x) \in L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ olmak üzere

$$H = \{\varphi(x) \mid \varphi(x) \in L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)\}$$

biçiminde olan lineer uzayda $\varphi(x),\ \omega(x) \in H$ elemanlarının iç çarpımını

$$\langle \varphi(x), \omega(x) \rangle = \int_{-1}^{-0} \varphi(x)\overline{\omega(x)}dx + \int_{+0}^{1} \varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \qquad (4.2.1)$$

eşitliği ile tanımlansın.

4.2.1. Lemma (4.2.1) eşitliği H lineer uzayında bir iç çarpım fonksiyonu tanımlar.

4.2.2. Lemma $H := L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ ile tanımlı $(H, \langle\ ,\ \rangle)$ iç çarpım uzayı Hilbert uzayıdır.

İspat İspat için H uzayından alınan keyfi bir Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.
$((\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}})$ dizisi H'de bir Cauchy dizisi olsun. O halde

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall\ n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için $\|\varphi_n - \varphi_m\|^2 < \varepsilon^2$ yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - \varphi_m\|_H^2 &= \langle \varphi_n - \varphi_m\ ,\ \varphi_n - \varphi_m \rangle_H \\
&= \langle \varphi_n - \varphi_m\ ,\ \varphi_n - \varphi_m \rangle_{L_2(-1,0)} + \langle \varphi_n - \varphi_m\ ,\ \varphi_n - \varphi_m \rangle_{L_2(0,1)} \\
&= \int_{-1}^{-0} (\varphi_n - \varphi_m)\overline{(\varphi_n - \varphi_m)}dx + \int_{+0}^{1} (\varphi_n - \varphi_m)\overline{(\varphi_n - \varphi_m)}dx \\
&= \int_{-1}^{-0} |\varphi_n - \varphi_m|^2 dx + \int_{+0}^{1} |\varphi_n - \varphi_m|^2 dx \\
&= \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(-1,0)}^2 + \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(-1,0)}^2 < \varepsilon^2
\end{aligned}$$

olduğu için

$$\|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(-1,0)}^2 < \varepsilon^2\ ,\ \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_2(0,1)}^2 < \varepsilon^2$$

elde edilir. O halde $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $L_2(-1,0)$ ve $L_2(0,1)$ de bir Cauchy dizisidir. $L_2(-1,0)$ ve $L_2(0,1)$ uzayları tam olduklarından bu uzaylardan alınan herhangi bir Cauchy dizisi yakınsaktır. Böylece;

$$\begin{aligned}
\|\varphi_n - \varphi_l\|_{L_2(-1,0)}^2 &\longrightarrow 0\ ,\ (n \longrightarrow \infty) \\
\|\varphi_n - \varphi_r\|_{L_2(0,1)}^2 &\longrightarrow 0\ ,\ (n \longrightarrow \infty)
\end{aligned}$$

olacak biçimde $\varphi_l \in L_2(-1,0)$ ve $\varphi_r \in L_2(0,1)$ mevcuttur. O halde

$$\widetilde{\varphi} := \begin{cases} \varphi_l \ , & x \in [-1,0) \\ \varphi_r \ , & x \in (0,1] \end{cases} \in H \text{ olmak üzere}$$

$$\|\varphi_n - \widetilde{\varphi}\|_H^2 = \|\varphi_n - \varphi_l\|_{L_2(-1,0)}^2 + \|\varphi_n - \varphi_r\|_{L_2(0,1)}^2 \longrightarrow 0 \ , \ (n \longrightarrow \infty)$$

ifadesi elde edilir. Dolayısıyla bu ifade H'dan alınan $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchy dizisinin yakınsaması demektir.

Şimdi bu uzayda verilmiş sınır-değer-geçiş problemi ile aynı özdeğerlere sahip lineer operatör kurulacaktır.

(4.1.1)-(4.1.5) sınır-değer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonlarına karşılık gelen

$$A : H \longrightarrow H \tag{4.2.2}$$

operatörü

$$\begin{aligned} D(A) = \{ \quad & \varphi \in H \mid \text{sonlu } \varphi(\mp 0) \text{ ve } \varphi'(\mp 0) \text{ limit değerleri mevcuttur,} \\ & \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_1'(x),\ \varphi_2'(x) \text{ fonksiyonları } [-1,0] \text{ ve } [0,1] \\ & \text{aralıklarında mutlak süreklidirler, } -\varphi_1'' + q(x)\varphi_1 \in L_2(-1,0), \\ & -\varphi_2'' + q(x)\varphi_2 \in L_2(0,1),\ \varphi_1(-1) = -\varphi_2(1),\ \varphi_1'(-1) = -\varphi_2'(1), \\ & \varphi_1(0) = K\varphi_2(0),\ \varphi_1'(0) = \frac{1}{K}\varphi_2'(0)\} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

tanım bölgesinde

$$A\varphi := -\varphi'' + q(x)\varphi \tag{4.2.4}$$

eşitliği ile tanımlansın, burada

$$\varphi_1(x) := \begin{cases} \varphi(x) \ , & x \in [-1,0) \\ \varphi(-0) \ , & x = 0 \end{cases} \quad , \quad \varphi_2(x) := \begin{cases} \varphi(x) \ , & x \in (0,1] \\ \varphi(+0) \ , & x = 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyonlardır. Bu operatör (4.1.1) - (4.1.5) sınır-değer probleminin ürettiği lineer operatördür.

4.2.3. Lemma A operatörü lineer operatördür.

(4.1.1) - (4.1.5) sınır-değer problemi

$$A\varphi = \lambda\varphi \tag{4.2.5}$$

biçiminde ifade edilebilir, yani bu eşitlik

$$
\begin{aligned}
-\varphi^{''} + q(x)\varphi &= \lambda\varphi && (4.2.6)\\
\varphi(-1) &= -\varphi(1) && (4.2.7)\\
\varphi^{'}(-1) &= -\varphi^{'}(1) && (4.2.8)\\
\varphi(+0) &= K\varphi(-0) && (4.2.9)\\
\varphi^{'}(+0) &= \frac{1}{K}\varphi^{'}(-0),\ K \neq 0 && (4.2.10)
\end{aligned}
$$

sınır-değer-geçiş problemi biçiminde ifade edilir. Bu ise bu sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerlerinin A operatörünün özdeğerleri ile çakıştığını, özfonksiyonlarının ise A operatörünün özfonksiyonları ile çakıştığını gösterir.

4.2.1. Teorem (4.1.1) - (4.1.5) eşitlikleri ile verilmiş sınır-değer-geçiş probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat (4.1.1) - (4.1.5) sınır-değer-geçiş probleminin λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu u olsun. u nun eşleniği $\overline{u}$, λ nın eşleniği $\overline{\lambda}$, $K \in \mathbb{R}$ olmak üzere (4.1.1) - (4.1.5) ve

$$
\begin{aligned}
-\overline{u}^{''}(x) + q(x)\overline{u}(x) &= \overline{\lambda}\overline{u}(x) && (4.2.11)\\
\overline{u}(-1) &= -\overline{u}(1) && (4.2.12)\\
\overline{u}^{'}(-1) &= -\overline{u}^{'}(1) && (4.2.13)\\
\overline{u}(+0) &= K\overline{u}(-0) && (4.2.14)\\
\overline{u}^{'}(+0) &= \frac{1}{K}\overline{u}^{'}(-0) && (4.2.15)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri sağlanır. (4.1.1) denklemi $\overline{u}$ ile (4.2.11) denklemi u ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
-u^{''}\overline{u} + q(x)u\overline{u} &= \lambda u\overline{u} && (4.2.16)\\
-u\overline{u}^{''} + q(x)u\overline{u} &= \overline{\lambda}u\overline{u} && (4.2.17)
\end{aligned}
$$

eşitlikleri elde edilir. (4.2.16) ve (4.2.17) taraf tarafa çıkartılırsa

$$u\overline{u}^{''} - u^{''}\overline{u} = (\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u} \tag{4.2.18}$$

elde edilir ve $u\overline{u}^{''} - u^{''}\overline{u} = (u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})^{'}$ olduğundan

$$(u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})^{'} = (\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u} \tag{4.2.19}$$

yazılabilir. (4.2.19) -1'den 0'a integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{-0}(u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})^{'}dx &= \int_{-1}^{-0}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \\ (u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})|_{-1}^{-0} &= \int_{-1}^{-0}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \\ u(-0)\overline{u}^{'}(-0) - u^{'}(-0)\overline{u}(-0) &- u(-1)\overline{u}^{'}(-1) + u^{'}(-1)\overline{u}(-1) \\ &= \int_{-1}^{-0}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \end{aligned} \tag{4.2.20}$$

elde edilir. (4.1.2)-(4.1.3) ve (4.2.12)-(4.2.13) eşitlikleri (4.2.20) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(-0)\overline{u}^{'}(-0) - u^{'}(-0)\overline{u}(-0) &- u(1)\overline{u}^{'}(1) + u^{'}(1)\overline{u}(1) \\ &= \int_{-1}^{-0}(\lambda u\overline{u} - \overline{\lambda}u\overline{u})dx \end{aligned} \tag{4.2.21}$$

ifadesi elde edilir. Aynı şekilde (4.2.19) ifadesi 0'dan 1'e integrallenirse

$$\begin{aligned} \int_{+0}^{1}(u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})^{'}dx &= \int_{+0}^{1}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \\ (u\overline{u}^{'} - u^{'}\overline{u})|_{+0}^{1} &= \int_{+0}^{1}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \\ u(1)\overline{u}^{'}(1) - u^{'}(1)\overline{u}(1) &- u(+0)\overline{u}^{'}(+0) + u^{'}(+0)\overline{u}(+0) \\ &= \int_{+0}^{1}(\lambda u\overline{u} - \overline{\lambda}u\overline{u})dx \end{aligned} \tag{4.2.22}$$

elde edilir. (4.1.4)-(4.1.5) ve (4.2.14)-(4.2.15) geçiş şartları kullanılarak ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u(+0) &= Ku(-0) \\ u^{'}(+0) &= \frac{1}{K}u^{'}(-0) \\ \overline{u}(+0) &= K\overline{u}(-0) \\ \overline{u}^{'}(+0) &= \frac{1}{K}\overline{u}^{'}(-0) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler (4.2.22) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} u(1)\overline{u}^{'}(1) - u^{'}(1)\overline{u}(1) &- Ku(-0)\frac{1}{K}\overline{u}^{'}(-0) + \frac{1}{K}u^{'}(-0)K\overline{u}(-0) \\ &= \int_{+0}^{1}(\lambda - \overline{\lambda})u\overline{u}dx \end{aligned} \tag{4.2.23}$$

elde edilir. (4.2.21) ile (4.2.23) taraf tarafa toplanırsa

$$0 = (\lambda - \overline{\lambda}) \left[\int_{-1}^{-0} u\overline{u}dx + \int_{+0}^{1} u\overline{u}dx \right] = (\lambda - \overline{\lambda}) \|u\|_H^2 \tag{4.2.24}$$

eşitliği elde edilir. u özfonksiyonu sıfırdan farklı olduğundan sağ taraftaki $\|u\|_H$ sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla (4.2.24) deki eşitlikten

$$\lambda = \overline{\lambda} \tag{4.2.25}$$

yani λ'nın reel olduğu elde edilir. λ keyfi bir özdeğer olduğundan dolayı verilen problemin bütün özdeğerleri reeldir.

