T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ÜMİT BOZ

HAZİRAN 2019

HOMOTOPİ PERTURBATION METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM

Ümit BOZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2019

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

Ümit BOZ tarafından hazırlanan “Homotopi Perturbation Metodu İle İntegral Denklemlerine Bir Yaklaşım” adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğrt. Üyesi Serpil ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Başkan :

………….Anabilim Dalı, ……….….Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Üye :

………….Anabilim Dalı, ……….….Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi: …/…/…

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………..…….

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

İTHAF

Bu tez, her aşamasında bana destek olan eşim ve kızıma ithaf olunur.

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

İmza

Ümit BOZ

04/07/2019

HOMOTOPİ PERTURBATİON METODU İLE İNTEGRAL DENKLEMLERİNE BİR YAKLAŞIM

(Yüksek Lisans Tezi)

Ümit BOZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2019

ÖZET

Bu çalışmada, Volterra ve Fredholm integral denklemleri ve denklem sistemleri için Homotopi Perturbation Metodunun (HPM) bir uygulaması verildi. Bu metodun integral denklemlerini çözmedeki etkinliği ve pratikliği çeşitli örneklerle değerlendirildi. Bu tez çalışması dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde incelediğimiz metotlarla ilgili bir literatür özeti verildi. İkinci bölümde integral denklemleri tanıtıldı ve genel bir sınıflandırma yapıldı. Üçüncü bölümde, integral denklemlerini çözmek için kullanılan Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM), Ardışık Yaklaşımlar Metodu (AYM), Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ve Homotopi Perturbation Metodu (HPM) açıklandı ve bazı integral denklemlere bu metotlar uygulandı. Dördüncü bölümde de bir örnek üzerinde elde edilen analitik ve sayısal sonuçlara göre HPM'nin etkinliği ve pratikliği değerlendirildi.

SayfaAdedi : 53
AnahtarKelimeler : İntegral Denklemleri, Homotopi Perturbation Metodu.
Danışman : Dr.Öğr.Üyesi Serpil ŞAHİN

AN APPROACH TO INTEGRAL EQUATIONS BY HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

(M. Sc.)

Ümit BOZ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF SCIENCE ENGINEERING AND TECHNOLOGY

June 2019

ABSTRACT

In this study, an application of the Homotopy Perturbation Method (HPM) is provided for Volterra and Fredholm integral equations and systems. The efficiency and practicality of HPM in solving the integral equations are examined through some examples. This thesis consists of four sections. In the first section, a literature review is given about the methods that will be used throughout the thesis. Secondly, an integral equation is introduced and a general classification is made. Third section reviews Adomian Decomposition Method (ADM), Successive Approximations Method (SAM), Direct Calculation Method (DCM), Variational Iteration Method (VIM) and Homotopy Perturbation Method (HPM) as well as their applications to some integral equations. Finally, the efficiency and practicality of HPM is investigated with respect to the analytical and numerical results obtained from an example.

PageNumber : 53
KeyWords : Integral Equations, Homotopy Perturbation Method
Supervisor : Assist. Prof. Serpil ŞAHİN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN'e teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim eşim Tuğçe'ye, kızım İnci Naz'a, annem ve babama çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZET iv

ABSTRACT v

ÖN SÖZ VE TEŞEKKÜR vi

İÇİNDEKİLER vii

ÇİZELGELER DİZİNİ viii

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ ix

1. GİRİŞ 1

  1.1. İntegral Denklemleri ve Homotopi Perturbation Metodunun Tarihçesi 1

2. GENEL BİLGİLER 4

  2.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması 4

    2.1.1. Volterra, Fredholm ve integro-diferansiyel denklemler 4

    2.1.2. İntegral denklemlerin yapılarına göre snıflandırılması 5

    2.1.3. Lineer ve homojen integral denklemleri 6

  2.2. Diferansiyel Denklemler İle İntegral Denklemleri Arasındaki İlişkiler 8

    2.2.1. Diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi 8

    2.2.2. Çok katlı integrallerin tek katlı integrallere düşürülmesi 8

    2.2.3. Başlangıç değer probleminin Volterra integral denklemine dönüştürülmesi 9

3. MATERYAL-METOT 11

  3.1. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri 11

    3.1.1. Adomian ayrıştırma metodunun Volterra integral denklemlerine uygulanması 12

    3.1.2. Ardışık yaklaşımlar metodunun Volterra integral denklemlerine uygulanması 14

3.1.3. Direkt hesaplama metodunun Fredholm integral denklemlerine uygulanması.......... 15

3.1.4. Varyasyonel iterasyon metodunun Fredholm integral denklemlerine uygulanması.......... 17

3.1.5. Homotopi perturbation metodu.......... 20

3.2. Volterra ve Fredholm İntegral Denklem Sistemleri.......... 25

3.2.1. Adomian ayrıştırma metodunun Volterra integral denklem sistemlerine uygulanması.......... 25

3.2.2. Direkt hesaplama metodunun Fredholm integral denklem sistemlerine uygulanması.......... 27

3.2.3. Ardışık yaklaşımlar metodunun Fredholm integral denklem sistemlerine uygulanması.......... 30

3.2.4. Homotopi perturbation metodunun integral denklem sistemlerine uygulanması.......... 32

4. BULGULAR.......... 36

5. SONUÇ.......... 50

KAYNAKLAR.......... 51

ÖZGEÇMİŞ.......... 53

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelgeler **Sayfa**

Çizelge 3.1……......………………………………………………………………… 35

Çizelge 4.1……………..………………………………………………………… 38

Çizelge 4.2………………………………..……………………………………… 40

Çizelge 4.3..……………………………………………………………………… 42

Çizelge 4.4……………………………………..………………………………… 43

Çizelge 4.5..……………………………………………………………………… 45

Çizelge 4.6..……………………………………………………………………… 49

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

Bu tezde kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar açıklamalarıyla birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
A	Diferansiyel operatör
B	Sınır operatörü
L	Lineer operatör
N	Lineer olmayan operatör
Ω	Tanım kümesi
Γ	Tanım kümesinin sınırı
$\mathbf{L_2[a,b]}$	[a,b] üzerinde karesi ile integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı

Kısaltmalar	**Açıklama**
HPM	Homotopi perturbation metodu
AAM	Adomian ayrıştırma metodu
AYM	Ardışık yaklaşımlar metodu
VİM	Varyasyonel iterasyon metodu
DHM	Direkt hesaplama metodu
$\mathbf{e_{HPM}(u(x))}$	HPM'ye ait hata analizi
$\mathbf{e_{AAM}(u(x))}$	AAM'ye ait hata analizi
$\mathbf{e_{AYM}(u(x))}$	AYM'ye ait hata analizi
$\mathbf{e_{VİM}(u(x))}$	VİM'e ait hata analizi

1. GİRİŞ

1.1. İntegral Denklemleri ve Homotopi Perturbation Metodunun Tarihçesi

İntegral denklemleri bilinmeyen u(x) fonksiyonunun integral işareti altında bulunduğu denklemler olarak tanımlanabilir [4]. İntegral denklemlerinin standart formu,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{g(x)}^{h(x)}K(x,t)u(t)dt \tag{1.1}$$

şeklindedir.

Burada $g(x)$ ve $h(x)$ integrasyon sınırları, λ sabit bir değer ve $K(x,t)$ integral denkleminin x ve t gibi iki değişkene bağlı bir çekirdeğidir.

İntegral denklemlerin incelenmesi, insanın matematiksel anlama arayışının devamında çok etkileyici bir bölümdür ve bu araştırmanın sonucu hem çarpıcı biçimde güzel hem de gerçekten ilginçtir. İntegral denklemlerle ilgili ilk çalışmalar 19.yüzyılda başlamıştır. İlk olarak 1823 yılında ABEL'in mekanik problemlerini incelediği sırada integral denklemlere rastlandığı bilinmektedir. Fakat integral denklem deyimi Du Bois REYMOND'un (1888)'de yayınladığı makalesinde kullandığı anlaşılmaktadır [1].

İntegral denklemler teorisinin büyük kısmı ise, yirminci yüzyılın başlarında gerçekleştirilen çalışmalarda karşımıza çıkmaktadır. İntegral denklemlerin en önemli kategorilerinden biri, ünlü İsveçli matematikçi tarafından isimlendirilen Fredholm integral denklemidir. Erik Ivar Fredholm'un (7 Nisan 1866 - 17 Ağustos 1927) dönüm noktası olan makalesi "Surune classe d'equation fonctionelles", 1903'te Acta Mathematica'da basılmıştır. İntegral denklemlerinin bir diğer önemli kategorisi, seçkin İtalyan matematikçi Vito Volterra'dan (3 Mayıs 1860 - 11 Ekim 1940) sonra adlandırılan Volterra integral denklemidir. Ünlü Alman matematikçi David Hilbert (23 Ocak 1862 - 14 Şubat 1943), "Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen integralgleichungen" kitabında genel integral denklem teorisinin temeline büyük katkılar sağlamıştır. İntegral denklemler teorisinin saf matematiğin önemli bir parçası olduğu kesin olsa da, bu teorinin fizik bilimlerindeki problemlere birçok uygulaması olduğu da bilinmektedir. Ayrıca, integral denklemlerinin alanı ile matematiğin içindeki lineer cebir, operatör teorisi ve diferansiyel denklemler gibi diğer alanlar arasında da önemli etkileşimler vardır [2].

İntegral denklemlerine, bilimin çeşitli alanlarında ve sayısız uygulamada (elastikiyet, plastisite, ısı ve kütle transferi, salınım teorisi, akışkan dinamiği, filtrasyon teorisi, elektrostatik, elektrodinamik, biyomekanik, oyun teorisi, kontrol, kuyruk teorisi, elektrik mühendisliği, ekonomi bilimi ilaç, vb.) karşılaşılmaktadır. Birçok fizik, kimya ve biyoloji denklemi, deneylerden elde edilen fonksiyonları veya parametreleri içerir ve bu nedenle kesin olarak sabit değildir. Bu nedenle, bu fonksiyonların yapısını seçmek, denklemi analiz etmek ve çözmek daha kolaydır. Tam çözümler ve çeşitli sayısal, asimptotik ve yaklaşık yöntemlerin tahmin hatalarını doğrulamak için tam çözümler kullanılabilir [3].

HPM topolojideki homotopi ve geleneksel perturbation metodunun birleşimi olarak ilk kez J. H. He tarafından ortaya konmuştur. Bu metotta çözüm gerçek çözüme çok hızlı yakınsayan sonsuz serinin toplamı olarak ele alınmıştır. HPM lineer olmayan denklemler ve diğer pek çok konularda uygulanmış, özellikle integral denklemlerde bilim adamları ve mühendisler tarafından yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Çünkü bu metot çözümü zor olan problemleri basit olan problemlere dönüştürür. Son yıllarda Javadi ve Golbabai, fark çekirdekli lineer Fredholm integral denklem sistemlerini çözmek için HPM'yi uygulamıştır. Saeed ikinci türden lineer olmayan Fredholm integral denklem sistemlerini çözmek için HPM'yi kullanmıştır [5].

İntegral denklemlerin çözümleri bilim ve mühendislik alanlarında büyük bir role sahiptir. Fiziksel bir olay diferansiyel denklem, integral denklem veya bir integro-diferansiyel denklem veya bunların bir sistemi ile modellenebilir. İkinci türden lineer Volterra integral denklem sistemlerinin çözümü için Galerkin metodu, Collocation metodu, Taylor serisi, denklemi lineer ve lineer olmayan bir cebirsel denklem sistemine dönüştürme, Legendre dalgacıkları, Taylor polinomları ve yakın zamanda Chebyshev polinomları, güç serisi yöntemi ve genişleme yöntemi gibi birkaç sayısal yöntem vardır. Fizik, biyoloji ve mühendislik alanlarında ortaya çıkan integral denklem sistemlerinin çözümleri, Euler-Chebyshev ve Runge-Kutta yöntemleri gibi sayısal entegrasyon yöntemlerine dayanmaktadır ve son zamanlarda yapılan bir araştırmada, birinci dereceden lineer Fredholm integral denklem sistemleri; rasyonelleştirilmiş Haar fonksiyon ve hibrit fonksiyonlarla Galerkin metodu kullanılarak çözülmüştür. Babolian ve diğerleri, doğrusal Volterra integral denklem sistemleri için ADM'yi kullanmışlardır. Biazar ve diğerleri, ikinci türdeki Volterra integral denklem sistemleri çözmek için HPM'yi kullanmışlardır. Javidi, lineer Fredholm integral denklem sistemlerini çözmek için değiştirilmiş HPM'yi kullanmıştır. Son zamanlarda Javidi ve Golbabai, farklı çekirdeğe sahip lineer Fredholm integral denklem sistemlerinin çözümü için HPM'yi uygulanmıştır [6].

2. GENEL BİLGİLER

2.1. İntegral Denklemlerinin Sınıflandırılması

İntegral denklemler birçok türde karşımıza çıkmaktadır. Bu türler esas olarak integrasyon sınırlarına ve denklemin çekirdeğine bağlıdır [7].