4.2.1. Not Özdeğerler reel olduğu için genelliği bozmadan özfonksiyonların da reel değerli fonksiyonlar olduğu kabul edilecektir.

4.2.2. Teorem (4.1.1) - (4.1.5) sınır-değer-geçiş probleminin iki farklı λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun olan u_m ve u_n özfonksiyonları $H := L_2(-1, 0) \oplus L_2(0, 1)$ Hilbert uzayında ortogonaldirler. Yani;

$$\int_{-1}^{-0} u_m(x)u_n(x)dx + \int_{+0}^{1} u_m(x)u_n(x)dx = 0 \tag{4.2.26}$$

eşitliği sağlanır.

İspat u_m ve u_n sırasıyla λ_m ve λ_n özdeğerlerine uygun özfonksiyonlar olduğundan

$$-u_m'' + q(x)u_m = \lambda_m u_m \tag{4.2.27}$$

$$-u_n'' + q(x)u_n = \lambda_n u_n \tag{4.2.28}$$

eşitlikleri sağlanır. (4.2.27) eşitliği u_n , (4.2.28) eşitliği u_m ile çarpılırsa

$$-u_m'' u_n + q(x)u_m u_n = \lambda_m u_m u_n \tag{4.2.29}$$

$$-u_m u_n'' + q(x)u_m u_n = \lambda_n u_m u_n \tag{4.2.30}$$

elde edilir. (4.2.29) ve (4.2.30) taraf tarafa çıkartılırsa

$$u_m u_n'' - u_m'' u_n = (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n \tag{4.2.31}$$

bulunur. Bu son eşitlik -1'den 0'a integrallenirse ve $u_m u_n'' - u_m'' u_n = (u_m u_n' - u_m' u_n)'$ olduğu dikkate alınırsa

$$(u_m u_n' - u_m' u_n)|_{-1}^{-0} = \int_{-1}^{-0} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} u_m(-0)u_n'(-0) - u_m'(-0)u_n(-0) &- u_m(-1)u_n'(-1) + u_m'(-1)u_n(-1) \\ &= \int_{-1}^{-0} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx \end{aligned} \tag{4.2.32}$$

elde edilir. Problemde verilmiş olan (4.1.2)-(4.1.3) sınır şartlarının u_m ve u_n özfonksiyonları için sağlandığı dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} u_m(-1) = -u_m(1) \quad &, \quad u_m'(-1) = -u_m'(1) \\ u_n(-1) = -u_n(1) \quad &, \quad u_n'(-1) = -u_n'(1) \end{aligned}$$

eşitlikleri sağlanır. Bu eşitlikler (4.2.32) de yazılırsa;

$$\begin{aligned} u_m(-0)u_n'(-0) - u_m'(-0)u_n(-0) &- u_m(1)u_n'(1) + u_m'(1)u_n(1) \\ &= \int_{-1}^{-0} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx \end{aligned} \tag{4.2.33}$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.2.31) eşitliği 0'dan 1'e integrallenirse

$$(u_m u_n' - u_m' u_n)|_{+0}^{1} = \int_{+0}^{1} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx$$

bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} u_m(1)u_n'(1) - u_m'(1)u_n(1) &- u_m(+0)u_n'(+0) + u_m'(+0)u_n(+0) \\ &= \int_{+0}^{1} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx \end{aligned} \tag{4.2.34}$$

yazılabilir. (4.1.4)-(4.1.5) geçiş şartları kullanılarak ve $K \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} u_m(+0) = -Ku_m(-0) \quad &, \quad u_m'(+0) = -\frac{1}{K}u_m'(-0) \\ u_n(+0) = -Ku_n(-0) \quad &, \quad u_n'(+0) = -\frac{1}{K}u_n'(-0) \end{aligned}$$

eşitlikleri yazılabilir. Bu eşitlikler (4.2.34) de kullanılırsa

$$\begin{aligned} u_m(1)u_n'(1) - u_m'(1)u_n(1) &- Ku_m(-0)\frac{1}{K}u_n'(-0) + \frac{1}{K}u_m'(-0)Ku_n(-0) \\ &= \int_{+0}^{1} (\lambda_m - \lambda_n)u_m u_n dx \end{aligned} \tag{4.2.35}$$

elde edilir. (4.2.33) ve (4.2.35) taraf tarafa toplanırsa

$$0 = (\lambda_m - \lambda_n)\left[\int_{-1}^{-0} u_m u_n dx + \int_{+0}^{1} u_m u_n dx\right] \tag{4.2.36}$$

olduğu görülür. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan

$$\int_{-1}^{-0} u_m u_n dx + \int_{+0}^{1} u_m u_n dx = 0$$

elde edilir. Yani;

$$\langle u_m, u_n \rangle = 0$$

dir. Bu ise farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olduğunu ifade eder.

4.3. Problemin Ürettiği A Operatörünün Simetrikliği

4.3.1. Teorem $H := L_2(-1,0) \oplus L_2(0,1)$ Hilbert uzayında (4.2.1)-(4.2.2) ile tanımlı A operatörü simetriktir.

İspat $\forall\ \varphi,\ \omega \in D(A) \subset H,\ \varphi(x) \in H,\ \omega(x) \in H$ alalım. O halde;

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi, \omega \rangle_H &= \int_{-1}^{-0} A\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx + \int_{+0}^{1} A\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&= \int_{-1}^{-0} \Big(-\varphi^{''}(x) + q(x)\varphi(x)\Big)\overline{\omega(x)}dx \\
&\quad + \int_{+0}^{1} \Big(-\varphi^{''}(x) + q(x)\varphi(x)\Big)\overline{\omega(x)}dx \\
&= -\int_{-1}^{-0} \varphi^{''}(x)\overline{\omega(x)}dx + \int_{-1}^{-0} q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&\quad - \int_{+0}^{1} \varphi^{''}(x)\overline{\omega(x)}dx + \int_{+0}^{1} q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \qquad (4.3.1)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Bu ifadedeki $\int_{-1}^{-0} \varphi^{''}(x)\overline{\omega(x)}dx$ integraline kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{-1}^{-0} \varphi^{''}(x)\overline{\omega(x)}dx = \varphi^{'}(x)\overline{\omega(x)}|_{-1}^{-0} - \int_{-1}^{-0} \varphi^{'}(x)\overline{\omega^{'}(x)}dx \qquad (4.3.2)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki integrale de kısmi integrasyon uygulanırsa

$$\int_{-1}^{-0} \varphi^{'}(x)\overline{\omega^{'}(x)}dx = \varphi(x)\overline{\omega^{'}(x)}|_{-1}^{-0} - \int_{-1}^{-0} \varphi(x)\overline{\omega^{''}(x)}dx \qquad (4.3.3)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik (4.3.2) de yazılırsa

$$\int_{-1}^{-0} \varphi^{''}(x)\overline{\omega(x)}dx = \varphi^{'}(x)\overline{\omega(x)}|_{-1}^{-0} - \varphi(x)\overline{\omega^{'}(x)}|_{-1}^{-0} + \int_{-1}^{-0} \varphi(x)\overline{\omega^{''}(x)}dx$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{-0}(-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x))\overline{\omega(x)}dx &= -\varphi'(-0)\overline{\omega(-0)}+\varphi'(-1)\overline{\omega(-1)} \\
&\quad +\varphi(-0)\overline{\omega'(-0)}-\varphi(-1)\overline{\omega'(-1)} \\
&\quad -\int_{-1}^{-0}\varphi(x)\overline{\omega''(x)}dx+\int_{-1}^{-0}q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&= -\int_{-1}^{-0}\varphi(x)\overline{\omega''(x)}dx+\int_{-1}^{-0}q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&\quad +W(\varphi,\overline{\omega};-0)-W(\varphi,\overline{\omega};-1) \\
&= \int_{-1}^{-0}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx \\
&\quad +W(\varphi,\overline{\omega};-0)-W(\varphi,\overline{\omega};-1) \qquad (4.3.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\int_{+0}^{1}(-\varphi''(x)+q(x)\varphi(x))\overline{\omega(x)}dx &= -\varphi'(1)\overline{\omega(1)}+\varphi'(+0)\overline{\omega(+0)} \\
&\quad +\varphi(1)\overline{\omega'(1)}-\varphi(+0)\overline{\omega'(+0)} \\
&\quad -\int_{+0}^{1}\varphi(x)\overline{\omega''(x)}dx+\int_{+0}^{1}q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&= -\int_{+0}^{1}\varphi(x)\overline{\omega''(x)}dx+\int_{+0}^{1}q(x)\varphi(x)\overline{\omega(x)}dx \\
&\quad +W(\varphi,\overline{\omega};1)-W(\varphi,\overline{\omega};+0) \\
&= \int_{+0}^{1}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx \\
&\quad +W(\varphi,\overline{\omega};1)-W(\varphi,\overline{\omega};+0) \qquad (4.3.5)
\end{aligned}$$

bulunur. (4.3.4) ve (4.3.5) eşitlikleri (4.3.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\langle A\varphi,\omega\rangle_H &= \int_{-1}^{-0}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx+\int_{+0}^{1}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx \\
&\quad +W(\varphi,\overline{\omega};-0)-W(\varphi,\overline{\omega};-1)+W(\varphi,\overline{\omega};1)-W(\varphi,\overline{\omega};+0) \qquad (4.3.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$\begin{aligned}
\langle\varphi,A\omega\rangle_H &= \int_{-1}^{-0}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx \\
&\quad + \int_{+0}^{1}\varphi(x)(\overline{-\omega''(x)+q(x)\omega(x)})dx \qquad (4.3.7)
\end{aligned}$$

yazılabilir. (4.3.6) ve (4.3.7) eşitlikleri taraf tarafa çıkartılırsa

$$\begin{aligned} \langle A\varphi, \omega\rangle_H - \langle \varphi, A\omega\rangle_H &= W(\varphi, \overline{\omega}; -0) - W(\varphi, \overline{\omega}; -1) \\ &\quad + W(\varphi, \overline{\omega}; 1) - W(\varphi, \overline{\omega}; +0) \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

elde edilir. $\varphi(x)$ ve $\omega(x)$ fonksiyonları $D(A)$ tanım bölgesinin elemanları olduklarından sınır şartları kullanılırsa

$$\begin{aligned} &\varphi(-0)\overline{\omega'(-0)} - \varphi'(-0)\overline{\omega(-0)} - \varphi(-1)\overline{\omega'(-1)} + \varphi'(-1)\overline{\omega(-1)} \\ &+\varphi(1)\overline{\omega'(1)} - \varphi'(1)\overline{\omega(1)} - \varphi(+0)\overline{\omega'(+0)} + \varphi'(+0)\overline{\omega(+0)} = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\forall\varphi,\ \omega \in D(A)$ için

$$\langle A\varphi, \omega\rangle_H = \langle \varphi, A\omega\rangle_H$$

sağlanır, yani A operatörü simetriktir.

4.4. Bazı Yardımcı Başlangıç-Değer Problemleri ve Çözümleri

Bu bölümde (4.1.1)-(4.1.5) sınır-değer-geçiş problemi ile yakından ilgili olan ve sadece $[-1,0]$ ve $[0,1]$ alt aralıklarında verilmiş bazı yardımcı başlangıç-değer problemleri araştırılacaktır.

4.4.1. Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x) \quad , \quad x \in [-1,0] \tag{4.4.1}$$

$$u(-1) = 1 \tag{4.4.2}$$

$$u'(-1) = 0 \tag{4.4.3}$$

başlangıç-değer probleminin bir tek $\phi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [-1,0]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani $\forall x \in [-1,0]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudur [25].

İspat

$$-u''(x) + q(x)u(x) = \lambda u(x)$$

denklemi

$$u''(x) = (q(x) - \lambda)u(x)$$

şeklinde yazıldıktan sonra art arda iki kez kısmi integrasyon uygulanırsa;

$$\frac{du}{dx} = \int_{-1}^{x} (q(t)u(t) - \lambda u(t))dt + C_0 \ , \ x \in [-1, 0] \tag{4.4.4}$$

$$u(x) = \int_{-1}^{x} ds \int_{-1}^{s} (q(t)u(t) - \lambda u(t))dt + C_0 x + C_1 \ , \ x \in [-1, 0] \tag{4.4.5}$$

bulunur. (4.4.5) ifadesine Cauchy integral formülü uygulandıktan sonra elde edilen ifade düzenlenirse

$$u(x) = \int_{-1}^{x} dt \int_{t}^{x} (q(t)u(t) - \lambda u(t))ds + C_0 x + C_1$$

yani

$$u(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u(t) - \lambda u(t))dt + C_0 x + C_1 \tag{4.4.6}$$

eşitliği elde edilir. (4.4.2)-(4.4.3) başlangıç şartları (4.4.4) ve (4.4.6) ifadesinde yerine yazılırsa;

$$u(-1) = -C_0 + C_1 = 1$$

$$u^{'}(-1) = C_0 = 0$$

olup buradan

$$C_0 = 0 \quad , \quad C_1 = 1$$

elde edilir ve bu değerler (4.4.6) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u(x) = \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u(t) - \lambda u(t))dt + 1 \tag{4.4.7}$$

integral denklemi elde edilir. (4.4.7) integral denklemi ile (4.4.1)-(4.4.3) başlangıç-değer problemi eşdeğerdir. Bu integral denklemine ardışık yaklaşımlar yöntemi uygulanacaktır. Bunun için önce

$$u_n(x,\lambda) = \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u_{n-1}(t) - \lambda u_{n-1}(t))dt + u_0(x,\lambda) \tag{4.4.8}$$

$$u_0(x,\lambda) = 1 \tag{4.4.9}$$

biçiminde tanımlanmış $u_n(x,\lambda)$ dizisi ele alınsın. Bu dizi kullanılarak

$$u_0(x,\lambda) + (u_1(x,\lambda) - u_0(x,\lambda)) + (u_2(x,\lambda) - u_1(x,\lambda)) + \cdots \tag{4.4.10}$$

serisi oluşturulur. $N > 0$ için $|\lambda| \leq N$ olduğunu kabul edilirse $-1 \leq x \leq 0$ için $q(x)$ ve $u(x)$ sürekli fonksiyonlar olduklarından ve de sonlu $q(\mp 0)$ limit değerleri mevcut olduğundan $|q(x)| \leq P$, $|u_0(x)| \leq S$ olacak biçimde sonlu $P > 0$ ve $S > 0$ sayıları mevcuttur. Bu durumda $|u_n(x) - u_{n-1}(x)|$ ifadesini göz önüne alalım.

$n = 1$ için

$$
\begin{aligned}
|u_1(x) - u_0(x)| &= \left| \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u_0(t) - \lambda u_0(t))dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{x} |x-t||q(t)u_0(t) - \lambda u_0(t)|dt \\
&\leq \int_{-1}^{x} |x-t|(|q(t)||u_0(t)| + |\lambda||u_0(t)|)dt \\
&\leq \int_{-1}^{x} (x-t)(P+N)Sdt = (P+N)S \int_{-1}^{x} (x-t)dt \\
&= (P+N)S \left[xt - \frac{t^2}{2} \right] |_{-1}x = (P+N)S \left[x^2 - \frac{x^2}{2} + x + \frac{1}{2} \right] \\
|u_1(x) - u_0(x)| &\leq (P+N)S \frac{(x+1)^2}{2!} \qquad (4.4.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$n = 2$ için

$$
\begin{aligned}
|u_2(x) - u_1(x)| &= \left| \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u_1(t) - \lambda u_1(t))dt \right. \\
&\quad \left. - \int_{-1}^{x} (x-t)(q(t)u_0(t) - \lambda u_0(t))dt \right| \\
&\leq \int_{-1}^{x} |x-t||q(t) - \lambda||u_1(t) - u_0(t)|dt \\
&\leq \int_{-1}^{x} (x-t)(|q(t)| + |\lambda|)(P+N)S \frac{(t+1)^2}{2!} dt \\
&\leq \frac{1}{2} \int_{-1}^{x} (x-t)(P+N)^2 S(t+1)^2 dt \\
&= \frac{(P+N)^2 S}{2} \int_{-1}^{x} ((t^2 + 2t + 1)x - (t^2 + 2t + 1)t)dt \\
&= \frac{(P+N)^2 S}{2} \left[\frac{(x+1)^4}{12} \right] \\
|u_2(x) - u_1(x)| &\leq (P+N)^2 S \frac{(x+1)^4}{4!} \qquad (4.4.12)
\end{aligned}
$$

bulunur. Sonuç olarak $n > 0$ için tümevarım yöntemi uygulanırsa

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq (P+N)^n S \frac{(x+1)^{2n}}{(2n)!} \qquad (4.4.13)$$

eşitsizlikleri elde edilir. $-1 \leq x \leq 0$ olduğundan $(x+1)^{2n} \leq 1$ dir ve buradan

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{(P+N)^n S}{(2n)!} \qquad (4.4.14)$$

olduğu görülür. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P+N)^n S}{(2n)!}$ serisi yakınsak olduğundan (4.4.8)-(4.4.9) biçiminde tanımlanmış $u_n(x,\lambda)$ fonksiyonlar dizisi aracılığıyla oluşturulan

$$\phi_1(x,\lambda) = u_0(x,\lambda) + (u_1(x,\lambda) - u_0(x,\lambda)) + (u_2(x,\lambda) - u_1(x,\lambda)) + \cdots \tag{4.4.15}$$

serisi $x \in [-1,0]$ ve $N > 0$, $|\lambda| < N$ şartlarından hareketle mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca $\{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda| \leq N\}$ bölgesinde (4.4.15) serisinin her bir terimi analitik olduğu için $\phi_1(x,\lambda)$ analitik olur. Bu durumda (4.4.15) serisi x'e göre düzgün yakınsak olduğu için ve ayrıca (4.4.8) ile tanımlanan $u_n(x,\lambda)$ fonksiyonlar dizisinin

$$\begin{aligned} u_p^{'}(x) - u_{p-1}^{'}(x) &= \int_{-1}^{x} (q(t)-\lambda)[u_{p-1}(t) - u_{p-2}(t)]dt \\ u_p^{''}(x) - u_{p-1}^{''}(x) &= (q(x)-\lambda)[u_{p-1}(x) - u_{p-2}(x)] \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri mevcut olduğundan (4.4.15) serisi x değişkenine göre ikinci mertebeden terim terim diferansiyellenebilir ve de

$$\begin{aligned} \phi_1^{''}(x,\lambda) &= \sum_{p=1}^{\infty} [u_p^{''}(x) - u_{p-1}^{''}(x)] \\ &= \sum_{p=1}^{\infty} (q(x)-\lambda)[u_{p-1}(x) - u_{p-2}(x)] \\ &= (q(x)-\lambda)\{u_0(x) + \sum_{p=2}^{\infty} [u_{p-1}(x) - u_{p-2}(x)]\} \\ &= (q(x)-\lambda)\phi_1(x,\lambda) \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

eşitliği sağlanır. Bu sonuç $\phi_1(x,\lambda)$'nın aynı zamanda (4.4.1) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

4.4.1. Not $\phi(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} f(x,s)ds$ olmak üzere

$$\phi^{'}(x) = \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial f}{\partial x} ds + f(x,b(x))b^{'}(x) - f(x,a(x))a^{'}(x)$$

şeklindedir.

4.4.2. Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u^{''}(x) + (q(x)-\lambda)u(x) = 0 \quad , \quad x \in (0,1] \tag{4.4.17}$$

$$u(1) = 1 \tag{4.4.18}$$

$$u^{'}(1) = 0 \tag{4.4.19}$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\phi_2(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve bu çözüm her bir $x \in [0,1]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani $\forall\ x \in [0,1]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudur [25].

4.4.3. Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u^{''}(x) + (q(x) - \lambda)u(x) = 0 \quad , \quad x \in [0,1] \tag{4.4.20}$$

$$u(1) = 0 \tag{4.4.21}$$

$$u^{'}(1) = 1 \tag{4.4.22}$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_2(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonu her bir $x \in [0,1]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani $\forall\ x \in [0,1]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudur [25].

İspat (4.4.20) denklemi için Teorem 4.4.1'deki çözüm yöntemi dikkate alınarak (4.4.6) integral denkleminin aynısı elde edilir. Yani;

$$u(x) = \int_x^1 (x-s)(\lambda - q(s))u(s)ds + C_0 x + C_1 \tag{4.4.23}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$u^{'}(x) = -\int_x^1 (\lambda - q(s))u(s)ds + C_0 \tag{4.4.24}$$

eşitliği bulunur. (4.4.21)-(4.4.22) başlangıç şartları (4.4.23) ve (4.4.24)'de yerine yazılırsa

$$u(1) = C_0 + C_1 = 0$$

$$u^{'}(1) = C_0 = 1$$

olup bu eşitlikler düzenlenirse

$$C_0 = 1 \quad , \quad C_1 = -1$$

elde edilir. Bu değerler (4.4.23) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$u(x) = -\int_x^1 (x-s)(q(s) - \lambda)u(s)ds + x - 1 \tag{4.4.25}$$

integral denklemi elde edilir. (4.4.25) integral denklemi (4.4.20)-(4.4.22) başlangıç-değer problemi ile eşdeğerdir. Bu integral denklemine ardışık yaklaşımlar metodu uygulanacaktır. Bunun için

$$u_n(x,\lambda) = \int_x^1 (x-s)(\lambda - q(s))u_{n-1}(s)ds + u_0(x,\lambda) \tag{4.4.26}$$

$$u_0(x,\lambda) = x - 1 \tag{4.4.27}$$

biçiminde tanımlanmış $u_n(x,\lambda)$ dizisi ele alınsın. Bu dizi kullanılarak

$$u_0(x,\lambda) + (u_1(x,\lambda) - u_0(x,\lambda)) + (u_2(x,\lambda) - u_1(x,\lambda)) + \cdots \tag{4.4.28}$$

serisi oluşturulur. $N > 0$ için $|\lambda| \leq N$

$$P := \max_{s\in[0,1]} |q(s)| \quad , \quad S := \max_{s\in[0,1]} |u_0(s,\lambda)|$$