2.1.1. Volterra, Fredholm ve integro-diferansiyel integral denklemleri

İntegral denklemleri, integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre aşağıdaki şekilde sınıflandırılırlar.

$$u(x)=\int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.1}$$

$$u(x)=x+1+\int_0^x xtu(t)dt \tag{2.2}$$

$$\Phi(x)u(x)=\sin x-\int_0^x (xt+t)u^2(t)dt \tag{2.3}$$

şeklindeki denklemlere Volterra integral denklemleri denilmektedir.
Bu tür denklemlerde, integral işaretinin üst sınırında (veya sınırlarından birinde) x değişkeni bulunmaktadır.
x değişkeninin $x=b$ gibi sabit bir değere eşit olması halinde yazılabilecek,

$$\varphi(x)=\int_0^1 (x+t)u(t)dt \tag{2.4}$$

$$u(x)=\int_0^1 x^2tu(t)dt \tag{2.5}$$

$$u(x)=x.\sin x+\int_0^1 \ln xtu(t)dt \tag{2.6}$$

$$\varphi(x)u(x)=\cosh x+\int_0^1 (xt-t)u(t)dt \tag{2.7}$$

şeklindeki denklemlere ise, Fredholm integral denklemleri denilmektedir. Volterra ve Fredholm integral denklemleri sınır değerlerinin sabit ya da değişken olmasına göre çeşitlenirler.

İçinde bilinmeyen fonksiyonun türevlerinin bulunduğu integral denklemlere İntegro-diferansiyel denklemler denilmektedir. İntegro-diferansiyel denklemlerin özel çözümlerinde verilen başlangıç şartları göz önüne alınır.
Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonun n. mertebeden türevinin bulunduğu,

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.8}$$

denklemine Fredholm integro-diferansiyel denklemi ve

$$u^{(n)}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.9}$$

denklemine Volterra integro-diferansiyel denklemi denir. İntegral denklemin çözümü için başlangıç şartları olarak $u(0),u'(0),u''(0),....u^{(n-1)}(0)$ değerleri integral denklem ile birlikte verilir [4,7].

2.1.2. İntegral denklemlerin yapılarına göre sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon ve $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu olmak üzere,

$$\varphi(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.10}$$

şeklindeki integral denklemlerine I. tür integral denklemler denir. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu sadece integral içinde mevcuttur. Burada $\varphi(x)$ fonksiyonu bilinen bir fonksiyondur. Benzer şekilde,

$$\varphi(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.11}$$

şeklindeki integral denklemlerde yine I. tür integral denklemlerdir. Burada $\varphi(x)$ ve $f(x)$ bilinen fonksiyonlardır.

$$x^2=\int_0^1 (x-t)u(t)dt \tag{2.12}$$

$$e^x=x-\int_0^{\frac{1}{2}} x^2tu(t)dt \tag{2.13}$$

gibi denklemler, I. tür integral denklemlere örnek olarak verilebilir.

$$u(x)=\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

veya

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.15}$$

şeklindeki integral denklemlere ise II. tür integral denklemler denir. Görüldüğü gibi, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır.

$$u(x)=\int_0^x e^{xt}u(t)dt \tag{2.16}$$

ve

$$u(x)=1-x^2+\int_1^2 \sin(xt)u(t)dt \tag{2.17}$$

denklemleri bu tür denklemlere örnek olarak verilebilir.

$$\varphi(x)u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.18}$$

şeklindeki integral denklemlere ise III. tür integral denklemler denir.

$$xu(x)=1-e^{-x}+\int_0^1 x^2t^2u(t)dt \tag{2.19}$$

denklemi III. tür bir integral denklemdir.

Özel olarak $\varphi(x)$ 'in 0 veya 1 olması halinde birinci ve ikinci türden integral denklemine dönüşebilir [4,7].

2.1.3. Lineer ve homojen integral denklemler

İntegral denklemler ve integro-diferansiyel denklemler lineerlik ve homojenlik kavramlarına göre diğer iki sınıflandırma türüne ayrılır. Bu iki kavram, çözümlerin yapısında önemli bir rol oynamaktadır.

Lineer integral denklemler

Bir integral denklemde görülen $u(x)$ fonksiyonu lineer ise; bu denkleme lineer integral denklemi denir. Aksi takdirde lineer olmayan integral denklemi olarak adlandırılır. Yani denklemde e^u, $\sinh u$, $\cos u$, $\ln(1+u)$ gibi $u(x)$ 'in lineer olmayan fonksiyonları varsa, integral denklemi lineer olmayan olarak adlandırılır. Bu kavramı açıklamak için aşağıdaki integral denklemlerini göz önünde bulundurabiliriz.

$$u(x)=2+\int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.20}$$

$$u(x)=1+\int_0^1 (xt+t)u(t)dt \tag{2.21}$$

şeklindeki integral denklemleri lineerdir.

$$u(x)=1+\int_0^x (1-x-t)u^5(t)dt \tag{2.22}$$

$$u(x)=1+\int_0^x (x-t)e^{u(t)}dt \tag{2.23}$$

şeklindeki integral denklemleri lineer değildir [4,7].

Homojen integral denklemleri

İkinci türden integral denklemleri homojen veya homojen olmayan şeklinde adlandırılır. Eğer, ikinci türden bir integral denkleminde $f(x)=0$ ise denklem homojendir aksi takdirde homojen değildir. Bunun için aşağıdaki örnekleri ele alalım.

$$u(x)=\sin x+\int_0^x xtu(t)dt \tag{2.24}$$

$$u(x)=x+\int_0^1 (x-t)^2 u(t)dt \tag{2.25}$$

$$u(x)=\int_0^x (1+x-t)^2 u(t)dt \tag{2.26}$$

$$u(x)=\int_0^1 (xt-t^2)u(t)dt \tag{2.27}$$

İlk iki denklem homojen değildir. Çünkü $f(x)=\sin x$ ve $f(x)=x$'dir. Son iki denklem ise homojendir. Çünkü her denklem için $f(x)=0$'dır [4,7].

2.2. Diferansiyel Denklemler İle İntegral Denklemleri Arasındaki İlişkiler

2.2.1. Diferansiyel denklemlerin integral denklemlere dönüştürülmesi

Diferansiyel denklemler yalnız başlarına bir problemi ifade edemezler. Onlara sınır şartlarının da ilave edilmesi gerekir. İntegral denklemler ise, bir problemin tam tanımını verirler. Sınır şartlara ihtiyaç yoktur. Ancak, sınır şartları da uzayın bütününde onların ilgilenilen bölgeye etkisinin dolaylı yollarla denklemlere eklenmesi olarak düşünülebileceğinden, integral denklemler ile diferansiyel denklemler arasında yakın bir bağ vardır.

İntegral ve integro-diferansiyel denklemler birçok bilimsel mühendislik uygulamasında ortaya çıkar. Volterra integral denklemleri ve Volterra integro-diferansiyel denklemleri, başlangıç değer problemlerini öngörülen başlangıç değerlerine dönüştürerek elde edilebilir. Bununla birlikte, Fredholm integral denklemleri ve Fredholm integro-diferansiyel denklemleri, verilen sınır koşullarıyla sınır değer problemlerinden türetilebilir. Başlangıç değer problemlerini Volterra integral denklemlerine dönüştürmenin ve Volterra integral denklemlerini başlangıç değer problemlerine dönüştürmenin literatürde yaygın olarak kullanıldığını belirtebiliriz. Ancak, sınır değer problemlerini Fredholm integral denklemlerine dönüştürmek ve Fredholm integral denklemlerini eşdeğer sınır değer problemlerine dönüştürmek nadiren kullanılır [7].

2.2.2. Çok katlı integrallerin tek katlı integrallere düşürülmesi

Başlangıç değer problemlerini ve diğer problemleri integral denklemlere dönüştürmek için çok katlı integralleri tek katlı integrallere indirgememiz gerekecektir. Bu sebeple ilk olarak aşağıdaki ifade kullanılarak çift katlı integralin tek katlı bir integrale indirgenebileceğini göstereceğiz.

$$\int_0^x \int_0^{x_1} F(t)\,dt\,dx_1 = \int_0^x (x-t)F(t)\,dt \tag{2.28}$$

eşitliğini ispatlayalım. Bunu iki yolla yapabiliriz. İlk olarak,

$$G(x) = \int_0^x (x-t)F(t)\,dt \tag{2.29}$$

$G(0)=0$ 'dır. (2.29) denkleminin her iki tarafının türevini alır ve Leibnitz kuralını kullanırsak,

$$G'(x)=\int_0^x F(t)dt \tag{2.30}$$

şeklinde elde edilir. Şimdi son denklemin her iki tarafının 0'dan x'e integralini alalım.

$$G(x)=\int_0^x\int_0^{x_1} F(t)dtdx_1 \tag{2.31}$$

denklemi elde edilir ki sonuç olarak (2.29) ile (2.31) eşdeğerdir.

İkinci yolda ise, aşağıda uygulandığı şekilde kısmi integrasyon yöntemini kullanacağız.

$$\begin{aligned}\int_0^x\int_0^{x_1} F(t)dtdx_1 &= x_1\int_0^{x_1} F(t)dt\Big|_0^x-\int_0^x x_1F(x_1)dx_1\\ &= x\int_0^x F(t)dt-\int_0^x x_1F(x_1)dx_1\\ &=\int_0^x (x-t)F(t)dt,\end{aligned} \tag{2.32}$$

O halde $x_1=t$ için ispat tamamlanmış olur. Dolayısıyla bu kuralı genellersek aşağıdaki ifade elde edilir.

$$\int_0^x\int_0^{x_1}\cdots\int_0^{x_{n-1}} u(x_n)dx_ndx_{n-1}\ldots dx_1=\frac{1}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}u(t)dt. \tag{2.33}$$

Bunun sonucu olarak da,

$$\underbrace{\int_0^x\int_0^x\cdots\int_0^x (x-t)u(t)dtdt\ldots dt}_{\text{n tane integral}}=\frac{1}{n!}\int_0^x (x-t)^n u(t)dt, \tag{2.34}$$

eşitliğini yazabiliriz [7].

2.2.3. Başlangıç değer probleminin Volterra integral denklemine dönüştürülmesi

Bu bölümde, başlangıç değer problemini (BDP) eşdeğer Volterra integral denklemine ve Volterra integro-diferansiyel denklemine dönüştürecek tekniği inceleyeceğiz. Bu işlemi, aşağıda verilen ikinci mertebeden bir başlangıç değer problemine uygulayalım.

$$y''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y(x)=g(x)$$
$$y(0)=\alpha, y'(x)=\beta \tag{2.35}$$

Başlangıç koşullarındaki α ve β sabit iki değerdir. $p(x)$ ve $q(x)$ analitik iki fonksiyon, $g(x)$ incelediğimiz aralıkta sürekli bir fonksiyon.

$$y''(x)=u(x) \tag{2.36}$$

olarak belirleyelim. Burada $u(x)$ sürekli bir fonksiyondur.

Şimdi denklemin her iki tarafının 0'dan x'e integralini alalım.

$$y'(x)-y'(0)=\int_0^x u(t)dt \tag{2.37}$$

veya

$$y'(x)=\beta+\int_0^x u(t)dt \tag{2.38}$$

elde edilir.

Denklemin her iki tarafının tekrar 0'dan x'e tekrar integral alınırsa,

$$y(x)-y(0)=\beta x+\int_0^x\int_0^x u(t)dtdt \tag{2.39}$$

veya

$$y(x)=\alpha+\beta x+\int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.40}$$

bulunur.

(2.36), (2.38) ve (2.40) denklemleri (2.35) denkleminde yerine yazılırsa;

$$u(x)+p(x)[b+\int_0^x u(t)dt]+q(x)[a+bx+\int_0^x (x-t)u(t)dt]=g(x) \tag{2.41}$$

denklemi elde edilir.

Son denklemi (2.42) şeklinde standart Volterra integral denklemi formunda ifade edelim.

$$u(x)=f(x)-\int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{2.42}$$

Burada

$$K(x,t)=p(x)+q(x)(x-t) \tag{2.43}$$

ve

$$f(x)=g(x)-[\beta p(x)+\alpha q(x)+\beta x q(x)] \tag{2.44}$$

şeklindedir [7].

3. MATERYAL-METOT

İntegral denklemler genel olarak çözülmesi zor denklemlerdir. Bu nedenle bu denklemleri çözmek için çok sayıda metot kullanılmaktadır. Bu metotlardan, Homotopi Perturbation Metodu ile bu metodun kullanılışlılığını ve etkinliğini karşılaştıracağımız metotlardan Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM), Direkt Hesaplama Metodu (DHM), Varyasyonel İterasyon Metodu (VİM) ve Ardışık Yaklaşımlar Metodunu (AYM) inceleyelim.

3.1. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

3.1. Teorem: (Fredholm Alternatif Teoremi)

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.1}$$

homojen Fredholm integral denklemi her zaman $u(x)=0$ aşikar çözümüne sahiptir. Fakat

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.2}$$

homojen olmayan Fredholm integral denklemi daima tek çözüme sahiptir. Bu teorem Fredholm alternatif teoremi olarak bilinir [7].

3.2. Teorem:

Eğer,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.3}$$

Fredholm integral denklemindeki $K(x,t)$ çekirdeği $a\le x\le b$ ve $a\le t\le b$ karesinde sınırlı, reel değerli ve sürekli bir fonksiyon ve $f(x)$ sürekli, reel değerli bir fonksiyon ise Fredholm integral denkleminin tek bir çözümünün olması için gerekli koşul,

$$|\lambda|.M.|b-a|<1 \tag{3.4}$$

olmasıdır. Burada $|K(x,t)|\le M$, M€R'dir [7].