şartları dikkate alınarak (4.4.26)-(4.4.27) fonksiyonlarının mutlak değerleri incelenecektir. Bu durumda yine Teorem 4.4.1'in ispatına benzer biçimde

$$|u_1(x) - u_0(x)| \leq (P+N)S\frac{(x-1)^2}{2!} \tag{4.4.29}$$

$$|u_2(x) - u_1(x)| \leq (P+N)^2 S\frac{(x-1)^4}{4!} \tag{4.4.30}$$

eşitsizlikleri tümevarım yöntemi kullanılarak

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq (P+N)^n S\frac{(x-1)^{2n}}{(2n)!} \tag{4.4.31}$$

eşitsizlikleri elde edilir. $0 \leq x \leq 1$ olduğundan $(x-1)^{2n} \leq 1$ dir ve buradan

$$|u_n(x) - u_{n-1}(x)| \leq \frac{(P+N)^n S}{(2n)!} \tag{4.4.32}$$

olduğu görülür. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(P+N)^n S}{(2n)!}$ serisi yakınsak olduğundan (4.4.26)-(4.4.27) biçiminde tanımlanmış $u_n(x,\lambda)$ fonksiyonlar dizisi aracılığıyla oluşturulan (4.4.28) serisi $x \in [0,1]$ ve $N > 0$, $|\lambda| \leq N$ şartlarıyla birlikte mutlak ve düzgün yakınsaktır. Ayrıca $\{\lambda \in \mathbb{C} \ : \ |\lambda| \leq N\}$ bölgesinde (4.4.28) serisinin her bir terimi analitik olduğu için $\chi_2(x,\lambda)$ kısmi toplamlar dizisi de analitiktir. (4.4.26) da $n \to \infty$ için limit almakla

$$\chi_2(x,\lambda)) = \int_x^1 (x-s)(\lambda - q(s))u(s)ds + x - 1 \tag{4.4.33}$$

eşitliği bulunur. Ayrıca

$$\chi_2(x,\lambda)) = u_0(x,\lambda) + (u_1(x,\lambda) - u_0(x,\lambda)) + (u_2(x,\lambda) - u_1(x,\lambda)) + \cdots \tag{4.4.34}$$

serisi x'e göre düzgün yakınsak olduğu için ve de $n \geq 2$ için (4.4.26)-(4.4.27) ile tanımlanan $u_n(x,\lambda)$ dizisinin

$$\begin{aligned} u_n^{'}(x) - u_{n-1}^{'}(x) &= \int_x^1 (q(s)-\lambda)[u_{n-1}(s) - u_{n-2}(s)]ds \\ u_n^{''}(x) - u_{n-1}^{''}(x) &= (q(x)-\lambda)[u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)] \end{aligned}$$

birinci ve ikinci türevleri mevcut olduğundan (4.4.28) serisi x değişkenine göre ikinci mertebeden türevlenebilir ve de

$$\begin{aligned} \chi_2^{''}(x,\lambda) &= \sum_{n=1}^{\infty}[u_n^{''}(x) - u_{n-1}^{''}(x)] \\ &= (q(x)-\lambda)\{u_0(x) + \sum_{n=2}^{\infty}[u_{n-1}(x) - u_{n-2}(x)]\} \\ &= (q(x)-\lambda)\chi_2(x,\lambda) \end{aligned} \quad (4.4.35)$$

eşitliği sağlanır. Bu sonuç $\chi_2(x,\lambda)$'nın aynı zamanda (4.4.20) denkleminin bir çözümü olduğunu gösterir. Bu da ispatı tamamlar.

4.4.4. Teorem Her $\lambda \in \mathbb{C}$ için

$$-u^{''}(x) + (q(x)-\lambda)u(x) = 0 \quad , \quad x \in [-1,0] \quad (4.4.36)$$

$$u(-1) = 0 \quad (4.4.37)$$

$$u^{'}(-1) = 1 \quad (4.4.38)$$

eşitlikleri ile tanımlı başlangıç-değer probleminin bir tek $\chi_1(x,\lambda)$ çözümü bulunur ve $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu her bir $x \in [-1,0]$ değeri için λ değişkenine göre bütün kompleks düzlemde analitiktir. Yani $\forall\ x \in [-1,0]$ için λ parametresinin tam fonksiyonudur [25].

4.5. Temel Çözümler ile Eşdeğer Olan İntegral Denklemler

4.5.1. Teorem (4.4.1)-(4.4.3) başlangıç-değer problemi ile tanımlı olan $\phi_1(x,\lambda)$ temel çözümü için

$$\phi_1(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz \quad (4.5.1)$$

$$\phi_1^{'}(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + \int_{-1}^{x} \cos s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz \quad (4.5.2)$$

integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlanır.

İspat (4.4.1) denklemi

$$u^{''} + \lambda u = q(x)u \tag{4.5.3}$$

şeklinde yazılabilir. Bu denklemi homojen diferansiyel denklem gibi kabul ederek bu denklemi çözmek için bazı yardımcı denklemler oluşturulacak ve bunlar çözülecektir.

$$u^{''} + \lambda u = 0$$

diferansiyel denkleminin karakteristik denklemi $r^2 + \lambda = 0$ olup kökleri $r_1 = -\sqrt{\lambda}i,\ r_2 = \sqrt{\lambda}i$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= k_1 e^{-\sqrt{\lambda}i} + k_2 e^{\sqrt{\lambda}i} \\ &= (k_1 + k_2)\cos\sqrt{\lambda}x + (-k_1 + k_2)\sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece denklemin iki lineer bağımsız çözümünün $\cos\sqrt{\lambda}x,\ \sin\sqrt{\lambda}x$ olduğu görülür. Buradan genel çözüm

$$u(x,\lambda) = c_1\cos\sqrt{\lambda}x + c_2\sin\sqrt{\lambda}x \tag{4.5.4}$$

biçimindedir. O halde (4.5.3) denkleminin genel çözümü sabitlerin değişimi metodu kullanılarak

$$u(x,\lambda) = c_1(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + c_2(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \tag{4.5.5}$$

biçiminde aranacaktır. Son eşitliğin x'e göre türevi alınırsa

$$\begin{aligned} u^{'}(x,\lambda) &= c_1^{'}(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x - \sqrt{\lambda}c_1(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \\ &+ c_2^{'}(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

elde edilir. $c_1(x,\lambda)$ ve $c_2(x,\lambda)$ fonksiyonları öyle seçilecek ki

$$c_1^{'}(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x + c_2^{'}(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x = 0 \tag{4.5.6}$$

olsun. Bu takdirde

$$u^{'}(x,\lambda) = -\sqrt{\lambda}c_1(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x + \sqrt{\lambda}c_2(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \tag{4.5.7}$$

yazılır. Yine x'e göre türev alınırsa

$$\begin{aligned} u^{''}(x,\lambda) &= -\sqrt{\lambda}c_1^{'}(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x - \lambda c_1(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \\ &+ \sqrt{\lambda}c_2^{'}(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x - \lambda c_2(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

elde edilir. (4.5.5) ve (4.5.8) eşitlikleri (4.5.3)'de yazılırsa

$$-\sqrt{\lambda}c_1'(x,\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x+\sqrt{\lambda}c_2'(x,\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x=q(x)u \tag{4.5.9}$$

eşitliği bulunur. Buradan (4.5.6) ve (4.5.9) eşitliklerinin oluşturduğu denklem sisteminin çözümünden $c_1'(x,\lambda)$ ve $c_2'(x,\lambda)$ elde edilecektir.

$$c_1'(x,\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin\sqrt{\lambda}x \\ q(x)u & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}x & \sin\sqrt{\lambda}x \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}}=\frac{-\sin\sqrt{\lambda}xq(x)u}{\sqrt{\lambda}} \tag{4.5.10}$$

elde edilir. Bu eşitlik integrallenirse

$$c_1(x,\lambda)=-\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-1}^{x}\sin\sqrt{\lambda}zq(z)u(z)dz+c_1(\lambda) \tag{4.5.11}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$c_2'(x,\lambda)=\frac{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}x & 0 \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x & q(x)u \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda}x & \sin\sqrt{\lambda}x \\ -\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x \end{vmatrix}}=\frac{\cos\sqrt{\lambda}xq(x)u}{\sqrt{\lambda}} \tag{4.5.12}$$

elde edilir. Bu eşitlik integrallenirse

$$c_2(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-1}^{x}\cos\sqrt{\lambda}zq(z)u(z)dz+c_2(\lambda) \tag{4.5.13}$$

elde edilir. (4.5.11) ve (4.5.13) eşitlikleri (4.5.5)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= -\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-1}^{x}\cos\sqrt{\lambda}x\sin\sqrt{\lambda}zq(z)u(z)dz+c_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \\ &\quad +\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-1}^{x}\sin\sqrt{\lambda}x\cos\sqrt{\lambda}zq(z)u(z)dz+c_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned}$$

elde edilir. Son ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} u(x,\lambda) &= \frac{1}{\sqrt{\lambda}}\int_{-1}^{x}\sin\sqrt{\lambda}(x-z)q(z)u(z)dz+c_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \\ &\quad +c_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \end{aligned} \tag{4.5.14}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.5.11) ve (4.5.13) eşitlikleri (4.5.7)'de yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} u'(x,\lambda) &= \int_{-1}^{x} \cos\sqrt{\lambda}(x-z)q(z)u(z)dz - \sqrt{\lambda}c_1(\lambda)\sin\sqrt{\lambda}x \\ &\quad + \sqrt{\lambda}c_2(\lambda)\cos\sqrt{\lambda}x \end{aligned} \tag{4.5.15}$$

elde edilir. (4.5.14) ve (4.5.15) ifadeleri $u(-1,\lambda) = 1$ ve $u'(-1,\lambda) = 0$ başlangıç şartlarını sağlar. Böylece

$$\begin{aligned} u(-1,\lambda) = c_1(\lambda)\cos\sqrt{\lambda} - c_2(\lambda)\sin\sqrt{\lambda} = 1 \\ u'(-1,\lambda) = \sqrt{\lambda}c_1(\lambda)\sin\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}c_2(\lambda)\cos\sqrt{\lambda} = 0 \end{aligned} \tag{4.5.16}$$

lineer denklem sistemi elde edilir. Buradan

$$c_1(x,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -\sin\sqrt{\lambda} \\ 0 & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda}} = \cos\sqrt{\lambda} \tag{4.5.17}$$

$$c_2(x,\lambda) = \frac{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & 1 \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos\sqrt{\lambda} & -\sin\sqrt{\lambda} \\ \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda} & \sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda} \end{vmatrix}} = \frac{-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}\cos^2\sqrt{\lambda} + \sqrt{\lambda}\sin^2\sqrt{\lambda}} = -\sin\sqrt{\lambda} \tag{4.5.18}$$

elde edilir. $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ sabitleri (4.5.14)'de yerine yazılıp düzenlenirse ve $\lambda = s^2$ eşitliği dikkate alınırsa

$$u(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)u(z)q(z)dz \tag{4.5.19}$$

integral denklemi elde edilir. Teorem 4.4.1 gereği $|\lambda| \to \infty$ iken $u(x,\lambda) \to \phi_1(x,\lambda)$ olduğundan (4.5.19) ifadesi

$$\phi_1(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.20}$$

şeklini alır. Bu ise (4.4.1)-(4.4.3) başlangıç-değer probleminin (4.5.20) integral denklemi ile eşdeğer olduğunu gösterir. Böylece (4.5.1) integral denklemi ispatlanmış olur. $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ sabitleri (4.5.15)'de yerine yazılıp düzenlenirse ve $\lambda = s^2$ eşitliği dikkate alınırsa

$$u'(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + \int_{-1}^{x} \cos s(x-z)u(z)q(z)dz \tag{4.5.21}$$

integral denklemi elde edilir. Teorem 4.4.1 gereği $|\lambda| \to \infty$ iken $u(x,\lambda) \to \phi_1(x,\lambda)$ olduğundan (4.5.21) ifadesi

$$\phi_1'(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + \int_{-1}^{x} \cos s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.22}$$

şeklini alır. Bu ise ispatı tamamlar.

4.5.2. Teorem $\phi_2(x,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar. Yani (4.4.17)-(4.4.19) başlangıç-değer problemi ile tanımlı olan $\phi_2(x,\lambda)$ temel çözümü için

$$\phi_2(x,\lambda) = \cos s(x-1) + \frac{1}{s}\int_{x}^{1} \sin s(x-z)\phi_2(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.23}$$

$$\phi_2'(x,\lambda) = -s\sin s(x-1) + \int_{x}^{1} \cos s(x-z)\phi_2(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.24}$$

integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlanır.

4.5.3. Teorem (4.4.20)-(4.4.22) başlangıç-değer problemi ile tanımlı olan $\chi_2(x,\lambda)$ temel çözümü için

$$\chi_2(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin s(x-1) + \frac{1}{s}\int_{x}^{1} \sin s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.25}$$

$$\chi_2'(x,\lambda) = \cos s(x-1) + \int_{x}^{1} \cos s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.26}$$

integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlanır.

4.5.4. Teorem $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlar. Yani (4.4.36)-(4.4.38) başlangıç-değer problemi ile tanımlı olan $\chi_1(x,\lambda)$ temel çözümü için

$$\chi_1(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)\chi_1(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.27}$$

$$\chi_1'(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \int_{-1}^{x} \cos s(x-z)\chi_1(z,\lambda)q(z)dz \tag{4.5.28}$$

integral ve integral-diferansiyel denklemleri sağlanır.

4.6. Temel Çözümlerin Özdeğer Parametresine Göre Asimptotik Davranışı

Bu kesimde $\phi_i(x,\lambda)$ ve $\chi_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ temel çözümlerinin önceki bölümde bulunan eşdeğer olduğu integral ve integral-diferansiyel denklemlerden yararlanarak, bunların λ parametresine göre $|\lambda| \to \infty$ için asimptotik formülleri elde edilecektir.

4.6.1. Teorem $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Ims = t$ olmak üzere $\phi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\phi_1(x,\lambda) &= O\left(exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.1)\\
\phi_1^{'}(x,\lambda) &= O\left(|s|\ exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.2)\\
\phi_1(x,\lambda) &= \cos s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.3)\\
\phi_1^{'}(x,\lambda) &= -s\sin s(x+1) + O\left(exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.4)
\end{aligned}$$

İspat Teorem 4.4.1'den dolayı $\phi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu Teorem 4.5.1'de elde edilen integral denklemin bir çözümüdür. Bu yüzden

$$\phi_1(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)q(z)\phi_1(z,\lambda)dz \qquad (4.6.5)$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $exp(-|t|(x+1))$ ile çarpılır ve

$$exp(-|t|(x+1))\phi_1(x,\lambda) := F_1(x,\lambda) \qquad (4.6.6)$$

gösteriminden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}
F_1(x,\lambda) &= exp(-|t|(x+1))\cos s(x+1)\\
&+ \frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)dz \qquad (4.6.7)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_1(\lambda) := \max_{x\in[-1,0]} |F_1(x,\lambda)|\ ,\ q_1 := \max_{x\in[-1,0]} |q(x)| \qquad (4.6.8)$$

eşitlikleri tanımlanarak (4.6.7) eşitliği incelenirse

$$\begin{aligned}
|F_1(x,\lambda)| &\leq |exp(-|t|(x+1))\cos s(x+1)|\\
&+ \left|\frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)dz\right|\\
&\leq exp(-|t|(x+1))\,|\cos s(x+1)|\\
&+ \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x} |\sin s(x-z)||q(z)|\ exp(-|t|(x+1))|\phi_1(z,\lambda)|dz \qquad (4.6.9)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|\sin p| \leq exp(|Imp|) \text{ ve } |\cos p| \leq exp(|Imp|)$$

olduğundan (4.6.9) ifadesi

$$\begin{aligned}|F_1(x,\lambda)| &\leq exp(-|t|(x+1))\ exp(|t|(x+1)) \\ &+ \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|exp(|t|(x-z))\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|exp(-|t|(z+1))\phi_1(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \qquad (4.6.10)\end{aligned}$$

halini alınır. (4.6.8) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}|F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|F_1(z,\lambda)||q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}F_1(\lambda)|q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\{F_1(\lambda)q_1\} \qquad (4.6.11)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan keyfi $M \in \mathbb{R}^+$ için

$$|F_1(x,\lambda)| \leq M$$

elde edilir. (4.6.6) gösterimi dikkate alınırsa

$$|exp(-|t|(x+1))\phi_1(x,\lambda)| \leq M \Longrightarrow |\phi_1(x,\lambda)| \leq exp(|t|(x+1))M$$

$$\phi_1(x,\lambda) = O\left(exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \qquad (4.6.12)$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.2) asimptotik eşitliğini ispatlanacaktır. Daha önce

$$\phi_1'(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + \int_{-1}^{x}\cos s(x-z)q(z)\phi_1(z,\lambda)dz \qquad (4.6.13)$$

olduğu gösterilmişti. Bu son eşitlik $\frac{1}{|s|}\ exp(-|t|(x+1))$ ile çarpılır ve

$$\frac{1}{|s|}\ exp(-|t|(x+1))\phi_1'(x,\lambda) := F_2(x,\lambda) \qquad (4.6.14)$$

gösteriminden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}F_2(x,\lambda) &= \frac{-s}{|s|}\ exp(-|t|(x+1))\sin s(x+1) \\ &+ \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}\cos s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)dz \qquad (4.6.15)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_2(\lambda) := \max_{x\in[-1,0]}|F_2(x,\lambda)|\ ,\ q_2 := \max_{x\in[-1,0]}|q(x)| \qquad (4.6.16)$$

eşitlikleri tanımlanarak (4.6.15) eşitliği incelenirse

$$\begin{aligned}
|F_2(x,\lambda)| &\leq \left|\frac{-s}{|s|}\ exp(-|t|(x+1))\sin s(x+1)\right| \\
&+ \left|\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}\cos s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)dz\right| \\
&\leq exp(-|t|(x+1))\,|\sin s(x+1)| \\
&+ \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|\cos s(x-z)||q(z)|\ exp(-|t|(x+1))|\phi_1(z,\lambda)|dz \quad (4.6.17)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|\sin p| \leq exp(|Imp|) \text{ ve } |\cos p| \leq exp(|Imp|)$$

olduğundan (4.6.17) ifadesi

$$\begin{aligned}
|F_2(x,\lambda)| &\leq exp(-|t|(x+1))\ exp(|t|(x+1)) \\
&+ \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|exp(|t|(x-z))\ exp(-|t|(x+1))\phi_1(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \\
|F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|exp(-|t|(z+1))\phi_1(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \quad (4.6.18)
\end{aligned}$$

halini alır. (4.6.16) eşitliği ve $\phi_1(z,\lambda) \leq exp(|t|(z+1))M,\ M \in \mathbb{R}^+$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}
|F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x}|exp(-|t|(z+1))\ exp(|t|(z+1))M|\,|q(z)|dz \\
|F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}M\int_{-1}^{x}|q(z)|dz \\
|F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}Mq_2 \quad (4.6.19)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan keyfi $m \in \mathbb{R}^+$ için

$$|F_2(x,\lambda)| \leq m$$

elde edilir. (4.6.14) gösterimi dikkate alınırsa

$$\left|\frac{1}{|s|}\ exp(-|t|(x+1))\phi_1'(x,\lambda)\right| \leq m \Longrightarrow |\phi_1'(x,\lambda)| \leq |s|\ exp(|t|(x+1))m$$

$$\phi_1{}'(x,\lambda) = O\left(|s|\ exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \quad (4.6.20)$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.3) asimptotik eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\phi_1(x,\lambda) = \cos s(x+1) + \frac{1}{s}\int_{-1}^{x}\sin s(x-z)q(z)\phi_1(z,\lambda)dz$$

olduğu gösterilmişti.

$$\phi_1(x,\lambda) = O\left(exp(|t|(x+1))\right) \ , \ |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gereği

$$\phi_1(x,\lambda) = M_0 \ exp(|t|(x+1))$$

olacak şekilde x ve λ'dan bağımsız $M_0 > 0$ sabiti mevcuttur ve

$$q_3 := \max_{x\in[-1,0]} |q(x)|$$

ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz\right| &\leq \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x} |\sin s(x-z)||\phi_1(z,\lambda)||q(z)|dz \\
&\leq \frac{1}{|s|}\int_{-1}^{x} exp(|t|(x-z))M_0 \ exp(|t|(z+1))|q(z)|dz \\
&\leq M_0\frac{1}{|s|} \ exp(|t|(x+1))\int_{-1}^{x}|q(z)|dz \\
&\leq M_0 q_3\frac{1}{|s|} \ exp(|t|(x+1))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{s}\int_{-1}^{x} \sin s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz = O\left(\frac{1}{|s|} \ exp(|t|(x+1))\right) \tag{4.6.21}$$

eşitliği bulunur. (4.6.21) eşitliği $\phi_1(x,\lambda)$ integral denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\phi_1(x,\lambda) = \cos s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|} \ exp(|t|(x+1))\right) \ , \ |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.22}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.4) asimptotik eşitliğini ispatlanacaktır. Daha önce

$$\phi_1'(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + \int_{-1}^{x} \cos s(x-z)q(z)\phi_1(z,\lambda)dz$$

olduğu gösterilmişti.

$$\phi_1(x,\lambda) = O\left(exp(|t|(x+1))\right) \ , \ |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gereği

$$\phi_1(x,\lambda) = M_1 \ exp(|t|(x+1))$$

olacak şekilde x ve λ'dan bağımsız $M_1 > 0$ sabiti mevcuttur ve

$$q_4 := \max_{x\in[-1,0]} |q(x)|$$

ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\left|\int_{-1}^{x} \cos s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz\right| &\leq \int_{-1}^{x} |\cos s(x-z)||\phi_1(z,\lambda)||q(z)|dz \\
&\leq \int_{-1}^{x} exp(|t|(x-z))M_1\ exp(|t|(z+1))|q(z)|dz \\
&\leq M_1\ exp(|t|(x+1))\int_{-1}^{x} |q(z)|dz \\
&\leq M_1 q_4\ exp(|t|(x+1))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{-1}^{x} \cos s(x-z)\phi_1(z,\lambda)q(z)dz = O\left(exp(|t|(x+1))\right) \tag{4.6.23}$$

eşitliği bulunur. (4.6.23) eşitliği $\phi_1'(x,\lambda)$ integral denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\phi_1'(x,\lambda) = -s\sin s(x+1) + O\left(exp(|t|(x+1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.24}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