3.3. Teorem:

$f(x)\in L_2[a,b]$, $x,y\in[a,b]$ için $K(x,y)$ çekirdeğinin sürekli olduğunu ve buradan $|K(x,y)|\le M$ şeklinde sınırlı olduğunu varsayalım. Bu durumda,

$$u(x)-\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt=f(x) \tag{3.5}$$

Volterra integral denklemi $\forall f(x),\lambda\in L_2[a,b]$ için $u(x)$ şeklinde tek bir çözüme sahiptir [8].

3.1.1. Adomian ayrıştırma metodunun Volterra integral denklemlerine uygulanması

Adomian Ayrıştırma Metodu, George Adomian tarafından 1980'lerin başında geliştirilen adi ve kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan bir metottur. Bu metodu kullanarak integral denklemlerin yaklaşık çözümlerini elde etmek mümkündür. Şimdi,

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \tag{3.6}$$

şeklinde II. türden Volterra integral denklemini ele alalım.

AAM'de $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu,

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x), \quad n\geq 0 \tag{3.7}$$

şeklinde sonsuz bir seri olarak düşünülür. Buradaki $u_n(x)$ bileşenleri tekrarlama bağıntısıyla elde edilir. (3.7) sonsuz serisi $u(x)$'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)dt\right) \tag{3.8}$$

ya da

$$u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)\left[u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots\right]dt \tag{3.9}$$

elde edilir. Bu eşitliklerden faydalanarak $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonu tekrarlama bağıntısı aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u_0(x)=f(x) \tag{3.10}$$

$$u_{n+1}(x)=\lambda\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt, \quad n\geq 0 \tag{3.11}$$

Oluşturulan tekrarlama bağıntısı kullanılarak integral denkleminin çözümü,

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\ldots \tag{3.12}$$

şeklinde bulunur [7,16].

Örnek 3.1.1. Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak

$$u(x)=1-\int_0^x u(t)dt \tag{3.13}$$

Volterra integral denklemini çözelim.

Çözüm:

(3.7) denklemi $u(x)$ yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)=1-\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt \tag{3.14}$$

$$\Rightarrow u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots=1-\int_0^x\left(u_0(t)+u_1(t)+u_2(t)+\cdots\right)dt \tag{3.15}$$

denklemleri elde edilir. Buradan tekrarlama bağıntısını yazarsak,

$$\begin{cases} u_0(x)=1 \\ u_{n+1}(x)=-\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t)\right)dt, \qquad n\geq 0 \end{cases} \tag{3.16}$$

ifadesi elde edilir. Sonuç olarak,

$$u_0(x)=1,$$

$$\begin{aligned} u_1(x)&=-\int_0^x u_0(t)dt=-\int_0^x 1dt=-x \\ u_2(x)&=-\int_0^x u_1(t)dt=-\int_0^x(-t)dt=\frac{1}{2!}x^2 \\ u_3(x)&=-\int_0^x u_2(t)dt=-\int_0^x \frac{1}{2!}t^2dt=-\frac{1}{3!}x^3 \end{aligned} \tag{3.17}$$

....

....

....

bulunur. O halde seri çözümü yazılırsa,

$$u(x)=1-x+\frac{1}{2!}x^2-\frac{1}{3!}x^3+\ldots \tag{3.18}$$

$$\Rightarrow u(x)=e^x \tag{3.19}$$

olarak bulunur.

3.1.2. Ardışık yaklaşımlar metodunun Volterra integral denklemlerine uygulanması

Picard iterasyon yöntemi de denilen ardışık yaklaşımlar yöntemi, başlangıç değer problemleri ya da integral denklemlerini çözmek için kullanılabilecek bir yöntemdir. Bu yöntem, bir başlangıç yaklaşım değeri ile başlayarak başarılı tahminlerle denklemi çözer. Başlangıç yaklaşım değeri diğer yaklaşımları belirlemek için bir tekrarlama bağıntısı oluşturan gerçek değerli herhangi bir fonksiyondur [7].

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u(t)dt \qquad (3.20)$$

şeklinde II. türden lineer bir Volterra integral denklemi verilsin.

Burada $u(x)$ belirlenecek olan bilinmeyen bir fonksiyon, $K(x,t)$ çekirdek ve λ sabit bir değer olmak üzere Ardışık Yaklaşımlar Metodunun tekrarlama bağıntısı,

$$u_n(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u_{n-1}(t)dt, \quad n\geq 1 \qquad (3.21)$$

şeklindedir.

Burada başlangıç değer olan $u_0(x)$ herhangi reel değerli bir fonksiyon olabilir. Biz genellikle $u_0(x)$ için 0, 1 veya x 'i seçeceğiz ve (3.20) denkleminde yazarak ardışık u_n yaklaşımları elde edeceğiz. $(n\geq 1)$

$$u_1(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u_0(t)dt,$$

$$u_2(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u_1(t)dt,$$

$$u_3(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u_2(t)dt, \qquad (3.22)$$

....

....

$$u_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_0^x K(x,t)u_n(t)dt,$$

Oluşturulan tekrarlama bağıntısı kullanılarak integral denkleminin çözümü,

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}(x) \qquad (3.23)$$

şeklinde elde edilir.

Örnek 3.1.2.

Ardışık Yaklaşımlar Metodunu kullanarak,

$$u(x)=1-\int_0^x (x-t)u(t)dt. \tag{3.24}$$

Volterra integral denklemini çözelim.

Çözüm:

Sıfırıncı başlangıç yaklaşımı için

$u_0(x)=1$ seçelim.

Ardışık Yaklaşımlar Metodu için aşağıdaki tekrarlama formülünü kullanacağız.

$$u_{n+1}(x)=1-\int_0^x (x-t)u(t)dt, \qquad n\geq 0 \tag{3.25}$$

$$n=0 \text{ için; } u_1(x)=1-\int_0^x (x-t)u_0(t)dt=1-\frac{1}{2!}x^2$$

$$n=1 \text{ için; } u_2(x)=1-\int_0^x (x-t)u_1(t)dt=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4 \tag{3.26}$$

$$n=2 \text{ için; } u_3(x)=1-\int_0^x (x-t)u_2(t)dt=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6$$

.

.

elde edilir. Sonuç olarak,

$$u_{n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!} \tag{3.27}$$

denklemi elde edilir. Buradan da çözüm,

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_{n+1}(x)=\cos x \tag{3.28}$$

olarak bulunur.

3.1.3. Direkt hesaplama metodunun Fredholm integral denklemine uygulanması

Bu metot Fredholm integral denklemlerine doğrudan yaklaşır ve çözümü seri olarak değil tam olarak verir. Bu yöntem yalnızca,

$$K(x,t)=\sum_{k=1}^{n} g_k(x)h_k(t). \tag{3.29}$$

şeklinde dejenere veya ayrılabilir çekirdekler için uygulanabilir.

Ayrılabilir çekirdek örnekleri $x-t, xt, x^2-t^2, xt^2+x^2t$ şeklinde verilebilir.

Direkt Hesaplama Metodu aşağıdaki adımlar takip edilerek uygulanabilir.

1) (3.29) ayrılabilir çekirdeğini,

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.30}$$

Fredholm integral denkleminde yazalım.

2) (3.29) denklemindeki ayrılabilir çekirdek yerine yazılırsa,

$$u(x)=f(x)+g_1(x)\int_a^b h_1(t)u(t)dt+\int_a^b h_2(t)u(t)dt+\cdots+g_n(x)\int_a^b h_n(t)u(t)dt. \tag{3.31}$$

elde edilir.

3) Sağ taraftaki her integral, sadece t için sabit integrasyon sınırları olan t değişkenine bağlıdır. Bu, her integralin bir sabite eşit olduğu anlamına gelir. Buna göre (3.31) denklemi,

$$u(x)=f(x)+\lambda\alpha_1 g_1(x)+\lambda\alpha_2 g_2(x)+\cdots\lambda\alpha_n(x) \tag{3.32}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada

$$\alpha_i=\int_a^b h_i(t)u(t)dt, \qquad 1\le i\le n \tag{3.33}$$

şeklindedir.

4) (3.32)'nin (3.33) 'e dönüştürülmesi α_i, $1\le i\le n$ sabitlerini belirlemek için çözülebilecek bir cebirsel denklem sistemini verir. Elde edilen α_i sayısal değerleri (3.32)'de kullanılarak Fredholm integral denkleminin $u(x)$ çözümü kolayca bulunabilir [7].

Örnek 3.1.3.:

$$u(x)=3x+3x^2+\frac{1}{2}\int_0^1 x^2 t u(t)dt \tag{3.34}$$

Fredholm integral denklemini Direkt Hesaplama Metodunu kullanarak çözelim.

Çözüm:

$K(x,t)=x^2t$ çekirdeği ayrılabilirdir. Bu sebeple (3.34) denklemini,

$$u(x)=3x+3x^2+\frac{1}{2}x^2\int_0^1 tu(t)dt \tag{3.35}$$

şeklinde yazabiliriz.

Sağ taraftaki integral bir sabite eşittir. Çünkü sadece t değişkeninin sabit integrasyon sınırları olan fonksiyonlarına bağlıdır. Sonuç olarak (3.35) denklemini,

$$u(x)=3x+3x^2+\frac{1}{2}\alpha x^2 \tag{3.36}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada

$$\alpha=\int_0^1 tu(t)dt \tag{3.37}$$

şeklindedir.

α 'yı elde etmek için (3.36) denklemi (3.37) denkleminde aşağıdaki gibi yerine yazılırsa,

$$\alpha=\int_0^1 t\left(3t+3t^2+\frac{1}{2}\alpha t^2\right)dt \tag{3.38}$$

denklemi elde edilir. Buradan integral hesaplandığında,

$$\alpha=\frac{7}{4}+\frac{1}{8}\alpha \tag{3.39}$$

ve

$$\alpha=2 \tag{3.40}$$

elde edilir. Burada elde edilen (3.40) denklemi (3.36)'da yerine yazıldığında,

$$u(x)=3x+4x^2 \tag{3.41}$$

tam çözümü elde edilir.

3.1.4. Varyasyonel iterasyon metodunun Fredholm integral denklemlerine uygulanması

Bu metot Ji-Huan He tarafından geliştirilen bir metottur. Sistem için bir düzeltme fonksiyoneli oluşturması bu metodun temel özelliğidir. Lineer olmayan denklemlerin çözümünde etkili bir metottur [7,18,21].

$$u(x)=f(x)+\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.42}$$

ya da

$$u(x)=f(x)+g(x)\int_a^b h(t)u(t)dt \tag{3.43}$$

denklemini ele alalım.

(3.43) denkleminin her iki tarafının türevi alınırsa,

$$u'(x)=f'(x)+g'(x)\int_a^b h(t)u(t)dt \tag{3.44}$$

denklemi elde edilir.

(3.44) integro-diferansiyel denklemi için fonksiyonel düzeltme yapılırsa

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)+\int_0^x \lambda(\xi)\left(u_n'(\xi)-f'(\xi)-g'(\xi)\int_a^b h(r)\tilde{u}(r)dr \right)d\xi \tag{3.45}$$

denklemi elde edilir.

Burada 1.mertebeden İntegro-diferansiyel denklemi için Lagrange Çarpanı $\lambda(\xi) = -1$ kullanılır. Belirlenen λ, sınır değişikliği olmadan (3.45) denkleminde yazılırsa,

$$u_{n+1}(x)=u_n(x)-\int_0^x \left(u_n'(\xi)-f'(\xi)-g'(\xi)\int_a^b h(r)\tilde{u}(r)dr \right)d\xi \tag{3.46}$$

denklemi elde edilir. Ardışık yaklaşımların belirlenmesi için $n\geq 0$ olmak üzere $u_{n+1}(x)$ ifadeleri kullanılır. u_0 sıfırıncı yaklaşım seçilen herhangi bir değer olabilir. $u(0)$ başlangıç değeri tercihen $u(0)=0$ olarak kullanılabilir. Sonuç olarak çözüm aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u(x)=\lim_{n\to\infty} u_n(x) \tag{3.47}$$

Örnek 3.1.4.:

Varyasyonel İterasyon Metodunu kullanarak aşağıdaki Fredholm integral denklemini çözelim.

$$u(x)=\sin x-x+x\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt \tag{3.48}$$

Çözüm:

Denklemin her iki tarafının x'e göre türevini alalım.

$$u'(x) = \cos x - 1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} u(t)dt \tag{3.49}$$

Bu denklemin düzeltme fonksiyonu aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u'_n(\xi) - \cos\xi + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_n(r)dr \right) d\xi \tag{3.50}$$

Birinci dereceden integro-diferansiyel denklemleri için $\lambda = -1$ olarak alacağız. $u_0(x) = u(0) = 0$ başlangıç koşulu, (3.50) düzeltme fonksiyonunda yerine yazılırsa aşağıdaki ardışık yaklaşımlar elde edilir.

$$u_0(x) = 0, \tag{3.51}$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= u_0(x) - \int_0^x \left(u'_0(\xi) - \cos\xi + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(r)dr \right) d\xi \\ &= \sin x - x \end{aligned} \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned} u_2(x) &= u_1(x) - \int_0^x \left(u'_1(\xi) - \cos\xi + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(r)dr \right) d\xi \\ &= (\sin x - x) + (x - \frac{\pi^2}{8}x) \end{aligned} \tag{3.53}$$

$$\begin{aligned} u_3(x) &= u_2(x) - \int_0^x \left(u'_2(\xi) - \cos\xi + 1 - \int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(r)dr \right) d\xi \\ &= (\sin x - x) + (x - \frac{\pi^2}{8}x) + (\frac{\pi^2}{8}x - \frac{\pi^4}{64}x) \end{aligned} \tag{3.54}$$

.