4.6.2. Teorem $\lambda = s^2,\ s = \sigma + it,\ Ims = t$ olmak üzere $\phi_2(x,\lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\phi_2(x,\lambda) &= O\left(exp(|t|(x-1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.25)\\
\phi_2'(x,\lambda) &= O\left(|s|\ exp(|t|(x-1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.26)\\
\phi_2(x,\lambda) &= \cos s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(x-1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.27)\\
\phi_2'(x,\lambda) &= -s\sin s(x-1) + O\left(exp(|t|(x-1))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.28)
\end{aligned}$$

4.6.3. Teorem $\lambda = s^2,\ s = \sigma + it,\ Ims = t$ olmak üzere $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonu için $0 \leq x \leq 1$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\chi_2(x,\lambda) &= O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty & (4.6.29)\\
\chi_2^{'}(x,\lambda) &= O\left(exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty & (4.6.30)\\
\chi_2(x,\lambda) &= \frac{1}{s}\sin s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty & (4.6.31)\\
\chi_2^{'}(x,\lambda) &= \cos s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty & (4.6.32)
\end{aligned}$$

İspat Teorem 4.4.3'den dolayı $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonu Teorem 4.5.3'de elde edilen integral denklemin bir çözümüdür. Bu yüzden

$$\chi_2(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin s(x-1) + \frac{1}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)q(z)\chi_2(z,\lambda)dz \tag{4.6.33}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik $|s|\ exp(-|t|(1-x))$ ile çarpılır ve

$$|s|\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(x,\lambda) := F_1(x,\lambda) \tag{4.6.34}$$

gösteriminden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned}
F_1(x,\lambda) &= \frac{|s|}{s}\ exp(-|t|(1-x))\sin s(x-1)\\
&+ \frac{|s|}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)dz & (4.6.35)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$F_1(\lambda) := \max_{x\in[0,1]} |F_1(x,\lambda)|\ ,\ q_1 := \max_{x\in[0,1]} |q(x)| \tag{4.6.36}$$

eşitlikleri tanımlanarak (4.6.35) eşitliği incelenirse

$$\begin{aligned}
|F_1(x,\lambda)| &\le \left|\frac{|s|}{s}\ exp(-|t|(1-x))\sin s(x-1)\right|\\
&+ \left|\frac{|s|}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)dz\right|\\
&\le \frac{|s|}{|s|}\ exp(-|t|(1-x))\,|\sin s(x-1)|\\
&+ \frac{|s|}{|s|}\int_x^1 |\sin s(x-z)||q(z)|\ exp(-|t|(1-x))|\chi_2(z,\lambda)|dz & (4.6.37)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$|\sin p| \le exp(|Imp|) \text{ ve } |\cos p| \le exp(|Imp|)$$

olduğundan (4.6.37) ifadesi

$$\begin{aligned} |F_1(x,\lambda)| &\leq exp(-|t|(1-x))\ exp(|t|(1-x)) \\ &+ \int_x^1 |exp(|t|(z-x))\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\int_x^1 |exp(|t|(z-1))\chi_2(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \end{aligned} \tag{4.6.38}$$

halini alınır. (4.6.36) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_x^1 |F_1(z,\lambda)||q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_x^1 F_1(\lambda)|q(z)|dz \\ |F_1(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\{F_1(\lambda)q_1\} \end{aligned} \tag{4.6.39}$$

elde edilir. Buradan keyfi $M \in \mathbb{R}^+$ için

$$|F_1(x,\lambda)| \leq M$$

elde edilir. (4.6.34) gösterimi dikkate alınırsa

$$||s|\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(x,\lambda)| \leq M \Longrightarrow |\chi_2(x,\lambda)| \leq \frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))M$$

$$\chi_2(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.40}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.30) asimptotik eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_2'(x,\lambda) = \cos s(x-1) + \int_x^1 \cos s(x-z)q(z)\chi_2(z,\lambda)dz \tag{4.6.41}$$

olduğu gösterilmişti. Bu son eşitlik $exp(-|t|(1-x))$ ile çarpılır ve

$$exp(-|t|(1-x))\chi_2'(x,\lambda) := F_2(x,\lambda) \tag{4.6.42}$$

gösteriminden yararlanılırsa;

$$\begin{aligned} F_2(x,\lambda) &= exp(-|t|(1-x))\cos s(x-1) \\ &+ \int_x^1 \cos s(x-z)q(z)\ exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)dz \end{aligned} \tag{4.6.43}$$

elde edilir.

$$F_2(\lambda) := \max_{x\in[0,1]} |F_2(x,\lambda)|\ ,\ q_2 := \max_{x\in[0,1]} |q(x)| \tag{4.6.44}$$

eşitlikleri tanımlanarak (4.6.43) eşitliği incelenirse

$$\begin{aligned} |F_2(x,\lambda)| &\leq |exp(-|t|(1-x))\cos s(x-1)| \\ &+ \left|\int_x^1 \cos s(x-z)q(z)\; exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)dz\right| \\ &\leq exp(-|t|(1-x))\,|\cos s(x-1)| \\ &+ \int_x^1 |\cos s(x-z)||q(z)|\; exp(-|t|(1-x))|\chi_2(z,\lambda)|dz \end{aligned} \tag{4.6.45}$$

elde edilir.

$$|\sin p| \leq exp(|Imp|) \text{ ve } |\cos p| \leq exp(|Imp|)$$

olduğundan (4.6.45) ifadesi

$$\begin{aligned} |F_2(x,\lambda)| &\leq exp(-|t|(1-x))\; exp(|t|(1-x)) \\ &+ \int_x^1 |exp(|t|(z-x))\; exp(-|t|(1-x))\chi_2(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \\ |F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\int_x^1 |exp(|t|(z-1))\chi_2(z,\lambda)|\,|q(z)|dz \end{aligned} \tag{4.6.46}$$

halini alır. (4.6.44) eşitliği ve $\chi_2(z,\lambda) \leq \frac{1}{|s|}\; exp(|t|(1-z))M,\; M \in \mathbb{R}^+$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} |F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}\int_x^1 |exp(|t|(z-1))\; exp(|t|(1-z))M|\,|q(z)|dz \\ |F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}M\int_x^1 |q(z)|dz \\ |F_2(x,\lambda)| &\leq 1+\frac{1}{|s|}Mq_2 \end{aligned} \tag{4.6.47}$$

elde edilir. Buradan keyfi $m \in \mathbb{R}^+$ için

$$|F_2(x,\lambda)| \leq m$$

elde edilir. (4.6.42) gösterimi dikkate alınırsa

$$\left|exp(-|t|(1-x))\chi_2'(x,\lambda)\right| \leq m \Longrightarrow |\chi_2'(x,\lambda)| \leq exp(|t|(1-x))m$$

$$\chi_2{}'(x,\lambda) = O\left(exp(|t|(1-x))\right)\;,\; |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.48}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.31) asimptotik eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_2(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin s(x-1)+\frac{1}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)q(z)\chi_2(z,\lambda)dz$$

olduğu gösterilmişti.

$$\chi_2(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gereği

$$\chi_2(x,\lambda) = M_0 \frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))$$

olacak şekilde x ve λ'dan bağımsız $M_0 > 0$ sabiti mevcuttur ve

$$q_3 := \max_{x\in[0,1]} |q(x)|$$

ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz\right| &\leq \frac{1}{|s|}\int_x^1 |\sin s(x-z)||\chi_2(z,\lambda)||q(z)|dz \\
&\leq \frac{1}{|s|^2}\int_x^1\ exp(|t|(z-x))M_0\ exp(|t|(1-z))|q(z)|dz \\
&\leq M_0\frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1-x))\int_x^1 |q(z)|dz \\
&\leq M_0 q_3 \frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1-x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{1}{s}\int_x^1 \sin s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz = O\left(\frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1-x))\right) \tag{4.6.49}$$

eşitliği bulunur. (4.6.49) eşitliği $\chi_2(x,\lambda)$ integral denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\chi_2(x,\lambda) = \frac{1}{s}\sin s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.50}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

Şimdi (4.6.32) asimptotik eşitliği ispatlanacaktır. Daha önce

$$\chi_2^{'}(x,\lambda) = \cos s(x-1) + \int_x^1 \cos s(x-z)q(z)\chi_2(z,\lambda)dz$$

olduğu gösterilmişti.

$$\chi_2(x,\lambda) = O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty$$

asimptotik eşitliği gereği

$$\chi_2(x,\lambda) = M_1 \frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))$$

olacak şekilde x ve λ'dan bağımsız $M_1 > 0$ sabiti mevcuttur ve

$$q_4 := \max_{x\in[0,1]} |q(x)|$$

ile tanımlanırsa

$$\begin{aligned}
\left|\int_x^1 \cos s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz\right| &\leq \int_x^1 |\cos s(x-z)||\chi_2(z,\lambda)||q(z)|dz \\
&\leq \frac{1}{|s|}\int_x^1\ exp(|t|(z-x))M_1 exp(|t|(1-z))|q(z)|dz \\
&\leq M_1\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\int_x^1 |q(z)|dz \\
&\leq M_1 q_4 \frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_x^1 \cos s(x-z)\chi_2(z,\lambda)q(z)dz = O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right) \tag{4.6.51}$$

eşitliği bulunur. (4.6.51) eşitliği $\chi_2'(x,\lambda)$ integral denkleminde yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\chi_2'(x,\lambda) = \cos s(x-1) + O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1-x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty \tag{4.6.52}$$

asimptotik eşitliği elde edilir.