.

.

Gürültü terimleri yok sayılırsa çözüm,

$$u(x) = \sin x \tag{3.55}$$

olarak bulunur.

3.1.5. Homotopi perturbation metodu

Homotopi Perturbation Metodu integral denklemlerini çözmede etkili bir metottur ve bu metotla çeşitli lineer ve lineer olmayan integral denklemlerini çözebiliriz. Bunun için aşağıdaki (3.56) lineer olmayan diferansiyel denklemi ele alalım.

$$A(u) - f(r) = 0, \qquad r \in \Omega \tag{3.56}$$

$$B\left(u, \frac{\partial u}{\partial n}\right) = 0, \qquad r \in \Gamma \tag{3.57}$$

Burada A diferansiyel operatör, B sınır operatörü, $f(r)$ bilinen analitik bir fonksiyon ve Γ da Ω bölgesinin sınırıdır. A operatörü L ve N şeklinde iki parçaya bölünebilir. Burada L lineer N'de lineer olmayan kısımdır. Dolayısıyla (3.56) denklemi,

$$L(u) + N(u) - f(r) = 0 \tag{3.58}$$

şeklinde yazılabilir. Homotopi tekniğiyle,

$$H(v,p) = (1-p)\left[L(v) - L(u_0)\right] + p\left[A(v) - f(r)\right] = 0 \tag{3.59}$$

yada

$$H(v,p) = L(v) - L(u_0) + pL(u_0) + p\left[N(v) - f(r)\right] = 0 \tag{3.60}$$

ifadelerini sağlayan,

$$v(r,p) : \Omega x\left[0,1\right] \to R$$

şeklinde bir homotopi kurabiliriz. Burada; $p \in \left[0,1\right]$ bir gömme parametresidir. u_0'da genel olarak sınır koşullarını sağlayan (3.56) denkleminin başlangıç yaklaşımıdır. Açık bir şekilde (3.59) yada (3.60)'dan,

$$H(v,0) = L(v) - L(u_0) = 0 \tag{3.61}$$

$$H(v,1) = A(v) - f(r) = 0 \tag{3.62}$$

elde edilir.

$p = 0$ olduğunda (3.59) denklemi lineer bir denklem ve $p = 1$ olduğunda orijinal lineer olmayan denklem olur. Böylece 0'dan 1'e p-nin değişim süreci $L(v) - L(u_0)$ 'dan

$A(v)-f(r)$ orijinal denklemine deforme olduğunu gösterir. Bu, homotopi metodunun temel fikridir. (3.59) denkleminin çözümü için v, perturbation tekniği kullanılarak (3.63) şeklinde p'nin bir kuvvet serisi formunda yazılabilir.

$$v=v_0+pv_1+p^2v_2+\cdots \tag{3.63}$$

p=1 alırsak (3.56)'nın yaklaşık çözümü,

$$u=\lim_{p\to 1} v=v_0+v_1+v_2+\cdots \tag{3.64}$$

şeklinde olur. (3.63) serisi $p\to 1$ iken çözüm bölgesinin tümünde yakınsak olabilir. Homotopi Perturbation Metodu geleneksel perturbation metodunun kısıtlamalarını yok etmiştir [10,19,20,21].

<u>Homotopi perturbation metodunun Fredholm integral denklemlerine uygulanması</u>

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{3.65}$$

şeklinde ikinci tür Fredholm integral denklemi ele alalım. (3.65) integral denklemi için F(u) ve L(u) operatörü,

$$\begin{aligned} &F(u)=u(x)-f(x)\\ &L(u)=u(x)-f(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt=0 \end{aligned} \tag{3.66}$$

eşitliği ile ifade edilsin. (3.65) integral denklemi için homotopi,

$$H(u,p)=(1-p)F(u)+pL(u)=0. \tag{3.67}$$

şeklinde ifade edilir. Bu homotopi denkleminde p gömme parametresi, tanımlı olduğu $p\in\left[0,1\right]$ aralığında düzenli olarak artar. HPM bu genişlemenin kullanımını ortaya koyar. Bu sayede $H(u,0)=F(u),\quad H(u,1)=L(u)$ olduğu kolayca görülebilir.

$$u=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots \tag{3.68}$$

serisi (3.67) homotopi denkleminde yerine yazıldığında,

$$\begin{aligned} &H(u,p)=(1-p)((u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots)-f(x))\\ &+p\left((u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots)-f(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots)dt\right)=0 \end{aligned} \tag{3.69}$$

denklemi elde edilir. p'nin aynı kuvvete sahip terimleri bir araya getirildiğinde;

$$H(u,p)=p^0(u_0-f(x))+p^1\left(u_1-\lambda\int_a^b K(x,t)u_0dt\right)+p^2\left(u_2-\lambda\int_a^b K(x,t)u_1dt\right)+\cdots=0 \tag{3.70}$$

ifadesi elde edilir. Buradan,

$p^0: u_0(x)-f(x)=0 \Rightarrow u_0(x)=f(x)$

$p^1: u_1(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_0(t)dt$

$p^2: u_2(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_1(t)dt$

....

....

....

$$p^{n+1}: u_{n+1}(x)=\lambda\int_a^b K(x,t)u_n(t)dt, n\geq 0 \tag{3.71}$$

eşitlikleri elde edilir. Dolayısıyla ele alınan integral denklemin HPM ile çözümü;

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+\cdots \tag{3.72}$$

olarak bulunur [7,10,11,16].

3.1.Tanım

$u_1, u_2, u_3, \ldots$ bir fonksiyon dizisi olsun. Eğer,

$$s_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(x) \tag{3.73}$$

ile tanımlanan (s_n) kısmi toplamlar dizisi u 'ya yakınsak ise, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ serisi de u 'ya yakınsaktır, denir [12].

3.4. Teorem

(3.65) denklemini çözmek için

$$s_0(x)=f(x),$$
$$s_{n+1}(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,t)s_n(t)dt \qquad (n=0,1,2,\dots) \tag{3.74}$$

şeklinde $s_n(x)$ ardışık iterasyon dizisini ele alalım. Ayrıca,

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt=B^2<\infty \tag{3.75}$$

ve $f(x)\in L^2(a,b)$ olsun. Bu durumda, eğer $|\lambda|<\frac{1}{B}$ ise yukarıdaki iterasyon $L^2(a,b)$ normunda (3.65) denkleminin çözümüne yakınsaktır [12].

Örnek 3.1.5. Homotopi Perturbation Metodunu kullanarak

$$u(x)=\sqrt{x}+\lambda\int_0^1 xtu(t)dt \tag{3.76}$$

Fredholm integral denklemini çözelim.

Çözüm:

Önce operatörleri tanımlayalım.

$$F(u)=u(x)-\sqrt{x}$$
$$L(u)=u(x)-\sqrt{x}-\int_0^1 xtu(t)dt \tag{3.77}$$

Şimdide aşağıdaki konveks homotopiyi oluşturalım.

$$H(u,p)=(1-p)F(u)+pL(u)=0. \tag{3.78}$$

$$H(u,p)=u(x)-\sqrt{x}-p\int_0^1 xtu(t)dt=0 \tag{3.79}$$

Buradan (3.76) denkleminin tekrarlama bağıntısı,

$$s_{n+1}(x)=\sqrt{x}+\lambda\int_0^1 (xt)s_n(t)dt. \tag{3.80}$$

şeklindedir. Ayrıca $u_0(x)=\sqrt{x}$ ve (3.80) denkleminden dolayı

$$u(x)=\sqrt{x}+p\lambda\int_0^1 xtu(t)dt \tag{3.81}$$

yazılabilir.

(3.68) serisini (3.81) denkleminde yerine yazarsak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

$$\begin{aligned}
&p^0 : u_0(x) = \sqrt{x} \\
&p^1 : u_1(x) = \int_0^1 xt\sqrt{t}dt = \frac{2\lambda}{5}x, \\
&p^2 : u_2(x) = \int_0^1 xt\frac{2\lambda}{5}tdt = \frac{2\lambda^2}{15}x, \\
&p^3 : u_3(x) = \int_0^1 xt\frac{2\lambda^2}{15}tdt = \frac{2\lambda^3}{45}x, \\
&. \\
&. \\
&.
\end{aligned} \tag{3.82}$$

elde edilir. Buradan,

$$s_n(x) = \sqrt{x} + \left(\frac{2}{5.3^0}\lambda + \frac{2}{5.3^1}\lambda^2 + \frac{2}{5.3^2}\lambda^3 + \cdots\right)x = \sqrt{x} + \left(\frac{6}{5}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\lambda}{3}\right)^i x\right) \tag{3.83}$$

çözümünü elde ederiz.

Eğer $|\lambda| < 3$ ise, yukarıdaki dizi yakınsaktır.

Burada şunu da not etmek gerekirse Teorem 3.4.'den,

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt = \int_0^1\int_0^1 (xt)^2 dxdt = \frac{1}{9} = B^2. \tag{3.84}$$

bulunur. $|\lambda| < 3$ ise (3.76) denklemi yakınsaktır.

3.5. Teorem

Adomian Ayrıştırma Metodu

$$H(u,p) = u(x) - f(x) - p\int_a^b K(x,t)u_n(t)dt = 0 \tag{3.85}$$

şeklinde verilen konveks homotopisi ile bir Homotopi Perturbation Metodudur [7].

3.2. Volterra ve Fredholm İntegral Denklem Sistemleri

3.2.1. Adomian ayrıştırma metodunun Volterra integral denklem sistemlerine uygulanması

Lineer veya lineer olmayan integral denklem sistemleri mühendislik, fizik, kimya ve popülasyon büyüme modellerinde ve bilimsel uygulamalarında karşımıza çıkmaktadır. İntegral denklem sistemleri çalışmaları uygulamalı bilimlerde çok ilgi çekmiştir. Bu sistemlerin genel görüşleri ve temel özellikleri geniş uygulanabilirliğe sahiptir [7].

Volterra integral denklem sistemleri iki türde karşımıza çıkar. Birinci tür Volterra integral denklem sistemleri için, bilinmeyen fonksiyonlar yalnızca integral işareti altında görülür. Buna örnek olarak aşağıdaki sistem verilebilir.

$$f_1(x)=\int_0^x\left(K_1(x,t)u(t)+\tilde{K}_1(x,t)v(t)+\cdots\right)dt$$

$$f_2(x)=\int_0^x\left(K_2(x,t)u(t)+\tilde{K}_2(x,t)v(t)+\cdots\right)dt \tag{3.86}$$

.
.
.

İkinci türden Volterra integral denklem sistemlerinde ise bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işaretinin içinde ve dışında bulunur. Aşağıdaki sistem buna örnek olarak gösterilebilir.

$$u_1(x)=f_1(x)+\int_0^x\left(K_1(x,t)u_1(t)+\tilde{K}_1(x,t)u_2(t)+\cdots\right)dt$$

$$u_2(x)=f_2(x)+\int_0^x\left(K_2(x,t)u_1(t)+\tilde{K}_2(x,t)u_2(t)+\cdots\right)dt. \tag{3.87}$$

Burada $K_1(x,t)$ ve $K_2(x,t)$ ile $f_i(x)$, $(i=1,2,3,\cdots)$ fonksiyonları reel değerli fonksiyonlardır.

Şimdi ikinci türden bir Volterra integral denklem sistemi için Adomian Ayrıştırma Metodunun nasıl uygulandığını gösterelim.

Örnek 3.2.1. Aşağıdaki Volterra integral denklem sistemini Adomian Ayrıştırma Metoduyla çözelim.

$$u_1(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x \left((x-t)^2 u_1(t) + (x-t)u_2(t)\right)dt,$$
$$u_2(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x \left((x-t)^3 u_1(t) + (x-t)^2 u_2(t)\right)dt. \tag{3.88}$$

Çözüm:

Adomian Ayrıştırma Metodunda $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ lineer terimleri

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(x), \quad u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x) \tag{3.89}$$

şeklinde sonsuz serileri ile ifade edilir.

Burada $u_{1n}(x)$ ve $u_{2n}(x)$ fonksiyonları $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ fonksiyonlarının tekrarlı bileşenleridir.

(3.89) denklemleri (3.88)'de yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(x) = x - \frac{1}{6}x^4 + \int_0^x \left((x-t)^2 \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(t) + (x-t)\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(t) \right)dt,$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x) = x^2 - \frac{1}{12}x^5 + \int_0^x \left((x-t)^3 \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(t) + (x-t)^2\sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(t) \right)dt. \tag{3.90}$$

denklemleri elde edilir. Sıfırıncı bileşenler $u_{10}(x)$ ve $u_{20}(x)$ integral işareti altında bulunmayan tüm terimler tarafından tanımlanır ve (3.90) denklemi aşağıdaki şekilde tekrarlı olarak ifade edilebilir.

$$u_{10}(x) = x - \frac{1}{6}x^4,$$
$$u_{1,k+1}(x) = \int_0^x \left((x-t)^2 u_{1k}(t) + (x-t)u_{2k}(t)\right)dt, \; k \geq 0, \tag{3.91}$$

ve

$$u_{20}(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5,$$
$$u_{2(k+1)}(x)=\int_0^x\Big((x-t)^3u_{1k}(t)+(x-t)^2u_{2k}(t)\Big)dt,\ k\geq 0, \tag{3.92}$$

Bunun sonucunda,

$$u_{10}(x)=x-\frac{1}{6}x^4,\ u_{11}(x)=\frac{1}{6}x^4-\frac{1}{280}x^7, \tag{3.93}$$

ve

$$u_{20}(x)=x^2-\frac{1}{12}x^5,\ u_{21}(x)=\frac{1}{12}x^5-\frac{11}{10080}x^8. \tag{3.94}$$

şeklinde elde edilir.

Burada açık olarak görülür ki gürültü terimleri $\pm\frac{1}{6}x^4$ $u_{10}(x)$ ve $u_{11}(x)$ arasındadır. Aynı şekilde gürültü terimleri $\pm\frac{1}{12}x^5$ $u_{20}(x)$ ve $u_{21}(x)$ arasındadır. Bu gürültü terimleri denklemden atılırsa $u_1(x)$ ve $u_2(x)$ tam çözümleri elde edilir. Yani,

$$\big(u_1(x),u_2(x)\big)=\big(x,x^2\big) \tag{3.95}$$

şeklindedir.

3.2.2. Direkt hesaplama metodunun Fredholm integral denklem sistemlerine uygulanması

İkinci türden Fredholm integral denklem sistemlerini çözmek için Direkt Hesaplama Metodunun uygulanacağı adımları aşağıdaki şekilde özetleyebiliriz [7].

Direkt Hesaplama Metodu,

$$K_1(x,t)=\sum_{k=1}^{n}g_k(x)h_k(t)\ \text{ve}\ K_2(x,t)=\sum_{k=1}^{n}r_k(x)s_k(t) \tag{3.96}$$

gibi dejenere veya ayrılabilir çekirdekler için uygulanacaktır.

1) İlk olarak ayrılabilir çekirdeğe sahip Fredholm integral denklemlerini belirleyelim.

$$u_1(x) = f_1(x) + \int_a^b \left(K_1(x,t)u_1(t) + \tilde{K}_1(x,t)u_2(x,t) \right) dt,$$
$$u_2(x) = f_2(x) + \int_a^b \left(K_2(x,t)u_1(t) + \tilde{K}_2(x,t)u_2(x,t) \right) dt \tag{3.97}$$

2) (3.96) denklemlerinin eşiti (3.97)'de yerine yazılırsa,

$$u_1(x) = f_1(x) + \sum_{k=1}^{n} g_k(x) \int_a^b h_k(t)u_1(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{g}_k(x) \int_a^b \tilde{h}_k(t)u_2(t)dt,$$
$$u_2(x) = f_2(x) + \sum_{k=1}^{n} r_k(x) \int_a^b s_k(t)u_1(t)dt + \sum_{k=1}^{n} \tilde{r}_k(x) \int_a^b \tilde{s}_k(t)u_2(t)dt. \tag{3.98}$$

elde edilir.

3) (3.98) denklemlerinde sağ taraftaki her integral, sadece t için sabit integrasyon sınırları olan t değişkenine bağlıdır. Bu, her integralin bir sabite eşit olduğu anlamına gelir. Buradan (3.98) denklemi,

$$u_1(x) = f_1(x) + \alpha_1 g_1(x) + \cdots + \alpha_n g_n(x) + \beta_1 \tilde{g}_1(x) + \cdots + \beta_n \tilde{g}_n(x),$$
$$u_2(x) = f_2(x) + \gamma_1 r_1(x) + \cdots + \gamma_n r_n(x) + \delta_1 \tilde{r}_1(x) + \cdots + \delta_n \tilde{r}_n(x), \tag{3.99}$$

şeklinde yazılır ve buradan da,

$$\alpha_i = \int_a^b h_i(t)u_1(t)dt, \quad 1 \le i \le n,$$
$$\beta_i = \int_a^b \tilde{h}_i(t)u_2(t)dt, \quad 1 \le i \le n,$$
$$\gamma_i = \int_a^b s_i(t)u_1(t)dt, \quad 1 \le i \le n,$$
$$\delta_i = \int_a^b \tilde{s}_i(t)u_2(t)dt, \quad 1 \le i \le n. \tag{3.100}$$

şeklinde elde edilir.

4) $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ sabitlerini bulmak için (3.100) denklemi (3.98) denkleminde yerine yazılırsa dört bilinmeyenli bir denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu sabitler (3.98) denkleminde tekrar yerine yazılırsa (3.96) Fredholm integral denklem sisteminin çözümü elde edilir.

Örnek 3.2.2. Aşağıdaki Fredholm integral denklem sistemini Direkt Hesaplama Metoduyla çözelim.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sec x - 2 + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\tan t u_1(t) + \sec t u_2(t)\right) dt, \\ u_2(x) &= -\left(1+\sqrt{3}\right) + \tan x + \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\sec t u_1(t) + \sec t u_2(t)\right) dt. \end{aligned} \tag{3.101}$$

Çözüm:

Direkt Hesaplama Metodunun çözüm adımları kullanılırsa,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \sec x - 2 + \alpha_1 + \beta_1, \\ u_2(x) &= \tan x - \left(1+\sqrt{3}\right) + \alpha_2 + \beta_1 \end{aligned} \tag{3.102}$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada,

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan t u_1(t) dt, \\ \alpha_2 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec t u_1(t) dt, \\ \beta_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sec t u_2(t) dt. \end{aligned} \tag{3.103}$$

şeklindedir. (3.103) denklemleri (3.102) denkleminde yerine yazılarak

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \sqrt{3}, \quad \beta_1 = 1 \tag{3.104}$$

olarak elde edilir. Elde edilen (3.104) sabitleri tekrar (3.102) denkleminde yerine yazılırsa Fredholm integral denklem sisteminin çözümü,

$$\left(u_1(x), u_2(x)\right) = \left(\sec x, \tan x\right) \tag{3.105}$$

şeklinde elde edilir.

3.2.3. Ardışık yaklaşımlar metodunun Fredholm integral denklem sistemlerine uygulanması

$$u_1(x)=f_1(x)+\int_a^b\left(K_1(x,t)u_1(t)+\tilde{K}_1(x,t)u_2(x,t)\right)dt,$$
$$u_2(x)=f_2(x)+\int_a^b\left(K_2(x,t)u_1(t)+\tilde{K}_2(x,t)u_2(x,t)\right)dt. \qquad (3.106)$$

Fredholm integral denklem sisteminin AYM ile çözümünü gösterelim.
AYM ‘nin tekrarlama bağıntısı,

$$u_{1n}(x)=f_1(x)+\int_a^b\left(K_1(x,t)u_{1(n-1)}(t)+\tilde{K}_1(x,t)u_{2(n-1)}(x,t)\right)dt,$$
$$u_{2n}(x)=f_2(x)+\int_a^b\left(K_2(x,t)u_{1(n-1)}(t)+\tilde{K}_2(x,t)u_{2(n-1)}(x,t)\right)dt. \quad ,n=1,2,3,\cdots \qquad (3.107)$$

şeklindedir. Burada $u_{10}(x)$ ve $u_{20}(x)$ reel değerli fonksiyonlar olarak seçilebilir. Genellikle bu başlangıç değerlerini 0,1 ve x olarak seçeceğiz ve (3.107) denkleminde yazarak $u_{1k}(x)$, $u_{2k}(x)$ $(k\geq 1)$ yaklaşımlarını elde edeceğiz.

$$u_{1(n+1)}(x)=f_1(x)+\int_a^b\left(K_1(x,t)u_{1n}(t)+\tilde{K}_1(x,t)u_{2n}(x,t)\right)dt,$$
$$u_{2(n+1)}(x)=f_2(x)+\int_a^b\left(K_2(x,t)u_{1n}(t)+\tilde{K}_2(x,t)u_{2n}(x,t)\right)dt. \qquad (3.108)$$

Oluşturulan tekrarlama bağıntısı kullanılarak Fredholm integral denklem sisteminin çözümü,

$$u_1(x)=\lim_{n\to\infty}u_{1(n+1)}(x)$$
$$u_2(x)=\lim_{n\to\infty}u_{2(n+1)}(x) \qquad (3.109)$$

şeklinde elde edilir [7,13].

Örnek 3.2.3.

$$u_1(x)=\sin x+\cos x-4x+\int_0^{\pi}\left(xu_1(t)+xu_2(t)\right)dt$$
$$u_2(x)=\sin x-\cos x+\int_0^{\pi}\left(u_1(t)-u_2(t)\right)dt \qquad (3.110)$$

Fredholm integral denklem sistemini Ardışık Yaklaşımlar Metoduyla çözelim.

Çözüm:

(3.110) Fredholm integral denklem sisteminin AYM için oluşturulan tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} u_{1n}(x) &= \sin x + \cos x - 4x + \int_0^{\pi} \left(x u_{1(n-1)}(t) + x u_{2(n-1)}(t) \right) dt \\ u_{2n}(x) &= \sin x - \cos x + \int_0^{\pi} \left(u_{1(n-1)}(t) - u_{2(n-1)}(t) \right) dt \end{aligned} \tag{3.111}$$

şeklindedir. Burada,

$$\begin{aligned} u_{10}(x) &= 0 \\ u_{20}(x) &= 0 \end{aligned} \tag{3.112}$$

olarak seçilirse,

$$n = 1 \text{ için; } \begin{cases} u_{11}(x) = \sin x + \cos x - 4x \\ u_{21}(x) = \sin x - \cos x \end{cases} \tag{3.113}$$

$$n = 2 \text{ için; } \begin{cases} u_{12}(x) = \sin x + \cos x - 2\pi^2 x \\ u_{22}(x) = \sin x - \cos x - 2\pi^2 + 4 \end{cases} \tag{3.114}$$

$$n = 3 \text{ için; } \begin{cases} u_{13}(x) = \sin x + \cos x - \pi^4 x - 2\pi^3 x + 4\pi x \\ u_{23}(x) = \sin x - \cos x - \pi^4 - 2\pi^3 + 4\pi + 4 \end{cases} \tag{3.115}$$

.
.
.

elde edilir.

Buradan çözüm,

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \lim_{n \to \infty} u_{1(n+1)}(x) = \sin x + \cos x \\ u_2(x) &= \lim_{n \to \infty} u_{2(n+1)}(x) = \sin x - \cos x \end{aligned} \tag{3.116}$$

şeklinde bulunur.

3.2.4. Homotopi perturbation metodunun integral denklem sistemlerine uygulanması

Fredholm ve Volterra tipindeki integral denklem sistemlerinin HPM ile çözümü için aşağıdaki denklemleri seçelim.

$$u_i(x)=f_i(x)+z_i\big(x,u(x)\big)+\int_a^b v_i\big(x,t,u(t)\big)dt,\quad i=1(1)n,$$
$$u_i(x)=f_i(x)+z_i\big(x,u(x)\big)+\int_a^x v_i\big(x,t,u(t)\big)dt,\quad i=1(1)n,\qquad (3.117)$$

Burada $u(x)=(u_1(x),u_2(x),...,u_n(x))$ şeklindedir.

(3.117) sistemlerinin çözümlerinin bulunduğunu varsayalım. Bu sistemlerin çözümünün varlığı [23] nolu referansta mevcuttur.

İlk önce HPM'nin

$$L(u)=0 \qquad (3.118)$$

şeklinde genel denklemini ele alalım. Burada L bir integral veya diferansiyel operatörüdür. Şimdi konveks homotopiyi kuralım.

$$H(u,p)=(1-p)F(u)+pL(u)=0, \qquad (3.119)$$

Burada $F(u)$ çözümü bilinen bir operatördür. $H(u,0)=F(u)$ ve $H(u,1)=L(u)$ şeklindedir. Bu bize $H(u,p)$ 'nin $H(v_0,0)$ başlangıç noktasından $H(u,1)$ çözüm fonksiyonuna dolaylı olarak tanımlanmış bir eğriyi sürekli takip ettiğini gösterir. Gömme parametresi p monoton bir şekilde 0'dan 1'e artar. Burada önemsiz $F(u)=0$ fonksiyonu orijinal $L(u)=0$ fonksiyonuna deforme olur. p gömme parametresi elde edilecek bir genişleme parametresi olarak düşünülebilir.

Çözümü,

$$u=\sum_{i=0}^{\infty}p^i u_i=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots \qquad (3.120)$$

şeklinde arayalım.

$p\to 1$ giderken (3.119), (3.117)'e karşılık gelir ve (3.117)'in yaklaşık çözümünü verir.

O halde çözüm,

$$u=\lim_{p\to 1}u=\sum_{i=0}^{\infty}u_i \qquad (3.121)$$

şeklinde elde edilir. Buradan, (3.117) integral denklem sistemlerinin çözümü,

$$u_1(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p^i u_{1i}=u_{10}+pu_{11}+p^2u_{12}+\cdots$$

$$u_2(x)=\sum_{i=0}^{\infty}p^i u_{2i}=u_{20}+pu_{21}+p^2u_{22}+\cdots \tag{3.122}$$

.

.

.

şeklinde elde edilir [14].

Örnek 3.2.4. Tam çözümleri

$$u_1(x)=x^2 \;, u_2(x)=-x+x^2+x^3 \tag{3.123}$$

olan

$$\begin{aligned} u_1(x)&=-\frac{1}{20}+\frac{11}{30}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3+\int_0^1\Big((x-t)^3u_1(t)+(x-t)^2u_2(t)\Big)dt \\ u_2(x)&=\frac{1}{30}-\frac{19}{60}x+\frac{17}{20}x^2-\frac{11}{12}x^3+\frac{1}{3}x^4+\int_0^1\Big((x-t)^4u_1(t)+(x-t)^3u_2(t)\Big)dt \end{aligned} \tag{3.124}$$

(3.124) Fredholm integral denklem sistemini Homotopi Perturbation Metodu ile çözelim. HPM ile $H(u_1,u_2,p)$ konveks homotopiyi kuralım.

$$\begin{aligned} f_1(x)&=-\frac{1}{20}+\frac{11}{30}x-\frac{2}{3}x^2+\frac{1}{3}x^3 \\ f_2(x)&=\frac{1}{30}-\frac{19}{60}x+\frac{17}{20}x^2-\frac{11}{12}x^3+\frac{1}{3}x^4 \end{aligned} \tag{3.125}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} H_1(u_1,u_2,p)&=(1-p)(u_1(x)-f_1(x))+p(u_1(x)-f_1(x)) \\ &\quad -p\int_0^1\Big((x-t)^3u_1(t)+(x-t)^2u_2(t)\Big)dt=0 \\ H_2(u_1,u_2,p)&=(1-p)(u_2(x)-f_2(x))+p(u_2(x)-f_2(x)) \\ &\quad -p\int_0^1\Big((x-t)^4u_1(t)+(x-t)^3u_2(t)\Big)dt=0 \end{aligned} \tag{3.126}$$

şeklindedir.

(3.122) denklemi (3.126) denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde,

$$p^0: \quad \begin{aligned} u_{10}(x) &= -\frac{1}{20} + \frac{11}{30}x - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \\ u_{20}(x) &= \frac{1}{30} - \frac{19}{60}x + \frac{17}{20}x^2 - \frac{11}{12}x^3 + \frac{1}{3}x^4 \end{aligned} \tag{3.127}$$

$$p^1: \quad \begin{aligned} u_{11}(x) &= -\frac{89}{1800} + \frac{11}{30}x - \frac{161}{240}x^2 + \frac{61}{180}x^3 \\ u_{21}(x) &= \frac{209}{6300} - \frac{1601}{5040}x + \frac{41}{48}x^2 - \frac{133}{144}x^3 + \frac{61}{180}x^4 \end{aligned} \tag{3.128}$$

$$p^2: \quad \begin{aligned} u_{12}(x) &= -\frac{1}{1600} + \frac{1}{2016}x + \frac{163}{50400}x^2 - \frac{1}{200}x^3 \\ u_{22}(x) &= \frac{53}{252000} + \frac{11}{20160}x - \frac{101}{33600}x^2 + \frac{571}{100800}x^3 - \frac{1}{200}x^4 \end{aligned} \tag{3.129}$$

$$p^3: \quad \begin{aligned} u_{13}(x) &= \frac{17}{252000} - \frac{73}{151200}x + \frac{263}{288000}x^2 - \frac{83}{151200}x^3 \\ u_{23}(x) &= -\frac{19}{378000} + \frac{2629}{6048000}x - \frac{2279}{2016000}x^2 + \frac{7571}{6048000}x^3 - \frac{83}{151200}x^4 \end{aligned} \tag{3.130}$$

.

.

.

eşitlikleri elde edilir. Bu şekilde sistemin tüm terimlerini elde etmek güçtür. Bu sebeple,

$$\varphi_{i3}(x) = \sum_{k=0}^{3} u_{ik} \tag{3.131}$$

şeklinde ilk 3 terim toplamı kesilerek yaklaşık çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} \varphi_{13}(x) &= -\frac{1}{504000} + \frac{1}{75600}x + \frac{671987}{672000}x^2 + \frac{1}{151200}x^3 \\ \varphi_{23}(x) &= \frac{1}{756000} - \frac{6048071}{6048000}x + \frac{2016061}{2016000}x^2 + \frac{6047831}{6048000}x^3 + \frac{1}{151200}x^4 \end{aligned} \tag{3.132}$$

Bu yaklaşık çözüme ait sonuçlar Çizelge 3.1.’de gösterilmiştir. Ayrıca Çizelge 3.1.’de N değeri arttıkça hatanın azaldığı N=5 seçilerek ifade edilmiştir.

Çizelge 3.1. Örnek 3.2.4.’e ait hata analizi

x	N=3		N=5	
	$e_{HPM}(u_1(x))$	$e_{HPM}(u_2(x))$	$e_{HPM}(u_1(x))$	$e_{HPM}(u_2(x))$
0	6,9444e-5	5,1587e-5	1,5353e-9	7,0862e-10
0.2	3,0952e-6	6,1905e-7	2,3699e-10	3,5258e-10
0.4	1,5317e-5	8,9524e-6	5,0233e-10	3,7698e-10
0.6	1,2460e-5	2,8413e-6	1,8660e-10	1,7621e-10
0.8	1,5000e-5	9,6190e-6	2,1573e-10	1,7889e-10
1	4,9603e-5	4,1667e-5	1,5157e-9	1,3582e-9

4. BULGULAR

Bu bölümde birer Fredholm integral denklem sistemi, Volterra integral denklem sistemi ve Fredholm integral denklemi HPM ve bahsi geçen diğer metotlarla çözülecektir.

Örnek 4.1. Aşağıdaki Fredholm integral denklem sistemini Adomian Ayrıştırma Metodu, Homotopi Perturbation Metodu ve Direkt Hesaplama Metodu ile çözelim.

Tam çözümleri $u_1(x)=x+1$ ve $u_2(x)=x^2+1$ olan

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{x}{18}+\frac{17}{36}+\int_0^1 \frac{x+t}{3}\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt, \\ u_2(x) &= x^2-\frac{19}{12}x+1+\int_0^1 xt\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt. \end{aligned} \tag{4.1}$$

(4.1) Fredholm integral denklemini önce Adomian Ayrıştırma Metodu ile çözelim.

Ayrıştırma yöntemini kullanarak çözümleri türetmek için aşağıdaki Adomian şemasını kullanabiliriz.

$$\begin{aligned} u_{10}(x) &= \frac{x}{18}+\frac{17}{36} \cong 0,0556x+0,4722, \\ u_{20}(x) &= x^2-\frac{19}{12}x+1 \cong x^2-1,5833x+1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

ve

$$\begin{aligned} u_{1(m+1)}(x) &= \int_0^1 \frac{x+t}{3}\big(u_{1m}(t)+u_{2m}(t)\big)dt, \\ u_{2(m+1)}(x) &= \int_0^1 xt\big(u_{1m}(t)+u_{2m}(t)\big)dt, \qquad m=0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{4.3}$$

Buradan 1. iterasyon,

$$\begin{aligned} u_{11}(x) &= \int_0^1 \frac{x+t}{3}\big(u_{10}(t)+u_{20}(t)\big)dt=\frac{75}{12}x+\frac{103}{648} \cong 0,3472x+0,1590, \\ u_{21}(x) &= \int_0^1 xt\big(u_{10}(t)+u_{20}(t)\big)dt=\frac{103}{216}x \cong 0,4769. \end{aligned} \tag{4.4}$$

şeklinde elde edilir. İki terim için oluşan çözüm ise,

$$\varphi_{12}(x) = u_{10}(x) + u_{11}(x) \cong 0,4028x + 0,6312,$$
$$\varphi_{22}(x) = u_{20}(x) + u_{21}(x) \cong x^2 - 1,1065x + 1. \tag{4.5}$$

şeklindedir. Sıradaki terim,

$$u_{12}(x) = \int_0^1 \frac{x+t}{3}\left(u_{11}(t) + u_{21}(t)\right)dt = \frac{185}{972}x + \frac{17}{144} \cong 0,1903x + 0,1181,$$
$$u_{22}(x) = \int_0^1 xt\left(u_{11}(t) + u_{21}(t)\right)dt = \frac{17}{48}x \cong 0,3542x. \tag{4.6}$$

şeklinde bulunur. Bu terimle beraber oluşan çözüm ise,

$$\varphi_{13}(x) = u_{10}(x) + u_{11}(x) + u_{12}(x) \cong 0,5931x + 0,7492,$$
$$\varphi_{23}(x) = u_{20}(x) + u_{21}(x) + u_{22}(x) \cong x^2 - 0,7523x + 1. \tag{4.7}$$

şeklinde bulunur.

Aynı yolu izleyerek $\varphi_{1k}(x)$ ve $\varphi_{2k}(x)$ bileşenleri $k = 3,4,...$ için bulunabilir. 11 terimli çözüm aşağıdaki gibidir.

$$\varphi_{1,11}(x) = u_{10}(x) + u_{11}(x) + \cdots + u_{1,10}(x) \cong 0,9813x + 0,9885,$$
$$\varphi_{2,11}(x) = u_{20}(x) + u_{21}(x) + \cdots + u_{2,10}(x) \cong x^2 - 0,0345x + 1. \tag{4.8}$$

x'in bazı değerleri ve bunlara karşılık gelen mutlak hatalar için yaklaşık çözümler Çizelge 4.1.'de ifade edilmiştir [14,15].

Çizelge 4.1. Örnek 4.1.'e ait sayısal sonuçlar ve hata analizi.

x		N=11			N=11	
	$u_1(x)$	$\varphi_{1(11)}(x)$	$e_{AAM}(u_1(x))$	$u_2(x)$	$\varphi_{2(11)}(x)$	$e_{AAM}(u_2(x))$
0	1	0,988498	1,15e-2	1	1	0
0,1	1,1	1,086632	1,33e-2	1,01	1,006549	3,45e-3
0,2	1,2	1,184766	1,52e-2	1,04	1,033099	6,90e-3
0,3	1,3	1,282899	1,71e-2	1,09	1,079648	1,03e-2
0,4	1,4	1,381033	1,89e-2	1,16	1,146198	1,38e-2
0,5	1,5	1,479167	2,08e-2	1,25	1,232747	1,72e-2
0,6	1,6	1,577301	2,26e-2	1,36	1,339296	2,07e-2
0,7	1,7	1,675435	2,45e-2	1,49	1,465846	2,41e-2
0,8	1,8	1,773569	2,64e-2	1,64	1,612695	2,76e-2
0,9	1,9	1,871702	2,82e-2	1,81	1,778945	3,10e-2
1	2	1,969836	3,02e-2	2	1,965494	3,45e-2

Şimdi de Homotopi Perturbation Metodunu kullanarak çözümü bulalım.

HPM ile $H(u_1,u_2,p)$ konveks homotopiyi kuralım.

$$
\begin{aligned}
H_1(u_1,u_2,p) &= u_1(x) - f_1(x) - p\int_0^1 \frac{x+t}{3}\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt = 0,\\
H_2(u_1,u_2,p) &= u_2(x) - f_2(x) - p\int_0^1 xt\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt = 0.
\end{aligned}
\tag{4.9}
$$

(3.119) denklemi (4.9) denkleminde yerine yazıldığında ve p 'nin aynı kuvvete sahip terimleri eşitlendiğinde,

$$
p^0:\quad
\begin{aligned}
u_{10}(x) &= f_1(x) \Rightarrow u_{10}(x) = \frac{x}{18} + \frac{17}{36} \cong 0{,}0556x + 0{,}4722,\\
u_{20}(x) &= f_2(x) \Rightarrow u_{20}(x) = x^2 - \frac{19}{12}x + 1 \cong x^2 - 1{,}5833x + 1
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

$$p^1: \begin{aligned} u_{11}(x) &= \int_0^1 \frac{x+t}{3}\left(u_{10}(t)+u_{20}(t)\right)dt \Rightarrow u_{11}(x) \cong 0{,}3472x+0{,}1590, \\ u_{21}(x) &= \int_0^1 xt\left(u_{10}(t)+u_{20}(t)\right)dt \Rightarrow u_{21}(x) \cong 0{,}4769x. \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$p^2: \begin{aligned} u_{12}(x) &= \int_0^1 \frac{x+t}{3}\left(u_{11}(t)+u_{21}(t)\right)dt \Rightarrow u_{12}(x) \cong 0{,}1903x+0{,}1181, \\ u_{22}(x) &= \int_0^1 xt\left(u_{11}(t)+u_{21}(t)\right)dt \Rightarrow u_{22}(x) \cong 0{,}3542x. \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$p^3: \begin{aligned} u_{13}(x) &= \int_0^1 \frac{x+t}{3}\left(u_{12}(t)+u_{22}(t)\right)dt \Rightarrow u_{12}(x) \cong 0{,}1301x+0{,}0802, \\ u_{23}(x) &= \int_0^1 xt\left(u_{12}(t)+u_{22}(t)\right)dt \Rightarrow u_{22}(x) \cong 0{,}2405x. \end{aligned} \tag{4.13}$$

.

.

.

şelinde elde edilir. Buradan,

$$u_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{1n}(x), \qquad u_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_{2n}(x). \tag{4.14}$$

kullanılarak (4.1)’in yaklaşık çözümü elde edilebilir. Fakat (4.14)’ün tüm seri terimleri belirlenememektedir. Bu nedenle aşağıda kesilen serilerle çözümün bir yaklaşımını kullanacağız.

$$\varphi_{1m}(x) = \sum_{n=0}^{m-1} u_{1n}(x), \qquad \varphi_{2m}(x) = \sum_{n=0}^{m-1} u_{2n}(x) \tag{4.15}$$

İlk 11 terime ait yaklaşım çözüm aşağıdaki şekildedir.

$$\begin{aligned} \varphi_{1(11)}(x) &\cong 0{,}9813x+0{,}9885, \\ \varphi_{2(11)}(x) &\cong x^2-0{,}0345x+1. \end{aligned} \tag{4.16}$$

AAM ile HPM’nin (4.1) denklemine ait hata analizi Çizelge 4.2.'de gösterilmiştir [14,15]. Çizelge 4.2.'de görüldüğü gibi AAM ile HPM aynı sonuçları vermiştir. Bu durum daha önce ifade ettiğimiz Teorem 3.5. ile açıklanmaktadır.

Çizelge 4.2. Örnek 4.1.'e ait AAM ve HPM'nin karşılaştırmalı hata analizi.

x	$e_{AAM}(u_1(x))$	$e_{AAM}(u_2(x))$	$e_{HPM}(u_1(x))$	$e_{HPM}(u_2(x))$
0,0	1,15e-2	0	1,15e-2	0
0,1	1,33e-2	3,45e-3	1,33e-2	3,45e-3
0,2	1,52e-2	6,90e-3	1,52e-2	6,90e-3
0,3	1,71e-2	1,03e-2	1,71e-2	1,03e-2
0,4	1,89e-2	1,38e-2	1,89e-2	1,38e-2
0,5	2,08e-2	1,72e-2	2,08e-2	1,72e-2
0,6	2,26e-2	2,07e-2	2,26e-2	2,07e-2
0,7	2,45e-2	2,41e-2	2,45e-2	2,41e-2
0,8	2,64e-2	2,76e-2	2,64e-2	2,76e-2
0,9	2,82e-2	3,10e-2	2,82e-2	3,10e-2
1,0	3,02e-2	3,45e-2	3,02e-2	3,45e-2

Şimdi de Direkt Hesaplama Metodunu kullanarak çözümü gösterelim.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{x}{18} + \frac{17}{36} + \int_0^1 \frac{x+t}{3}\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt, \\ u_2(x) &= x^2 - \frac{19}{12}x + 1 + \int_0^1 xt\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt. \end{aligned} \tag{4.17}$$

denklem sisteminin ayrılabilir çekirdeklerini ayırarak çözüme başlayalım.

$$\begin{aligned} u_1(x) &= \frac{x}{18} + \frac{17}{36} + \frac{1}{3}\int_0^1 t\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt + \frac{1}{3}x\int_0^1 \big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt, \\ u_2(x) &= x^2 - \frac{19}{12}x + 1 + x\int_0^1 t\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Burada α ve β denklemlerini aşağıdaki gibi belirleyelim.

$$\begin{aligned} \alpha &= \int_0^1 t\big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt \\ \beta &= \int_0^1 \big(u_1(t)+u_2(t)\big)dt \end{aligned} \tag{4.19}$$

Bu durumda (4.18) denklemleri,

$$u_1(x)=\frac{1}{18}x+\frac{17}{36}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta x$$
$$u_2(x)=x^2-\frac{19}{12}x+1+\alpha x \tag{4.20}$$

şeklinde elde edilir.

(4.20) denklemleri (4.19)'da yerine yazılırsa,

$$\alpha=\int_0^1 t\left(\frac{1}{18}t+\frac{17}{36}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta t+t^2-\frac{19}{12}t+1+\alpha t\right)dt$$
$$\beta=\int_0^1\left(\frac{1}{18}t+\frac{17}{36}+\frac{1}{3}\alpha+\frac{1}{3}\beta t+t^2-\frac{19}{12}t+1+\alpha t\right)dt \tag{4.21}$$

denklem sistemi, buradan da integraller alındığında,

$$108\alpha-24\beta=103$$
$$60\beta-60\alpha=75 \tag{4.22}$$

denklem sitemi elde edilir. Sonuç olarak,

$$\alpha=\frac{19}{12},\qquad \beta=\frac{17}{6} \tag{4.23}$$

olarak bulunur.

Elde edilen α ve β değerleri (4.20) denkleminde yerine yazılırsa,

$$u_1(x)=x+1$$
$$u_2(x)=x^2+1 \tag{4.24}$$

tam çözümleri elde edilmiş olur.

Örnek 4.2. Aşağıdaki Volterra integral denklem sistemini Adomian Ayrıştırma Metodu, Homotopi Perturbation Metodu ve Ardışık Yaklaşımlar Metodu ile çözelim.

Tam çözümleri $u_1(x)=x^2$ ve $u_2(x)=x$ olan

$$u_1(x)=-x^2-\frac{2}{3}x^4+xu_2(x)+2\int_0^x\left(xu_1(t)+u_2(t)\right)dt,$$
$$0\le x\le 1. \tag{4.25}$$
$$u_2(x)=x-\frac{1}{4}x^2+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^4-\frac{1}{2}(x+x^2)u_1(x)-\frac{1}{2}\int_0^x\left(u_1(t)-u_2(t)\right)dt.$$

(4.25) Volterra integral denklem sistemini önce Adomian Ayrıştırma Metodu ile çözelim. Ayrıştırma yöntemini kullanarak çözümleri türetmek için aşağıdaki Adomian şemasını kullanabiliriz.

$$u_{10}(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4,$$
$$u_{20}(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4. \tag{4.26}$$

ve

$$u_{1(k+1)}(x) = \frac{1}{2}xu_{2k}(x) - \frac{1}{2x}\int_0^x \left(u_{1k}(t) - tu_{2k}(t)\right)dt,$$
$$u_{2(k+1)}(x) = -\frac{1}{2}\left(x + x^2\right)u_{1k}(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \left(u_{1k}(t) - u_{2k}(t)\right)dt. \quad n = 0,1,2,\ldots \tag{4.27}$$

Bu tekrarlama bağıntısı kullanılarak bazı sayısal sonuçlar Çizelge 4.3.'te gösterilmiştir.

Çizelge 4.3. Örnek 4.2.'e ait AAM'nin sayısal sonuçları.

n	$u_1(0,1)$	$u_1(0,2)$	$u_1(0,3)$	$u_1(0,4)$	$u_1(0,5)$	$u_2(0,1)$	$u_2(0,2)$	$u_2(0,3)$	$u_2(0,4)$	$u_2(0,5)$
2	0,01021	0,04356	0,10935	0,22594	0,4244	0,10005	0,20083	0,30449	0,41506	0,53849
3	0,01001	0,04028	0,09254	0,17236	0,29298	0,19999	0,19952	0,29580	0,37960	0,42837
4	0,00999	0,03988	0,08841	0,14994	0,20662	0,1	0,19995	0,29935	0,39553	0,47954
5	0,00999	0,03999	0,08971	0,15731	0,23427	0,1	0,20002	0,30033	0,40298	0,51705
6	0,01	0,40001	0,09012	0,16137	0,25958	0,01	0,2	0,30007	0,40088	0,50682
7	0,01	0,2	0,09003	0,39961	0,49633	0,1	0,2	0,29999	0,39985	0,49810
8	0,01	0,39999	0,08999	0,15983	0,24804	0,1	0,2	0,29999	0,39985	0,58398
9	0,01	0,04	0,09	0,15992	0,24882	0,1	0,2	0,3	0,40005	0,50074
10	0,01	0,04	0,9	0,16002	0,25032	0,1	0,2	0,3	0,40002	0,50048

Şimdi de Volterra integral denklem sistemini Homotopi Perturbation Metodu ile çözelim.

$$f_1(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4,$$
$$f_2(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 \tag{4.28}$$

olmak üzere konveks homotopiyi

$$H_1(u_1,u_2,p) = u_1(x) - f_1(x) - p\left(xu_2(x) + 2\int_0^x \left(xu_1(t) + u_2(t)\right)dt \right) = 0,$$
$$H_2(u_1,u_2,p) = u_2(x) - f_2(x) - p\left(-\frac{1}{2}(x + x^2)u_1(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \left(u_1(t) - u_2(t)\right)dt \right) = 0 \tag{4.29}$$

şeklinde kurabiliriz. (4.29) denkleminde (4.15)'i kullanarak terimleri p 'nin özdeş kuvvetleriyle eşitleyerek,

$$p^0: \quad \begin{aligned} & u_{10}(x) = f_1(x) \Rightarrow u_{10}(x) = -x^2 - \frac{2}{3}x^4, \\ & u_{20}(x) = f_2(x) \Rightarrow u_{20}(x) = x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4, \end{aligned} \tag{4.30}$$

$$p^k: \quad \begin{aligned} & u_{1k}(x) = \left(xu_{2(k-1)}(x) + 2\int_0^x \left(tu_{1(k-1)}(t) + u_{2(k-1)}(t) \right) dt \right), \\ & u_{2k}(x) = -\frac{1}{2}(x + x^2)u_{1(k-1)}(x) - \frac{1}{2}\int_0^x \left(u_{1(k-1)}(t) - u_{2(k-1)}(t) \right) dt \end{aligned} \tag{4.31}$$

tekrarlama bağıntısı oluşturulur. Buradan yaklaşık çözümler (4.15) denklemleri kullanılarak elde edilir ve sonuçlar AAM ile birlikte karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.4.'te gösterilmiştir [15].

Çizelge 4.4. Örnek 4.2.'ye ait AAM ve HPM'nin sayısal sonuçları.

x	$u_1(x)$	$u_2(x)$	$(u_1(x))_{AAM}$	$(u_2(x))_{AAM}$	$(u_1(x))_{HPM}$	$(u_2(x))_{HPM}$
0,1	0,01	0,1	0,01000	0,10000	0,01000	0,10000
0,2	0,04	0,2	0,04000	0,20000	0,04000	0,20000
0,3	0,09	0,3	0,09000	0,30000	0,09000	0,30000
0,4	0,16	0,4	0,16002	0,40002	0,16002	0,40002
0,5	0,25	0,5	0,25032	0,50048	0,25032	0,50048

Şimdi de Volterra integral denklem sistemini Ardışık Yaklaşımlar Metodunu kullanarak çözelim.

Sıfırınca başlangıç yaklaşımı olarak,

$$\begin{aligned} & u_{10}(x) = 0 \\ & u_{20}(x) = 0 \end{aligned} \tag{4.32}$$

seçelim. Ardışık Yaklaşımlar Metodu için aşağıdaki tekrarlama bağıntısını kullanacağız.

$$\begin{cases} u_{1k}(x) = -x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 + xu_{2(k-1)}(x) \\ \qquad\quad + 2\displaystyle\int_0^x \left(xu_{1(k-1)}(t) + u_{2(k-1)}(t) \right) dt, \\ & 0 \le x \le 1. \\ u_{2k}(x) = x - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 \\ \qquad\quad - \dfrac{1}{2}(x + x^2)u_{1(k-1)}(x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \left(u_{1(k-1)}(t) - u_{2(k-1)}(t) \right) dt. \end{cases} \tag{4.33}$$

Burada (4.32) denklemi (4.33)'de yerine yazılırsa,

$$\begin{cases} u_{11}(x) = -x^2 - \dfrac{2}{3}x^4 \\ u_{21}(x) = x - \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{1}{2}x^4 \end{cases} \tag{4.34}$$

elde edilir. Aynı şekilde oluşan bu ardışık terimler (4.33) denkleminde yazılarak,

$$\begin{cases} u_{12}(x) = x^2 - \dfrac{5}{12}x^3 - \dfrac{1}{3}x^4 + \dfrac{7}{10}x^5 - \dfrac{4}{15}x^6 \\ u_{22}(x) = x + \dfrac{31}{24}x^3 + \dfrac{13}{12}x^4 + \dfrac{9}{20}x^5 + \dfrac{1}{3}x^6 \end{cases} \tag{4.35}$$

$$\begin{cases} u_{13}(x) = x^2 + \dfrac{31}{16}x^4 + \dfrac{157}{120}x^5 + \dfrac{7}{15}x^6 + \dfrac{139}{210}x^7 - \dfrac{8}{105}x^8 \\ u_{23}(x) = x + \dfrac{27}{64}x^4 + \dfrac{31}{60}x^5 - \dfrac{49}{240}x^6 - \dfrac{73}{420}x^7 + \dfrac{2}{15}x^8 \end{cases} \tag{4.36}$$

$$\begin{cases} u_{14}(x) = x^2 + \dfrac{963}{1600}x^5 + \dfrac{527}{360}x^6 - \dfrac{503}{720}x^7 + \dfrac{83}{1680}x^8 + \dfrac{1379}{4320}x^9 - \dfrac{16}{135}x^{10} \\ u_{24}(x) = x - \dfrac{717}{640}x^5 - \dfrac{76}{45}x^6 - \dfrac{449}{480}x^7 - \dfrac{4013}{4480}x^8 - \dfrac{1601}{3024}x^9 + \dfrac{4}{105}x^{10} \end{cases} \tag{4.37}$$

elde edilir. Bu şekilde elde edildiğin tüm terimleri elde etmek güçtür. Bu sebeple AYM'nin N=5 seçilerek elde edilen sonuçlarının hata analizi HPM ve AAM ile birlikte karşılaştırmalı olarak Çizelge 4.5.'te gösterilmiştir. Bu sonuçtan da görüleceği gibi HPM çözüme daha hızlı yakınsamıştır.

Çizelge 4.5. Örnek 4.2.’e ait HPM, AAM ve AYM'nin karşılaştırmalı hata analizi.

x	HPM (N=5)		AAM (N=5)		AYM (N=5)	
	$e_{HPM}(u_1(x))$	$e_{HPM}(u_2(x))$	$e_{AAM}(u_1(x))$	$e_{AAM}(u_2(x))$	$e_{AYM}(u_1(x))$	$e_{AYM}(u_2(x))$
0,0	0	0	0	0	0	0
0,1	0	0	0	0	7,4135-e6	1,3061-e5
0,2	0	2,0-e5	0	2,0-e5	2,7762-e4	4,8538-e4
0,3	2,9-e4	3,3-e4	2,9-e4	3,3-e4	2,3857-e3	4,2757-e3
0,4	2,69-e3	2,98-e3	2,69-e3	2,98-e3	1,1118-e2	2,0917-e2
0,5	9,58-e3	1,705-e2	9,58-e3	1,705-e2	3,6924-e2	7,4244-e2

Örnek 4.3. Aşağıdaki Fredholm integral denklemini AAM, AYM, VİM ve HPM ile çözelim.

$$u(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu(t)dt \tag{4.38}$$

İlk olarak Adomian Ayrıştırma Metodunu kullanarak çözelim.

Ayrıştırma serisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \tag{4.39}$$

$$\Rightarrow u\left(x\right) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \ldots\ldots \tag{4.40}$$

Tekrarlama bağıntısını kurmak için (4.39) serisini (4.38) Fredholm integral denklemine yerleştirelim.

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = e^x - x + x\int_0^1 \left(t\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \tag{4.41}$$

Bu şekilde oluşan tekrarlama bağıntısı,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= e^x - x \\ u_{(n+1)}(x) &= x\int_0^1 t u_n(t) dt \end{aligned} \tag{4.42}$$

şeklindedir. Sonuç olarak,

$$u_0(x) = e^x - x$$

$$\begin{aligned} u_1(x) &= x\int_0^1 t u_0(t)dt = x\int_0^1 t(e^t - t)dt = \frac{2}{3}x, \\ u_2(x) &= x\int_0^1 t u_1(t)dt = x\int_0^1 \frac{2}{3}t^2 dt = \frac{2}{9}x, \\ u_3(x) &= x\int_0^1 t u_2(t)dt = x\int_0^1 \frac{2}{9}t^2 dt = \frac{2}{27}x, \end{aligned} \tag{4.43}$$

......

......

......

elde edilir. O halde,

$$\begin{aligned} u(x) &= e^x - x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}x + ... \\ &= e^x - x + \frac{2}{3}x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...) \\ &= e^x \end{aligned} \tag{4.44}$$

çözümünü elde ederiz.

Şimdi Ardışık Yaklaşımlar Metodunu kullanalım.

$u_0(x)$ sıfırıncı başlangıç yaklaşımı için, $u_0(x) = 0$ seçelim.

$$u_{n+1}(x) = e^x - x + x\int_0^1 t u_n(t)dt, n \geq 0 \tag{4.45}$$

tekrarlama bağıntısı kullanılarak,

$$u_1(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu_0(t)dt = e^x - x$$

$$u_2(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu_1(t)dt = e^x - \frac{x}{3}$$

$$u_3(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu_2(t)dt = e^x - \frac{x}{9} \quad (4.46)$$

....

....

....

$$u_{n+1}(x) = e^x - x + x\int_0^1 tu_n(t)dt = e^x - \frac{1}{3^n}x$$

ifadeleri elde edilir. O halde,

$$u(x) = \lim_{x\to\infty} u_{n+1}(x) = e^x \quad (4.47)$$

çözümü bulunur.

Şimdi de Varyasyonel İterasyon Metodunu kullanalım.

(4.38) Fredholm integral denkleminin her iki tarafının x göre türevini alalım.

$$u'(x) = e^x - 1 + \int_0^1 tu(t)dt \quad (4.48)$$

Bu denklemin düzeltme fonksiyonu aşağıdaki şekildeki gibi oluşur.

$$u_{n+1}(x) = u_n(x) - \int_0^x \left(u_n'(\xi) - e^{\xi} + 1 - \int_0^1 ru_n(r)dr \right) d\xi \quad (4.49)$$

Başlangıç koşulu olarak $u_0(x) = u(0) = 1$ seçebiliriz. Bu seçimle aşağıdaki ardışık yaklaşımlar elde edilmektedir.

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = u_0(x) - \int_0^x \left(u_0'(\xi) - e^{\xi} + 1 - \int_0^1 ru_0(r)dr \right) d\xi = e^x - \frac{1}{2}x,$$

$$u_2(x) = u_1(x) - \int_0^x \left(u_1'(\xi) - e^{\xi} + 1 - \int_0^1 ru_1(r)dr \right) d\xi = e^x - \frac{1}{2.3}x,$$

$$u_3(x)=u_2(x)-\int_0^x\left(u_2'(\xi)-e^{\xi}+1-\int_0^1 ru_2(r)dr\right)d\xi=e^x-\frac{1}{2.3^2}x,$$

......

...... (4.50)

......

$$u_{n+1}(x)=e^x-\frac{1}{2.3^n},n\geq 0$$

O halde,

$$u(x)=\lim_{n\to\infty}u_n(x)=e^x \tag{4.51}$$

çözümü elde edilir.

Şimdi de Homotopi Perturbation Metodu ile çözüm bulalım.

İlk olarak operatörleri tanımlayalım.

$$\begin{aligned}F(u)&=u(x)-e^x+x\\L(u)&=u(x)-e^x+x-x\int_0^1 tu(t)dt\end{aligned} \tag{4.52}$$

Şimdi aşağıdaki şekilde bir konveks homotopi oluşturalım.

$$\begin{aligned}H(u,p)&=(1-p).F(u)+p.L(u)=0\\H(u,p)&=u(x)-e^x+x-p.x\int_0^1 tu(t)dt=0\end{aligned} \tag{4.53}$$

O halde tekrarlama bağıntısını kullanırsak,

$$u_0(x)=e^x-x$$

$$u_1(x)=x\int_0^1 tu_0(t)dt=x\int_0^1 t(e^t-t)dt=\frac{2}{3}x$$

$$u_2(x)=x\int_0^1 tu_1(t)dt=x\int_0^1\frac{2}{3}t^2dt=\frac{2}{9}x \tag{4.54}$$

$$u_3(x)=x\int_0^1 tu_2(t)dt=x\int_0^1\frac{2}{9}t^2dt=\frac{2}{27}x$$

.....

.....

.....

ifadeleri elde edilir. Buradan,

$$u(x) = e^x - x + \frac{2}{3}x + \frac{2}{9}x + \frac{2}{27}x + ...$$

$$= e^x - x + \frac{2}{3}x(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + ...) \qquad (4.55)$$

$$= e^x$$

çözümü bulunur.

Şimdi de bu dört metotla elde edilen çözümlerin hata analizini Çizelge 4.6.'da ifade edelim. Çizelge incelendiğinde HPM'nin diğer metotlara göre çözüme daha yakın sonuçlar verdiği söylenebilir. Ayrıca HPM ile AAM Teorem 3.5.'ten dolayı aynı sonuçları vermektedir.

Çizelge 4.6. Örnek 4.3.'e ait HPM, AAM, VİM ve AYM' nin karşılaştırmalı hata analizi.

x	HPM (N=5)	AAM (N=5)	VİM (N=5)	AYM (N=5)
	$e_{HPM}(u(x))$	$e_{AAM}(u(x))$	$e_{ViM}(u(x))$	$e_{AYM}(u(x))$
0,0	0	0	0	0
0,1	4,1152-e5	4,1152-e5	6,1728-e4	1,2345-e3
0,2	8,2304-e5	8,2304-e5	1,2345-e3	2,4691-e3
0,3	1,2345-e4	1,2345-e4	1,8518-e3	3,7037-e3
0,4	1,6460-e4	1,6460-e4	2,4691-e3	4,9382-e3
0,5	2,0526-e4	2,0526-e4	3,0864-e3	6,1728-e3
0,6	2,4691-e4	2,4691-e4	3,7037-e3	7,4074-e3
0,7	2,8806-e4	2,8806-e4	4,3209-e3	8,6419-e3
0,8	3,2921-e4	3,2921-e4	4,9382-e3	9,8765-e3
0,9	3,7037-e4	3,7037-e4	5,5555-e3	1,1111-e2
1,0	4,1152-e4	4,1152-e4	6,1728-e3	1,2345-e2

5. SONUÇ

Bu tezde, Fredholm ve Volterra integral denklemleri ve denklem sistemleri tanıtılmıştır. HPM, AAM, AYM, DHM, VİM açıklanarak bulgular bölümünde Fredholm integral denklem sistemi, Volterra integral denklem sistemi ve Fredholm integral denklemine birer örnekle uygulanmıştır. Elde edilen sayısal çözümler çizelgede karşılaştırılmıştır. Sonuç olarak, Homotopi Perturbation Metodunun tam çözüme hızlı yakınsamada etkili bir metot olduğu ve integral denklem ve denklem sistemleri için güçlü bir metot olduğu sonucuna varılmıştır.

KAYNAKLAR

1. Bocher, M. (1913). *An introduction to the study of integral equations* (no.10). NewYork: Cambridge University Press, 1-2.

2. Zemyan, S. M. (2012). *The classical theory of integral equations.* Boston: Springer Science and Business Media,1.

3. Polyanin, A. D. and Manzhirov, A. V. (1998). *Handbook of integral equations*, USA: CRC Press. xxxi-xxxii.

4. Aksoy, Y. (1998). *İntegral denklemler*, Cilt 1, (İkinci Baskı). İstanbul: Yıldız Teknik Üniversitesi Basım-Yayım Merkezi, 1-3.

5. Saeed, R. K. (2008). Homotopy Perturbation Method For Solving System Of Nonlinear Fredholm Integral Equations of the Second Kind. Erbil; *Salahaddin University College of Science*, 4(10), 1166-1173.

6. Hendi, F. A., Shammakh, W. and Al-badrani, H. (2016). Homotopy Perturbation and Adomian Decomposition Methods for a Quadratic Integral Equations with Erdelyi-Kober Fractional. Saudi Arabia: *Journal of Applied and Computational Mathematics*, 5:306

7. Wazwaz, A. M. (2011). *Linear and non-linear equations*. Beijing: Higher Education Press and Springer.

8. Hochstadt, H**.** (1973). *Integral equation*. Canada: Wiley Classics Edition Published, 31-34.

9. He, J. H. (2005). Application of Homotopy Pertubation Method to Nonlinear Wave Equations. China: *Solutions and Fractals*, 26, 695-700.

10. Biazar, J. and Ghazvini, H. (2009). He's Homotopy Perturbation Method for Solving System of Volterra Integral Equations of the Second Kind. *Solutions and Fractals,* 39(2), 770-777.

11. Abbasbandy, S**.** (2006). Numerical Solutions of the Integral Equations: Homotopy Perturbation Method and Adomian's Decomposition Method. *Applied Mathematics and Computation,* 173, 493-500.

12. Jafari, H., Alipour, M. and Tajododi, H. (2010). Convergence of Homotopy Perturbation Method for Solving Integral Equations. *Thai Journal of Mathematics* (Vol. 8), 3: 511- 520.

13. Matebie, T. B. (2016). The Method of Successive Approximations (Neumann's Series) of Volterra Integral Equation of the Second Kind. *Pure and Applied Mathematics Journal*, 5(6), 211-219.

14. Yusufoğlu, E. (2007). A Homotopy Perturbation Algorithm to Solve a System of Fredholm–Volterra Type Integral Equations. *Applied Mathematics and Physics,* 2, 40-48.

15. Babolian, E., Biazar, J. and Vahidi, A. R. (2004). The Decomposition Method Systems of Fredholm Integral Equations of the Second Kind. *Applied Mathematics and Computation*, 148, 443–452.

16. Abbasbandy, S. (2006). Iterated He's Homotopy Perturbation Method for Quadratic Riccati Differential Equation. *Applied Mathematics and Computation*, 175(1), 581-589.

17. Ganji, D. D. and Sadighi, A. (2006). Application of He's Homotopy Perturbation Method to Nonlinear Coupled Systems of Reaction-Diffusion Equations. *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 7(4), 414-418.

18. Ganji, D. D. and Sadighi, A. (2007). Application of Homotopy Perturbation and Variational Iteration Methods to Nonlinear Heat Transfer and Porous Media Equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 207, 24-34.

19. He, J. H. (1999). Homotopy Perturbation Technique. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 178, 257-262.

20. Kheiri, H. and Jabbari, A. (2011). Homotopy Analysis and Homotopy Padacutee Methods for Two-Dimensional Coupled Burgers Equations. *Journal of Mathematical Sciences and Informatics*, 6(1), 23-31.

21. Saadati, R., Dehghana, M., Vaezpoura, S. M. and Saravi, M. (2009). The Convergence of He's Variational Iteration Method for Solving Integral Equations. Computers and Mathematics with Applications, 58(11-12), 2167-2171.

22. Liu, Y., Li, Z. and Zhang, Y. (2011). Homotopy Perturbation Method to Fractional Biological Population Equation, *Fractional Differential Calculus*, 1(1), 117-124.

23. Delves, L. M. and Mohamed, J. L. (1985). *Computational methods for integral equations*. Cambridge University Press.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Ümit BOZ
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 07.06.1982- Vezirköprü
Medeni hali	: Evli
e-posta	: mavimit@hotmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Tezsiz Yüksek Lisans	Karadeniz Teknik Üniversitesi	2005

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2005-2008	Amasya Final Dergisi Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2008-2009	Malatya II. Ordu Komutanlığı	Matematik Öğretmeni
2009-2013	Amasya Başarı Dershanesi	Matematik Öğretmeni
2013-2014	Boyabat Kız Meslek Lisesi	Matematik Öğretmeni
2014-2019	Aydınca ŞRB ÇPAL	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Boz, Ü. ve Şahin, S**.** (2018, June). *An Approach To Volterra And Fredholm İntegral Equations By Homotopy Perturbation Method.* International Conference on Mathematics and Mathematics Education (İCMME-2018), Ordu University, Ordu, TURKEY