4.6.4. Teorem $\lambda = s^2$, $s = \sigma + it$, $Ims = t$ olmak üzere $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonu için $-1 \leq x \leq 0$ aralığında aşağıdaki asimptotik eşitlikler sağlanır.

$$\begin{aligned}
\chi_1(x,\lambda) &= O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1+x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.53)\\
\chi_1'(x,\lambda) &= O\left(exp(|t|(1+x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.54)\\
\chi_1(x,\lambda) &= \frac{1}{s}\sin s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|^2}\ exp(|t|(1+x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.55)\\
\chi_1'(x,\lambda) &= \cos s(x+1) + O\left(\frac{1}{|s|}\ exp(|t|(1+x))\right)\ ,\ |\lambda| \longrightarrow \infty && (4.6.56)
\end{aligned}$$

4.7. Esas Çözüm Sistemi ve Sınır Fonksiyonunun Asimptotiği

4.7.1. Esas Çözümler ve Sınır Fonksiyonu

Bu kısımda

$$\begin{aligned} Lu &:= -u^{''}+q(x)u=\lambda u, \quad x\in[-1,0)\cup(0,1] && (4.7.1)\\ L_1u &:= u(-1)=-u(1) && (4.7.2)\\ L_2u &:= u^{'}(-1)=-u^{'}(1) && (4.7.3)\\ L_3u &:= u(+0)=Ku(-0) && (4.7.4)\\ L_4u &:= u^{'}(+0)=\frac{1}{K}u^{'}(-0) && (4.7.5) \end{aligned}$$

sınır-değer-geçiş probleminin özdeğer ve özfonksiyonları arasındaki bazı temel bağıntılar incelenecektir. Önceki bölümlerde $\phi_1(x,\lambda)$ ve $\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonlarının $\forall x \in [-1,0]$ için, $\phi_2(x,\lambda)$ ve $\chi_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının ise $\forall x \in [0,1]$ için λ parametresine göre bütün kompleks düzlemde analitik (yani λ parametresinin tam fonksiyonu) olduğu gösterilmişti. Bu fonksiyonlar $[-1,1]$ aralığında sıfırla devamlarına uygun olarak $\widetilde{\phi}_i(x,\lambda)$ ve $\widetilde{\chi}_i(x,\lambda)$ ile gösterilecektir. Yani

$$\widetilde{\phi}_1=\begin{cases}\phi_1, & x\in[-1,0)\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$\widetilde{\phi}_2=\begin{cases}0, & x\in[-1,0)\\ \phi_2, & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$\widetilde{\chi}_1=\begin{cases}\chi_1, & x\in[-1,0)\\ 0, & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$\widetilde{\chi}_2=\begin{cases}0, & x\in[-1,0)\\ \chi_2, & x\in(0,1]\end{cases}$$

ile gösterilecektir. $\phi_i(x,\lambda)$ ve $\chi_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ olmak üzere bu çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni

$$\Delta_i(\lambda)=W(\phi_i(x,\lambda),\ \chi_i(x,\lambda))=\phi_i(x,\lambda)\chi_i^{'}(x,\lambda)-\phi_i^{'}(x,\lambda)\chi_i(x,\lambda)$$

ile tanımlıdır. $\Delta_1(\lambda)$ ile $\phi_1(x,\lambda)$ ve $\chi_1(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni, $\Delta_2(\lambda)$ ile $\phi_2(x,\lambda)$ ve $\chi_2(x,\lambda)$ çözüm fonksiyonlarının wronskiyeni gösterilecektir. Ayrıca $W(\phi_1(x,\lambda),\ \chi_1(x,\lambda))$ ve $W(\phi_2(x,\lambda),\ \chi_2(x,\lambda))$ wronskiyenleri uygun olarak $x \in [-1,0]$ ve $x \in [0,1]$ değişkenlerinden bağımsız oldukları için ve $\widetilde{\phi}_i(x,\lambda)$ ve $\widetilde{\chi}_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ her bir x için λ parametresinin tam fonksiyonu olduklarından dolayı

$$\Delta_1(\lambda) = W(\phi_1(x,\lambda),\ \chi_1(x,\lambda)) \tag{4.7.6}$$

$$\Delta_2(\lambda) = W(\phi_2(x,\lambda),\ \chi_2(x,\lambda)) \tag{4.7.7}$$

fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

4.7.1. Lemma $\forall\ \lambda \in \mathbb{C}$ için

$$\Delta_1(\lambda) = \Delta_2(\lambda) \tag{4.7.8}$$

eşitliği sağlanır.

İspat (4.7.6)-(4.7.7) eşitlikleri gereği

$$\begin{aligned} \Delta_2(\lambda) &= W(\phi_2(\cdot\ ,\lambda),\ \chi_2(\cdot\ ,\lambda)) \\ &= \phi_2(0,\lambda)\chi_2'(0,\lambda) - \phi_2'(0,\lambda)\chi_2(0,\lambda) \end{aligned} \tag{4.7.9}$$

eşitliği sağlanır. Diğer taraftan $\phi_i(x,\lambda)$ ve $\chi_i(x,\lambda)$ $(i=1,2)$ çözümlerinin tanımı gereği

$$\begin{aligned} \phi_2(0,\lambda) &= K\phi_1(0,\lambda) \\ \phi_2'(0,\lambda) &= \frac{1}{K}\phi_1'(0,\lambda) \\ \chi_2(0,\lambda) &= K\chi_1(0,\lambda) \\ \chi_2'(0,\lambda) &= \frac{1}{K}\chi_1'(0,\lambda) \end{aligned}$$

eşitlikleri de sağlanır. Bu değerler (4.7.9)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \Delta_2(\lambda) &= K\phi_1(0,\lambda)\frac{1}{K}\chi_1'(0,\lambda) - \frac{1}{K}\phi_1'(0,\lambda)K\chi_1(0,\lambda) \\ &= \phi_1(0,\lambda)\chi_1'(0,\lambda) - \phi_1'(0,\lambda)\chi_1(0,\lambda) \\ &= \Delta_1(\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir.

4.7.1. *Sonuç* $\Delta_1(\lambda)$ ve $\Delta_2(\lambda)$ fonksiyonlarının sıfır yerleri çakışıktır. $[-1,0)\cup(0,1]$'de tanımlı olan $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonları

$$\phi(x,\lambda)=\begin{cases}\phi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0)\\ \phi_2(x,\lambda), & x\in(0,1]\end{cases}$$

$$\chi(x,\lambda)=\begin{cases}\chi_1(x,\lambda), & x\in[-1,0)\\ \chi_2(x,\lambda), & x\in(0,1]\end{cases}$$

eşitlikleri ile tanımlanırsa Lemma 4.7.1'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

4.7.2. *Sonuç* $\phi(x,\lambda)$ ve $\chi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının wronskiyeni $[-1,0)\cup(0,1]$ aralıklarının her birinde x değişkeninden bağımsızdır ve x değişkeninin her bir $x\in[-1,0)\cup(0,1]$ değerinde, λ parametresinin tam fonksiyonudur.

$$\Delta(\lambda)=W(\phi(x,\lambda),\ \chi(x,\lambda))$$

ile gösterilsin. O halde

$$\Delta(\lambda)=W(\phi(x,\lambda),\ \chi(x,\lambda))=\begin{cases}\Delta_1(x,\lambda), & x\in[-1,0)\\ \Delta_2(x,\lambda), & x\in(0,1]\end{cases}$$

formülü elde edilir. Bu durumda Lemma 4.7.1 gereği

$$\Delta(\lambda):=\Delta_1(\lambda)=\Delta_2(\lambda) \tag{4.7.10}$$

eşitliği yazılır.

4.7.1. Teorem (4.7.1)-(4.7.5) sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerleri

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= [\phi_2(+0,\lambda)-K\phi_1(-0,\lambda)]\left[\chi_2'(+0,\lambda)-\frac{1}{K}\chi_1'(-0,\lambda)\right]\\ &- [\chi_2(+0,\lambda)-K\chi_1(-0,\lambda)]\left[\phi_2'(+0,\lambda)-\frac{1}{K}\phi_1'(-0,\lambda)\right]\end{aligned} \tag{4.7.11}$$

sınır fonksiyonunun sıfır yerleri ile çakışıktır.

İspat $\forall\ \lambda\in\mathbb{C}$ için $\phi_1(x,\lambda),\chi_1(x,\lambda)$ fonksiyonlarının (4.7.1) denkleminin $[-1,0]$ aralığında lineer bağımsız çözümleri olduğu ve de $W(\phi_1,\ \chi_1;\ x)=W(\phi_1,\ \chi_1;\ -1)\neq 0$ olduğu için (4.7.1) denkleminin $[-1,0]$'deki genel çözümü

$$y=c_1\phi_1(x,\lambda)+c_2\chi_1(x,\lambda)$$

biçiminde ifade edilebilir. Benzer şekilde aynı diferansiyel denklemin $[0,1]$'deki genel çözümü

$$y = c_3\phi_2(x,\lambda) + c_4\chi_2(x,\lambda)$$

biçiminde ifade edilebilir. Dolayısıyla (4.7.1) iki-aralıklı diferansiyel denklemin $[-1,0)\cup(0,1]$'deki genel çözümü

$$y = \begin{cases} c_1\phi_1(x,\lambda) + c_2\chi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0) \\ c_3\phi_2(x,\lambda) + c_4\chi_2(x,\lambda), & x \in (0,1] \end{cases}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade

$$\begin{aligned} y(-1) &= -y(1) \\ y^{'}(-1) &= -y^{'}(1) \end{aligned}$$

anti-periyodik sınır şartlarında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} c_1\phi_1(-1,\lambda) + c_2\chi_1(-1,\lambda) &= c_3\phi_2(1,\lambda) + c_4\chi_2(1,\lambda) \\ c_1\phi_1^{'}(-1,\lambda) + c_2\chi_1^{'}(-1,\lambda) &= c_3\phi_2^{'}(1,\lambda) + c_4\chi_2^{'}(1,\lambda) \end{aligned}$$

elde edilir. $\phi_1(x,\lambda),\ \phi_2(x,\lambda),\ \chi_1(x,\lambda),\ \chi_2(x,\lambda)$ çözümleri

$$\begin{aligned} \phi_1(-1,\lambda) = 1, &\quad \phi_1^{'}(-1,\lambda) = 0 \\ \phi_2(1,\lambda) = 1, &\quad \phi_2^{'}(1,\lambda) = 0 \\ \chi_1(-1,\lambda) = 0, &\quad \chi_1^{'}(-1,\lambda) = 1 \\ \chi_2(1,\lambda) = 0, &\quad \chi_2^{'}(1,\lambda) = 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağladığı için $c_1 = c_3 = A$ ve $c_2 = c_4 = B$ elde edilir. O halde genel çözüm

$$\begin{aligned} y &= \begin{cases} A\phi_1(x,\lambda) + B\chi_1(x,\lambda), & x \in [-1,0) \\ A\phi_2(x,\lambda) + B\chi_2(x,\lambda), & x \in (0,1] \end{cases} \\ &= A\begin{cases} \phi_1(x,\lambda) \\ \phi_2(x,\lambda) \end{cases} + B\begin{cases} \chi_1(x,\lambda) \\ \chi_2(x,\lambda) \end{cases} \\ &= A\phi(x,\lambda) + B\chi(x,\lambda) \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ifade

$$\begin{aligned} y(+0) &= Ky(-0) \\ y^{'}(+0) &= \frac{1}{K}\, y^{'}(-0) \end{aligned}$$

geçiş şartlarında yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\phi_2(+0,\lambda) - K\phi_1(-0,\lambda))\, A + (\chi_2(+0,\lambda) - K\chi_1(-0,\lambda))\, B &= 0 \\
\left(\phi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\phi_1^{'}(-0,\lambda)\right) A + \left(\chi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\chi_1^{'}(-0,\lambda)\right) B &= 0
\end{aligned}$$

eşitlikleri elde edilir. Bu lineer denklem sisteminin aşikar olmayan çözümünün $(A, B) \neq (0, 0)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{vmatrix} \phi_2(+0,\lambda) - K\phi_1(-0,\lambda) & \chi_2(+0,\lambda) - K\chi_1(-0,\lambda) \\ \phi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\phi_1^{'}(-0,\lambda) & (\chi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\chi_1^{'}(-0,\lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned}
&[\phi_2(+0,\lambda) - K\phi_1(-0,\lambda)]\left[\chi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\chi_1^{'}(-0,\lambda)\right] \\
&-[\chi_2(+0,\lambda) - K\chi_1(-0,\lambda)]\left[\phi_2^{'}(+0,\lambda) - \frac{1}{K}\phi_1^{'}(-0,\lambda)\right] = 0
\end{aligned}$$

olması yani $\omega(\lambda) = 0$ olmasıdır. Bu ise ispatı tamamlar.

4.7.2. Sınır Fonksiyonunun Asimptotiği

Bölüm 4.7.1'de araştırılan problemin özdeğerleri $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun sıfır yerlerinden ibaret olduğundan $\omega(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik davranışı incelenmiştir.

4.7.2. Teorem $K^2 \neq 1$ ise $\omega(\lambda)$ sınır fonksiyonu

$$\begin{aligned}
\omega(\lambda) &= (1-K)\left(1 - \frac{1}{K}\right)\cos^2\sqrt{\lambda} \\
&+ (1+K)\left(1 + \frac{1}{K}\right)\sin^2\sqrt{\lambda} + O\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda}}\, exp(|2t|)\right) \qquad (4.7.12)
\end{aligned}$$

asimptotik eşitliğini sağlar.

İspat $t = Im(\sqrt{\lambda})$ ile gösterelim. Bölüm 4.6'daki $\phi_i(x,\lambda)$ ve $\chi_i(x,\lambda)$, $i = 1, 2$ çözümlerinin asimptotik davranışlarından yararlanılırsa bu çözümler için aşağıdaki asimptotik formüller elde edilir.

$$
\begin{aligned}
\phi_1(x,\lambda) &= \cos(\mu(x+1)) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t||x+1|)\right) && (4.7.13)\\
\phi_1^{'}(x,\lambda) &= -\mu\sin(\mu(x+1)) + O\left(exp(|t||x+1|)\right) && (4.7.14)\\
\phi_2(x,\lambda) &= \cos(\mu(x-1)) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t||x-1|)\right) && (4.7.15)\\
\phi_2^{'}(x,\lambda) &= -\mu\sin(\mu(x-1)) + O\left(exp(|t||x-1|)\right) && (4.7.16)\\
\chi_1(x,\lambda) &= \frac{1}{\mu}\sin(\mu(x+1)) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\ exp(|t||x+1|)\right) && (4.7.17)\\
\chi_1^{'}(x,\lambda) &= \cos(\mu(x+1)) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t||x+1|)\right) && (4.7.18)\\
\chi_2(x,\lambda) &= \frac{1}{\mu}\sin(\mu(x-1)) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\ exp(|t||x-1|)\right) && (4.7.19)\\
\chi_1^{'}(x,\lambda) &= \cos(\mu(x-1)) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t||x-1|)\right) && (4.7.20)
\end{aligned}
$$

Burada $\sqrt{\lambda} = \mu$ ile gösterilmiştir. Bu eşitliklerden

$$
\begin{aligned}
\phi_1(-0,\lambda) &= \cos(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right) && (4.7.21)\\
\phi_1^{'}(-0,\lambda) &= -\mu\sin(\mu) + O\left(exp(|t|)\right) && (4.7.22)\\
\phi_2(+0,\lambda) &= \cos(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right) && (4.7.23)\\
\phi_2^{'}(+0,\lambda) &= \mu\sin(\mu) + O\left(exp(|t|)\right) && (4.7.24)\\
\chi_1(-0,\lambda) &= \frac{1}{\mu}\sin(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\ exp(|t|)\right) && (4.7.25)\\
\chi_1^{'}(-0,\lambda) &= \cos(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right) && (4.7.26)\\
\chi_2(+0,\lambda) &= -\frac{1}{\mu}\sin(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu^2}\ exp(|t|)\right) && (4.7.27)\\
\chi_1^{'}(+0,\lambda) &= \cos(\mu) + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right) && (4.7.28)
\end{aligned}
$$

asimptotik eşitlikleri elde edilir. (4.7.21)-(4.7.28) asimptotik eşitliklerini (4.7.11)'de yerine yazarsak

$$
\begin{aligned}
\omega(\lambda) &= \left[(1-K)\cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right)\right]\left[(1-\frac{1}{K})\cos\mu + O\left(\frac{1}{\mu}\ exp(|t|)\right)\right]\\
&- \left[(-1-K)\frac{1}{\mu}\sin\mu + O\left(\frac{1}{\mu^2}\ exp(|t|)\right)\right]\left[\left(1+\frac{1}{K}\right)\mu\sin\mu + O\left(exp(|t|)\right)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\omega(\lambda) &= (1-K)\left(1-\frac{1}{K}\right)\cos^2\mu \\ &+ (1+K)\left(1+\frac{1}{K}\right)\sin^2\mu + O\left(\frac{1}{\mu}\, exp(|2t|)\right)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

4.7.3. Teorem $K^2 \neq 1$ ise verilen (4.7.1)-(4.7.5) sınır-değer-geçiş probleminin sonsuz sayıda özdeğeri mevcuttur ve bu özdeğerlerin sonlu yığılma noktası mevcut değildir.

İspat İspat için

$$\begin{aligned}\omega_1(\lambda) &= (1-K)\left(1-\frac{1}{K}\right)\cos^2\mu \\ &+ (1+K)\left(1+\frac{1}{K}\right)\sin^2\mu \\ \omega_2(\lambda) &= \omega(\lambda)-\omega_1(\lambda)\end{aligned}$$

gösterilerek $\omega_1(\lambda)$ ve $\omega_2(\lambda)$ tam fonksiyonlarına Rouche teoremini uygulamak yeterlidir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında literatürde daha önce araştırılmamış yeni tipten bir anti-periyodik sınır-değer probleminin en temel spektral özellikleri incelenmiştir. Çalışmanın en esas farklandırıcı özelliği ise bir iç süreksizlik noktası ile verilmesi ve bu süreksizlik noktasında geçiş şartı içermesidir.

Tezde bulunan sonuçlar teorik olmasına rağmen giriş bölümünde de belirtildiği gibi mekanik ve fiziğin bir çok somut problemlerinin analitik ve yaklaşık çözümlerinin bulunmasında uygulanabilir.

Sonuç olarak tez çalışmasında uygulanan yöntemlerle daha genel sınır şartlarından oluşan sınır-değer-geçiş problemleri de araştırılabilir.

KAYNAKLAR

1. Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2014). *Completeness of One Two-Interval Boundary Value Problem with Transmission Conditions.* Miskolc Mathematical Notes, 15(2), 293-303.

2. Internet: Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2016). *Qualitative Analysis of Eigenvalues and Eigenfunctions of One Boundary Value Transmission Problem.* Boundary Value Problems, Vol. 82. URL: https://doi.org/10.1186/S13661-016-0589-4

3. Aydemir, K. and Mukhtarov, O. Sh. (2017). *Class of Sturm-Liouville Problems With Eigenparameter Dependent Transmission Conditions.* Numerical Functional Analysis and Optimization, 38(10), 1260-1275.

4. Aydemir, K., Olğar H. and Mukhtarov, O. Sh. (2019). *The Principal Eigenvalue and The Principal Eigenfunction of a Boundary-Value-Transmission Problem.* Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, 11(2), 97-100.

5. Balci, M.(2000). *Reel Analiz(2).* Ankara: Balcı Yayınları, 141.

6. Berghe, G.V., Daele, M.V. and Meyer, H.D. (1995). *A Modified Difference Scheme for Periodic and Semiperiodic Sturm-Liouville Problems.* Applied Numerical Mathematics, 18, 69-78.

7. Birkhoff, G.D. (1908). *On the Asymtotic Character of the Solution of the Certain Linear Differential Equations.* Transactions of the American Mathematical Society, 9, 219-231.

8. Boumenir, A. (1999). *Eigenvalues of Periodic Sturm-Liouville Problems by the Shannon-Whittaker Sampling Theorem.* Mathematics of Computation, 68(227), 1057-1066.

9. Curtain, R.F., Pritchard, A.J. (1977). *Functional Analysisin Modern Applied Mathematics.* Academic Press Inc, 322.

10. Kandemir, M. (2015). *Nonlocal Boundary-Value Problems with Transmission Conditions.* Gulf Journal of Math, 3(1), 1-17.

11. Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2017). *Nonlocal Sturm-Liouville Problems with Integral Terms in the Boundary Conditions.* Electronic Journal of Differential Equations, 2017(11), 112.

12. Kandemir, M. and Mukhtarov, O. Sh. (2020). *Manypoint Boundary Value Problems for Elliptic Differential-Operator Equations with Interior Singularities.* Mediterranean Journal of Mathematics, 2020(17), 35.

13. Lee, J.W. (1972). *Spectral Properties and Oscillation Theorems for Periodic Boundary-Value Problems of Sturm Liouville Type.* Journal of Differential Equations, 11, 592-606.

14. Liu, Y. (2007). *Periodic Boundary Value Problems for Higher Order Impulsive Functional Differential Equations.* SDÜ Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi (E-dergi), 2, 253-272.

15. Malathi, V., Mohamed, B. S. and Bachok, B. T. (1996). *Computing Eigenvalues of Periodic Sturm-Liouville Problems Using Shooting Technique and Direct Integration Method.* International Journal of Computer Mathematics, 68, 119-132.

16. Muhtarov, F., Kandemir M. and Muhtaroğlu, O. (2017). *Multi-Point Transmission Problems for Sturm-Liouville Equation with an Abstract Linear Operator.* AIP Conference Proceedings, 1833(1), 20022.

17. Muhtarov, O. Ş. (1988). *Geçiş Şartları Bulunduran ve Esas Kısmı Kendine Eşlenik Olan Sınır-Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotiği.* VINITI, 4400(88), 135.

18. Muhtarov, O. Ş. (1988). *Bir Geçiş Probleminin Bazı Spektral Özellikleri.* VINITI, 1779.

19. Muhtarov, O. Ş. (1998). *Bir Geçiş Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı.* Izv.AN Az.SSR,Ser. Fiz-techn. Mat.Nauk, 3, 13-17.

20. Mukhtarov, O. Sh, and Yakubov, S. (2002). *Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions.* Applicaple Analysis, 81(5), 1033-1064.

21. Mukhtarov, O. Sh, Olğar, H. and Aydemir, K. (2015). *Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems.* Filomat 29, 1671-1680.

22. Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H., Aydemir, K. and Jabbarov I. (2018). *Operator-Pencil Realization of One Sturm-Liouville Problem With Transmission Conditions.* Applied And Computational Mathematics, 17(2), 284-294.

23. Ponnusamy, S., Silverman, H. (2006). *Complex Variables With Applications.* Birkhauser, 514.

24. Tamarkin, J. D., (1928). *Some General Problems of Theory of Ordinary Linear Differential Equations and Expansion of an Arbitary Functions in Series of Fundamentals Functions.* Math Z, 27, 1-54.

25. Titchmars, E. C., (1962). *Eigenfunctions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I, Second Edn.* Oxford Univ. press, London.

26. Wang, D. B. (2012). *Periodic Boundary Value Problems for Nonlinear First-Order Impulsive Dynamic Equations on Time Scales.* Advances in Difference Equations, 12.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, Soyadı	:	Serdar PAŞ
Uyruğu	:	Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	:	
Medeni hali		
e-mail		

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Trakya Üniversitesi	2015
Pedagojik Form.	Trakya Üniversitesi	2015
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi	2021

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görev**
2016 -	İrfanlı Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce