



T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GALİLE UZAYINDAKİ EĞRİLERİN DARBOUX ÇATISINA GÖRE
KONUM VEKTÖRLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BUKET DİRİŞEN

OCAK 2020

**GALİLE UZAYINDAKİ EĞRİLERİN DARBOUX ÇATISINA GÖRE
KONUM VEKTÖRLERİ**

Buket DİRİŞEN

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

Danışman

Doç. Dr. Tefik ŞAHİN

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

OCAK 2020

Buket DİRİŞEN tarafından hazırlanan ‘‘Galile Uzayındaki Eğrilerin Darboux atısına Göre Konum Vektörleri’’ adlı tez çalıŐması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Doç. Dr. Tefik ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Fen Edebiyat Fakültesi Amasya niversitesi

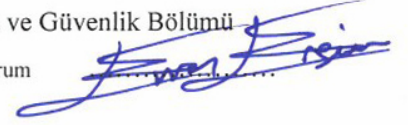
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum



BaŐkan: Dr. Öğr. Üyesi Evren ERĐN

Ondokuz Mayıs ni. arŐamba Ticaret Borsası MYO. Mülkiyet Koruma ve Güvenlik Bölümü

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum



ye: Dr. Öğr. Üyesi Zehra ÖZDEMİR

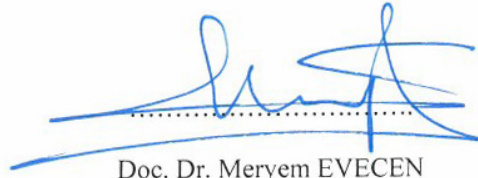
Matematik Anabilim Dalı, Fen Edebiyat Fakültesi Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum



Tez Savunma Tarihi: 24/01/2020

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli Őartları yerine getirdiğini onaylıyorum.



Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına göre uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmada;

- Tez içinde sunduğum verileri , bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmada yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Buket DİRİŞEN

GALİLE UZAYINDA EĞRİLERİN DARBOUX ÇATISINA GÖRE KONUM
VEKTÖRLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Buket DİRİŞEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2020

ÖZET

Bu çalışmada, 3-boyutlu Galile uzayında bir yüzey üzerindeki bir eğrinin konum vektörlerini araştırıldı. İlk olarak, Darboux çatısına göre bir eğrinin konum vektörü belirlendi. İkinci olarak, bir eğrinin konum vektörünün jeodezik, normal eğrilikler ve jeodezik burulmaya bağlı Darboux çatısına göre standart gösterimi elde edildi. Son olarak, bazı örnekler üzerinde çalışıldı ve grafikleri çizildi.

Sayfa Adedi : 37

Anahtar Kelimeler : Galile uzayı, Konum vektörleri, Darboux çatısı

Danışman : Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN

POSITION VECTORS OF CURVES WITH RESPECT TO DARBOUX FRAME IN
THE GALILEAN SPACE

(M. Sc. Thesis)

Buket DİRİŞEN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2020

ABSTRACT

In this study, we investigate the position vector of a curve on the surface in the Galilean 3-space. Firstly, the position vector of a curve with respect to the Darboux frame is determined. Secondly, we obtain the standard representation of the position vector of the curve with respect to Darboux frame in terms of the geodesic, normal curvature and geodesic torsion. Finally, we elaborate on some examples and provide their graphs.

Page Number : 37
Key Words : Galilean Space, Position Vector, Darboux Frame
Supervisor : Associate Professor Tevfik ŞAHİN

ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana öneren, çalışmalarım boyunca beni destekleyen, yönlendiren ve yardımlarını esirgemeyen tez danışmanım sayın Doç. Dr. Tefik ŞAHİN'e, ayrıca değerli zamanlarını ayırarak tez savunma sınavımda bulunan ve önerileriyle tezimize katkı sağlayan Dr. Öğr. Üyesi Evren ERGÜN ve Dr. Öğr. Üyesi Zehra ÖZDEMİR hocalarıma teşekkür ederim. Son olarak ise hayatım boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

| | Sayfa |
|---|--------------|
| ÖZET | iv |
| ABSTRACT | v |
| ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR | vi |
| ÇİZELGELER DİZİNİ | viii |
| ŞEKİLLER DİZİNİ | ix |
| SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ | x |
| 1. GİRİŞ | 1 |
| 2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ | 4 |
| 3. BULGULAR VE TARTIŞMA | 10 |
| 3.1. G_3 Uzayında Darboux Çatısına Göre Bir Eğrinin Konum Vektörü | 10 |
| 3.2. G_3 Uzayında Standart Çatıya Göre Bir Eğrinin Konum Vektörü | 15 |
| 4. SONUÇ | 26 |
| KAYNAKLAR | 27 |
| ÖZGEÇMİŞ | 28 |

ÇİZELGELER DİZİNİ

| Çizelge | Sayfa |
|--|--------------|
| Çizelge 1 : Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler..... | 20 |
| Çizelge 2 : Genel bir eğrinin özel durumları..... | 13 |
| Çizelge 3 : Bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonsiyonlarına göre durumları..... | 14 |

ŞEKİLLER DİZİNİ

| Şekil | Sayfa |
|---------------------------------------|--------------|
| Şekil 1: $\varphi(u, v)$ yüzeyi | 23 |
| Şekil 2: $\beta(x)$ eğrisi | 24 |

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

| Simgeler | Açıklama |
|-----------------|-------------------------------------|
| $\kappa(x)$ | Eğrinin eğrilik fonksiyonu |
| $\tau(x)$ | Eğrinin burulma fonksiyonu |
| $T(x)$ | Eğrinin birim teğet vektör alanı |
| $N(x)$ | Eğrinin birim normal vektör alanı |
| $B(x)$ | Eğrinin binormal vektör alanı |
| $Q(x)$ | Yüzeyin teğet-normal vektör alanı |
| $n(x)$ | Yüzeyin birim normal vektör alanı |
| $\kappa_g(x)$ | Eğrinin jeodezik eğrilik fonksiyonu |
| $\kappa_n(x)$ | Eğrinin normal eğrilik fonksiyonu |
| $\tau_g(x)$ | Eğrinin jeodezik burulma fonksiyonu |

| Kısaltmalar | Açıklama |
|--------------------|--------------------------------------|
| \mathbb{R}^n | n- boyutlu reel vektör uzayı |
| G_3 | 3- boyutlu Galile uzayı |
| $u \cdot_G v$ | İki vektörün Galile çarpımı |
| $u \times_G v$ | İki vektörün Galile vektörel çarpımı |

1. GİRİŞ

Geometri; nesnelerin şekillerini, özelliklerini ve birbirleriyle olan ilişkilerini inceleyen, matematiğin bir dalıdır. Geometri adı, Yunanca “yerin ölçülmesi” anlamına gelen kelimelerden türetilmiştir.

Geometri ile ilgili bilinen çalışmalar eski Mısır da M.Ö. 3000 yıllarına kadar gitmektedir. Eski Mısırlılar geometri çalışmalarını kare tabanlı piramitlerin yapımında ve astronomide kullanmışlardır. M.Ö. 300 de Euclid yazmış olduğu “Elements” adlı eserle, geometriyi aksiyomatik bir formda ilk kez sistematik olarak tanımlayarak geometri alanında çok önemli bir gelişmeye yol açmıştır. Daha sonrasında Öklid geometrisi olarak bilinen geometrik sistemin temelleri kurulmuştur. Euclid geometrik sistemini postulat denilen bazı kabullere dayandırmıştır. Bunlardan birisi paralellik postulatı olarak bilinen beşinci (5.) postulatır. Bu postulat “bir doğruyu kesen iki doğrunun kestikleri doğruyla yaptıkları açıların toplamı bir doğru açıdan küçükse, bu durumda bu iki doğru mutlaka kesişirler” şeklindedir.

Geometri tarihinde çok önemli gelişmelerden bir diğeri de 17. yüzyılda Rene Descartes’in koordinat geometrisini keşfetmesidir. Daha sonrasında adıyla anılacak kartezyen koordinat sistemi Matematik ve Fizik bilimlerinin gelişmesinde çok önemli bir yere sahiptir.

Binlerce yıl Öklid geometrisinin tek geometrik sistem olduğuna inanılmıştır. Fakat bu inanış 19. yüzyılda Carl Friedrich Gauss, Nikolai Lobachevsky ve János Bolyai nin yaptığı çalışmalarla yıkılmıştır. Bu bilim insanları Euclid’in beşinci (5.) postulatının yani paralellik postulatının farklı olabileceğini düşünerek ve paralellik postulatını değiştirerek Öklid geometrisi kadar geçerli yeni bir geometrik sistem keşfetmişlerdir. Bu yeni geometri hiperbolik geometridir. Hiperbolik geometrinin keşfedilmesiyle Öklid geometrisi dışında geçerli bir geometrik sistemin daha var olduğu kanıtlanmış oldu. Fakat Öklid geometrisi dışında geçerli tek geometrinin hiperbolik geometri olduğu düşüncesi çok uzun sürmedi. 1870 yılında ise Cayley-Klein’in Erlanger Programı çerçevesinde yaptıkları çalışmalar sonucunda, düzlemde Öklid geometrisini de içeren 9 farklı geometrik sistemin daha var olduğu gösterildi. Bu geometrik sistemler, açılarının ve uzunluklarının; eliptik, parabolik ve hiperbolik ölçülmesine göre adlandırıldı. Aşağıdaki tabloda bu ölçümlere göre geometrik sistemin hangi sistem olduğu gösterilmiştir. Örneğin; Öklid geometrisi açının eliptik ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle elde edilen bir geometri iken bizim tezimizin ana

çalışma alanı olan Galile geometrisi ise açının ve uzunluğun parabolik ölçülmesiyle elde edilen bir geometrik sistemdir.

Çizelge 1 : Açı ve uzunlukların ölçülerine göre geometriler (Yaglom, 1979).

| GEOMETRİLER | UZUNLUKLARIN ÖLÇÜSÜ | | |
|-----------------|------------------------|--------------------|----------------------------|
| | ELİPTİK | PARABOLİK | HİPERBOLİK |
| AÇILARIN ÖLÇÜSÜ | ELİPTİK | PARABOLİK | HİPERBOLİK |
| ELİPTİK | Eliptik Geometri | Öklid Geometri | Hiperbolik Geometri |
| PARABOLİK | Co-Eliptik Geometri | Galile Geometri | Co-Minkowski Geometri |
| HİBERBOLİK | Co-Hiperbolik Geometri | Minkowski Geometri | Doubly Hiperbolik Geometri |

Geometrik sistemlerin metrik yapısındaki farklılık, bu sistemlerde bazı kavramların özelliklerinin farklı olmasının nedenidir. Örneğin Galile geometrisinde vektörlerin nokta çarpımının lineer özelliği genel olarak yoktur. Dolayısıyla özellikle bu çarpımın kullanıldığı işlemlerde dağılma özelliklerine çok dikkat edilmesi gerektiği açıktır. Bu farklılıklar her zaman olumsuzluklar olarak karşımıza çıkmamaktadır. Yani bu farklılıklar bazen zorluklara bazen de basitliklere yol açmaktadır. Örneğin bir geometrik sistemde çok kolay bir şekilde çözülebilen olan bir problem, başka bir geometrik sistemde çözülemeyebilir. Daha açık bir örnek verecek olursak bir eğrinin eğrilik fonksiyonlarına göre genel konum vektörünün belirlenmesi problemi Öklid geometrisinde genel durumlarda çözülemezken Galile geometrisinde eğrinin türüne bağlı olmaksızın çözülebilirdir (Ali, 2012a).

Bu çalışmada Galile geometrisinde bazı özel eğriler incelenecektir. Bilindiği gibi eğriler diferansiyel geometrinin önemli bir sınıfını oluştururken aynı zamanda birçok bilim alanında da karşımıza çıkarlar. Örneğin; biyolojide; DNA yapısında, fizikte; fiziksel problemlerin çözümünde, mühendislikte; karayolu dizaynında vs. (Allman ve Rhodes, 2004). Fiziksel olarak eğri, hareketli bir parçacığın yörüngesi olarak, matematiksel olarak ise; diferansiyellenebilen bir fonksiyon olarak tanımlanır. Yüzey üzerindeki eğrileri incelemek için en önemli araçlardan biri hareketli çatı kavramıdır. Bir eğri verildiğinde bu eğrinin eğrilikleri Frenet çatı formülleri yardımıyla elde edilebilir. Fakat eğrilik fonksiyonları verildiğinde bu eğrilik fonksiyonlarına sahip olan eğrinin konum vektörünü bulmak her geometride her zaman mümkün değildir. Örneğin; Öklid veya Minkowski uzayında bir eğrinin konum vektörünün belirlenmesi problemi ancak eğrinin; doğru, helis, slant helis olma özel durumları için çözülebilir. Fakat bu problem Galile uzayında genel bir eğri için çözülebilir.

2. KURAMSAL TEMELLER VE KAYNAK ÖZETLERİ

Bu çalışmada eğrilerin Darboux çatısına göre konum vektörleri incelenmiştir. Konum vektörleri ile ilgili farklı uzaylarda, farklı çatılara göre birçok çalışma yapılmıştır. Aşağıda bu çalışmalardan bazıları kısaca tanıtılmaktadır.

Ali, (2010) çalışmasında Minkowski uzayında spacelike genel helislerin konum vektörlerini incelemiştir.

Ali, (2012a) çalışmasında Galile uzayında herhangi bir eğrinin konum vektörünü incelemiştir. İlk olarak eğrilerin Frenet çatısını belirlemiş, daha sonra da herhangi bir eğrinin eğrilik fonksiyonu ve burulma fonksiyonu cinsinden konum vektörünü elde etmiştir. Ayrıca dairesel helis, genel helis, Salkowski eğrisi ve Anti-Salkowski eğrisi gibi özel eğriler için konum vektörlerini belirlemiştir.

Ali, (2012b) çalışmasında ise Öklid uzayında slant helislerin konum vektörlerini araştırmıştır.

Bu çalışmada ise; 3-boyutlu Galile uzayında bir yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin Darboux elemanlarına göre konum vektörleri incelenmektedir.

Aşağıda bu çalışmada kullanılan bazı temel tanım ve teoremler ifade edilmiştir.

2.1. Tanım

G_3 uzayında hareket dönüşümleri aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\begin{aligned}\bar{x} &= a + x \\ \bar{y} &= b + cx + y\cos\theta + z\sin\theta \\ \bar{z} &= d + ex - y\sin\theta + z\cos\theta\end{aligned}\tag{2.1}$$

burada a, b, c, d, e ve θ reel sayılardır.

G_3 hareketler grubu 6-parametrelili bir gruptur. G_3 uzayındaki hareket dönüşümleri; öteleme, dönme ve burkulma hareketlerinin bileşkesidir. Daha ayrıntılı bilgi için Yaglom'un çalışmasına bakılabilir (Yaglom, 1979).

2.2. Tanım

Galile uzayında bir $\beta(x)$ eğrisinin Frenet çatı elemanları $\{\mathbf{T}(x), \mathbf{N}(x), \mathbf{B}(x)\}$, eğrilik ve burulma fonksiyonları sırasıyla $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ olsun. Burada $\kappa(x)$ ve $\tau(x)$ fonksiyonları sabit fonksiyon ise; $\beta(x)$ eğrisine *dairesel helis* denir (Ali, 2012a).

2.3. Tanım

Galile uzayında $\kappa(x)$ eğrilik ve $\tau(x)$ burulma fonksiyonuna sahip bir $\beta(x)$ eğrisi için $\frac{\tau(x)}{\kappa(x)}$ fonksiyonu sabit fonksiyon ise; $\beta(x)$ eğrisine *genel helis* denir (Ali, 2012a).

2.4. Tanım

Galile uzayında, eğrilik fonksiyonu sabit ve burulma fonksiyonu sabit olmayan bir regüler eğriye *Salkowski eğrisi* denir (Ali, 2012a).

2.5. Tanım

Galile uzayında, burulma fonksiyonu sabit ve eğrilik fonksiyonu sabit olmayan bir regüler eğriye *Anti-Salkowski eğrisi* denir (Ali, 2012a).

Diferansiyel geometrinin eğriler için bilinen önemli bazı sonuçlarını aşağıda bir tablo ile verecek olursak $\beta(x)$ eğrisi için şunları söyleyebiliriz.

Çizelge 2 : Genel bir eğrinin özel durumları

| $\beta(x)$ eğrisi için durumlar | | |
|---------------------------------|-------------------|---------------------|
| Jeodezik Eğri | \Leftrightarrow | $\kappa_g \equiv 0$ |
| Asimptotik Eğri | \Leftrightarrow | $\kappa_n \equiv 0$ |
| Eğrilik Çizgisi | \Leftrightarrow | $\tau_g \equiv 0$ |

Aşağıdaki çizelge ile eğrilik fonksiyonların ile eğrilerin bazı özel halleri arasındaki bilinen bazı denklemler verilmiştir.

Çizelge 3 : Bazı eğrilerin eğrilik ve burulma fonksiyonlarına göre durumları

| $\beta(x)$ eğrisi için özel durumlar | | |
|--|-------------------|---------------------------------------|
| $\kappa \equiv 0$ | \Leftrightarrow | β bir doğrudur . |
| $\tau \equiv 0$ | \Leftrightarrow | β bir düzlemsel eğridir. |
| $\kappa \equiv \text{sabit} > 0, \tau \equiv \text{sabit} > 0$ | \Leftrightarrow | β bir dairesel helisdir. |
| $\frac{\tau}{\kappa} \equiv \text{sabit}$ | \Leftrightarrow | β bir genel helisdir. |
| $\kappa \equiv \text{sabit}, \tau \neq \text{sabit}$ | \Leftrightarrow | β bir Salkowski eğrisidir. |
| $\kappa \neq \text{sabit}, \tau \equiv \text{sabit}$ | \Leftrightarrow | β bir Anti-Salkowski eğrisidir. |

Aşağıdaki tanımlarda Galile uzayındaki işlemler ve özellikleri verilmiştir.

2.6. Tanım

G_3 uzayında $u = (u_1, u_2, u_3)$ ve $v = (v_1, v_2, v_3)$ gibi iki vektörün Galile çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$u \cdot_G v = \begin{cases} u_1 v_1, & u_1 \neq 0 \text{ veya } v_1 \neq 0 \\ u_2 v_2 + u_3 v_3, & u_1 = 0 \text{ ve } v_1 = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Burada $u \cdot_G v = 0$ ise u ve v vektörlerine ortogonaldirler denir (Yaglom,1979).

2.7. Tanım

G_3 uzayında iki vektörün vektörel çarpımı

$$u \times_G v = \begin{cases} \begin{vmatrix} 0 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}; & u_1 \neq 0 \text{ veya } v_1 \neq 0 \\ \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}; & u_1 = 0 \text{ ve } v_1 = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

şeklinde tanımlıdır (Aziz ve Saad, 2015).

2.8. Tanım

Bir $A = (x, y, z)$ vektörünün normu

$$\|A\|_G = \begin{cases} |x| & , x \neq 0 \\ \sqrt{y^2 + z^2} & , x = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

şeklindedir. Burada $A = (x, y, z)$ vektörüne $x = 0$ ise *izotropik*, $x \neq 0$ ise *non-izotropik* vektör denir (Yaglom,1979).

2.1. Teorem

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow G_3$ birim hızlı eğrisi

$$\beta(x) = (x, y(x), z(x)) \quad (2.5)$$

şeklinde verilir. Bu eğrinin Frenet çatı elemanları

$$\mathbf{T}(x) = \beta'(x)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{N}(x) &= \frac{1}{\|\beta''(x)\|} \beta''(x) \\ &= \frac{1}{\kappa(x)} \beta''(x) \end{aligned} \quad (2.6)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(x) &= \mathbf{T}(x) \times_G \mathbf{N}(x) \\ &= \frac{1}{\kappa(x)} (0, -z''(x), y''(x)) \end{aligned}$$

şeklindedir. Burada $\kappa(x)$ eğrilik fonksiyonu $\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2}$ olarak tanımlanır.

$\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}$ vektörlerine sırasıyla teğet vektör alanı, normal vektör alanı ve binormal vektör alanı denir.

İspat

(2.2) ve (2.4) denklemleri kullanılarak istenilenler elde edilir.

2.2. Teorem

Frenet-Serret formülleri ve türevleri arasındaki ilişki matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ 0 & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{N} \\ \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

şeklindedir.

İspat

$\{\mathbf{T}, \mathbf{N}, \mathbf{B}\}$ Frenet vektör alanlarının (2.6) eşitliklerinden türevleri alındığında, eğrilik ve burulma fonksiyonları cinsinden yukarıdaki eşitlikler elde edilir. Burada $\kappa(x) = \sqrt{(y'')^2 + (z'')^2}$ eğrinin eğrilik fonksiyonu ve $\tau(x) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\kappa(x)^2}$ eğrinin burulma fonksiyonudur. ■

Galile uzayında yüzey üzerindeki eğriler incelenirken Frenet çatısı dışında başka bir çatı daha kullanılır. Eğrinin bir P noktasında teğet vektör alanı \mathbf{T} ve bu noktadaki yüzeyin birim normal vektör alanı \mathbf{n} olsun. Bu durumda $\mathbf{n} \times_G \mathbf{T} = \mathbf{Q}$ vektör alanı \mathbf{T} ve \mathbf{n} vektörlerine dik olan birim bir vektör alanıdır. O halde bu vektör alanlarının oluşturduğu $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$ çatısına “Darboux çatı alanı” veya “teğet normal çatı alanı” denir.

2.3. Teorem

$\beta : I \subset \mathbb{R} \rightarrow M \subset G_3$ birim hızlı bir eğri ve $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$, M yüzeyinin Darboux çatı alanı olmak üzere β eğrisinin Frenet formülleri matris formunda

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix}' = \begin{bmatrix} 0 & \kappa_g & \kappa_n \\ 0 & 0 & \tau_g \\ 0 & -\tau_g & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T} \\ \mathbf{Q} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

olarak elde edilir (Şahin, 2013).

2.4. Sonuç

Darboux çatı alanlarının eğrilik fonksiyonları ile Frenet çatı alanının eğrilik fonksiyonları arasında

$$\kappa^2 = \kappa_g^2 + \kappa_n^2, \quad \tau = -\tau_g + \frac{\kappa_g' \kappa_n - \kappa_g \kappa_n'}{\kappa_g^2 + \kappa_n^2} \quad (2.9)$$

bağıntıları vardır.

İspat:

(2.7) ve (2.8) denklemleri kullanılarak (2.9) bağıntıları elde edilir. ■

3. BULGULAR VE TARTIŞMA

3.1. G_3 Uzayında Darboux Çatısına Göre Bir Eğrinin Konum Vektörü

Bu bölümde G_3 uzayında bir yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin Darboux çatısına göre konum vektörünü inceleyeceğiz.

3.1. Teorem

G_3 uzayındaki bir yüzey üzerindeki eğrinin Darboux çatısı $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$ ve jeodezik eğriliği $\kappa_g(x)$, normal eğriliği $\kappa_n(x)$ ve jeodezik burulması ise $\tau_g(x) \neq 0$ olan birim hızlı bir $\beta(x)$ eğrisinin konum vektörü;

$$\begin{aligned} \beta(x) = & (x + c_1)\mathbf{T} \\ & + \left\{ -\frac{(x + c_1)\kappa_n(x)}{\tau_g(x)} + \left(c_2 - \int f(x)\tau_g(x) \sin[t(x)]dx \right) \sin[t(x)] \right. \\ & - \left. \left(c_3 + \int f(x)\tau_g(x) \cos[t(x)]dx \right) \cos[t(x)] \right\} \mathbf{Q} \\ & + \left\{ \left(c_2 - \int f(x)\tau_g(x) \sin[t(x)]dx \right) \cos[t(x)] \right. \\ & + \left. \left(c_3 + \int f(x)\tau_g(x) \cos[t(x)]dx \right) \sin[t(x)] \right\} \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklindedir. Burada $f(x) = \frac{(x+c_1)\kappa_g(x)}{\tau_g(x)} - \left(\frac{(x+c_1)\kappa_g(x)}{\tau_g(x)} \right)' \frac{1}{\tau_g(x)}$ ve $t(x) = \int \tau_g(x)dx$ şeklindedir.

İspat:

G_3 uzayında bir yüzey üzerinde keyfi bir $\beta(x)$ eğrisini alalım. Bu durumda $\beta(x)$ eğrisinin konum vektörü $\{\mathbf{T}, \mathbf{Q}, \mathbf{n}\}$ çatı olduğundan

$$\beta(x) = \gamma_1(x)\mathbf{T}(x) + \gamma_2(x)\mathbf{Q}(x) + \gamma_3(x)\mathbf{n}(x) \tag{3.2}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ reel değerli diferansiyellenebilir fonksiyonlardır. Şimdi bu denklemin x değişkenine göre türevi alınır,

$$\beta'(x) = \gamma_1'(x)T(x) + \gamma_1(x)T'(x) + \gamma_2'(x)Q(x) + \gamma_2(x)Q'(x) + \gamma_3'(x)n(x) + \gamma_3(x)n'(x)$$

denklemini bulunur. Bu denkleminde (2.8) Frenet denklemleri kullanılırsa,

$$T(x) = \gamma_1'(x)T(x) + \gamma_1(x) \left(\kappa_g(x)Q(x) + \kappa_n(x)n(x) \right) + \gamma_2'(x)Q(x) + \gamma_2(x)\tau_g(x)n(x) + \gamma_3'(x)n(x) + \gamma_3(x) \left(-\tau_g(x)Q(x) \right)$$

eşitiği elde edilir ve bu eşitlikten gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$0 = (\gamma_1' - 1)T + (\gamma_1\kappa_g + \gamma_2' - \gamma_3\tau_g)Q + (\gamma_1\kappa_n + \gamma_2\tau_g + \gamma_3')n$$

denklemini bulunur. T, Q, n vektör alanları lineer bağımsız olduğundan,

$$\gamma_1' - 1 = 0,$$

$$\gamma_1\kappa_g + \gamma_2' - \gamma_3\tau_g = 0, \quad (3.3)$$

$$\gamma_1\kappa_n + \gamma_2\tau_g + \gamma_3' = 0$$

diferansiyel denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin ilk denkleminin integral alınır

$$\gamma_1(x) = x + c_1 \quad (3.4)$$

elde edilir. İkinci ve üçüncü denklemleri çözmek için $t(x) = \int \tau_g(x) dx$ değişkenini kullanarak parametre değiştirirsek bu durumda x değişkenine bağlı bütün fonksiyonlar t değişkenine bağlı fonksiyonlara dönüşür.

$$t = \int \tau_g(x) dx$$

eşitliğinden türev alınırsa,

$$dt = \tau_g(x)dx$$

$$\frac{dt}{dx} = \tau_g(x)$$

elde edilir. (3.3) denklem sisteminin üçüncü denklemi

$$\gamma_3'(x) = -\gamma_1(x)\kappa_n(x) - \gamma_2(x)\tau_g(x)$$

şeklinde olup burada t değişkenine göre türevi " \bullet " simgesi ile göstererek $\gamma_3(x)$ fonksiyonunun t değişkenine göre türevi alınırsa,

$$\gamma_3^\bullet = \frac{d\gamma_3}{dt} = \frac{d\gamma_3}{dx} \frac{dx}{dt} = (-\gamma_1\kappa_n - \gamma_2\tau_g) \frac{1}{\tau_g} = -\frac{\gamma_1\kappa_n}{\tau_g} - \gamma_2$$

elde edilir. Bu denklemden $\gamma_2(x)$ fonksiyonu çekilirse

$$\gamma_2 = -\frac{\gamma_1\kappa_n}{\tau_g} - \gamma_3^\bullet \quad (3.5)$$

denklemi bulunur. Bu eşitlikte x değişkenine göre türev alınırsa,

$$\frac{d\gamma_2}{dx} = \frac{d\gamma_2}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d\gamma_2}{dt} \tau_g = \left(\left(-\frac{\gamma_1\kappa_n}{\tau_g} \right)^\bullet - \gamma_3^{\bullet\bullet} \right) \tau_g$$

elde edilir. Bu denklemde (3.3) denklem sistemindeki ikinci denklem kullanılarak,

$$\gamma_1\kappa_g + \left(\left(-\frac{\gamma_1\kappa_n}{\tau_g} \right)^\bullet - \gamma_3^{\bullet\bullet} \right) \tau_g - \gamma_3\tau_g = 0$$

bulunur. Bu denklem düzenlenirse,

$$\gamma_1\kappa_g + \left(-\frac{\gamma_1\kappa_n}{\tau_g} \right)^\bullet \tau_g - \gamma_3^{\bullet\bullet} \tau_g - \gamma_3\tau_g = 0$$

elde edilir. Bu denklemde γ_3 fonksiyonuna bağlı terimler eşitliğin bir tarafında yazılırsa,

$$\gamma_3^{\bullet\bullet} + \gamma_3 = \frac{\gamma_1 \kappa_g}{\tau_g} - \left(-\frac{\gamma_1 \kappa_n}{\tau_g} \right)^{\bullet} \quad (3.6)$$

bulunur. Bu denklemde,

$$\frac{\gamma_1 \kappa_g}{\tau_g} - \left(-\frac{\gamma_1 \kappa_n}{\tau_g} \right)^{\bullet} = f(t)$$

denilirse, bu durumda (3.6) diferansiyel denkleminin genel çözümü,

$$\gamma_3(t) = [c_2 - \int f(t) \sin t dt] \cos t + [c_3 + \int f(t) \cos t dt] \sin t \quad (3.7)$$

olarak elde edilir. γ_2 fonksiyonunu bulmak için (3.5) denklemini kullanırız. Bunun için gerekli olan $\gamma_3^{\bullet}(t)$ fonksiyonunu bulmak için çözüm fonksiyonunun türevini alarak,

$$\begin{aligned} \gamma_3^{\bullet}(t) &= (-f(t) \sin t) \cos t + \left[c_2 - \int f(t) \sin t dt \right] (-\sin t) + f(t) \cos t \sin t \\ &\quad + \left[c_3 + \int f(t) \cos t dt \right] \cos t \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifade düzenlenerek,

$$\gamma_3^{\bullet}(t) = - \left[c_2 - \int f(t) \sin t dt \right] \sin t + \left[c_3 + \int f(t) \cos t dt \right] \cos t$$

denklemini bulunur. Ayrıca bu ifade (3.5) denkleminde yani

$$\gamma_2(t) = -\frac{\gamma_1(t) \kappa_n(t)}{\tau_g(t)} - \gamma_3^{\bullet}(t)$$

eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\gamma_2(t) = -\frac{\gamma_1(t) \kappa_n(t)}{\tau_g(t)} + [c_2 - \int f(t) \sin t dt] \sin t - [c_3 + \int f(t) \cos t dt] \cos t \quad (3.8)$$

olarak bulunur. Burada $f(t) = \frac{\gamma_1 \kappa_g}{\tau_g} - \left(\frac{\gamma_1 \kappa_n}{\tau_g} \right)'$ şeklindedir. Bu denklemlerden x değişkenine geçilir ve γ_1 fonksiyonu yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \gamma_3(x) &= \left[c_2 - \int \left((x + c_1) \kappa_g - \left(\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} \right)' \right) \sin \left(\int \tau_g dx \right) dx \right] \cos \left(\int \tau_g dx \right) \\ &+ \left[c_3 + \int \left((x + c_1) \kappa_g - \left(\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} \right)' \right) \cos \left(\int \tau_g dx \right) dx \right] \sin \left(\int \tau_g dx \right) \end{aligned} \quad (3.9)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} \gamma_2(x) &= -\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} \\ &+ \left[c_2 - \int \left((x + c_1) \kappa_g - \left(\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} \right)' \right) \sin \left(\int \tau_g dx \right) dx \right] \sin \left(\int \tau_g dx \right) \\ &+ \left[c_3 + \int \left((x + c_1) \kappa_g - \left(\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} \right)' \right) \cos \left(\int \tau_g dx \right) dx \right] \cos \left(\int \tau_g dx \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

olarak bulunur. Burada

$$f(x) = \frac{\gamma_1(x) \kappa_g(x)}{\tau_g(x)} - \left(\frac{\gamma_1(x) \kappa_n(x)}{\tau_g(x)} \right)' \frac{1}{\tau_g(x)} \quad \text{ve} \quad t = \int \tau_g(x) dx$$

alınırsa, (3.9) ve (3.10) denklemleriyle verilen $\gamma_2(x)$ ve $\gamma_3(x)$ fonksiyonları sırasıyla

$$\begin{aligned} \gamma_2(x) &= -\frac{(x + c_1) \kappa_n}{\tau_g} + \left[c_2 - \int f(x) \tau_g \sin[t(x)] dx \right] \sin[t(x)] \\ &- \left[c_3 + \int f(x) \tau_g \cos[t(x)] dx \right] \cos[t(x)] \end{aligned} \quad (3.11)$$

$$\begin{aligned} \gamma_3(x) &= \left[c_2 - \int f(x)\tau_g \sin[t(x)] dx \right] \cos[t(x)] \\ &+ [c_3 + \int f(x)\tau_g \cos[t(x)] dx] \sin[t(x)] \end{aligned} \quad (3.12)$$

olarak bulunur. Sonuç olarak (3.2) denkleminde verilen $\beta(x)$ eğrisi

$$\beta(x) = \gamma_1(x)\mathbf{T}(x) + \gamma_2(x)\mathbf{Q}(x) + \gamma_3(x)\mathbf{n}(x)$$

şeklinde olup (3.4), (3.8) ve (3.9) denklemlerinde elde edilen $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ fonksiyonları yerine yazılarak,

$$\begin{aligned} \beta(x) &= (x + c_1)\mathbf{T} \\ &+ \left\{ -\frac{(x + c_1)\kappa_n(x)}{\tau_g(x)} + \left(c_2 - \int f(x)\tau_g(x) \sin[t(x)] dx \right) \sin[t(x)] \right. \\ &\left. - \left(c_3 + \int f(x)\tau_g(x) \cos[t(x)] dx \right) \cos[t(x)] \right\} \mathbf{Q} \\ &+ \left\{ \left(c_2 - \int f(x)\tau_g(x) \sin[t(x)] dx \right) \cos[t(x)] \right. \\ &\left. + \left(c_3 + \int f(x)\tau_g(x) \cos[t(x)] dx \right) \sin[t(x)] \right\} \mathbf{n} \end{aligned}$$

şeklinde bulunmuş olur.

3.2. G_3 Uzayında Standart Çatıya Göre Bir Eğrinin Konum Vektörü

Bu kısımda Galile uzayında bir yüzey üzerindeki herhangi bir eğrinin standart çatıya göre konum vektörünü, eğrinin jeodezik, normal eğrilik ve jeodezik burulma fonksiyonlarına göre elde edeceğiz.

3.2. Teorem

Galile uzayında bir yüzey üzerindeki birim hızlı bir eğrinin standart çatıya göre jeodezik eğrilik, normal eğrilik ve jeodezik burulma fonksiyonlarına bağlı konum vektörü,

$$\beta(x) = \begin{pmatrix} x, \int \left[\int \left(\kappa_g S_{\tau_g} - \kappa_n \int \tau_g S_{\tau_g} dx \right) dx \right] dx, \\ \int \left[\int \left(\kappa_g C_{\tau_g} - \kappa_n \int \tau_g C_{\tau_g} dx \right) dx \right] dx \end{pmatrix}$$

şeklindedir. Burada $C_{\tau_g} = \cos[\int \tau_g(x) dx]$ ve $S_{\tau_g} = \sin[\int \tau_g(x) dx]$ olarak alınmıştır.

3.2. İspat

G_3 uzayında bir yüzey üzerindeki birim hızlı herhangi bir eğri $\beta(x)$ olsun. Darboux çatisına göre (2.8) Frenet denklemlerinden

$$Q'(x) = \tau_g(x)n(x)$$

olduğunu biliyoruz. Bu denklemden $n(x)$ fonksiyonu yalnız bırakılırsa,

$$n(x) = \frac{1}{\tau_g(x)} Q'(x)$$

eşitliği elde edilir. Burada x değişkenine göre türev alınır,

$$n'(x) = \left(\frac{1}{\tau_g(x)} Q'(x) \right)'$$

elde edilir. Tekrar (2.8) Frenet denklemleri kullanılarak n' yerine yazılırsa,

$$\left(\frac{1}{\tau_g(x)} Q'(x) \right)' = -\tau_g(x)Q(x) \quad (3.13)$$

bulunur. Dolayısıyla $Q(x)$ vektör alanına göre

$$\left(\frac{1}{\tau_g(x)} Q'(x) \right)' + \tau_g(x)Q(x) = 0$$

adi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu eşitlikte $t(x) = \int \tau_g(x) dx$ dönüşümü yapıp gerekli türevler alınır,

$$\frac{d\left(\frac{1}{\tau_g(x)}Q'(x)\right)}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\tau_g(x)}Q'(x)\right)}{dt} \frac{dt}{dx} = \frac{d\left(\frac{1}{\tau_g(x)}\frac{dQ}{dt}\tau_g(x)\right)}{dt} \tau_g(x) = \frac{d^2Q}{dt^2}\tau_g(x)$$

elde edilir. Bulduğumuz ifade (3.13) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\tau_g(x) \frac{d^2Q}{dt^2} + \tau_g(x)Q(x) = 0$$

eşitliği elde edilir. Buradan, $\tau_g(x) \neq 0$ olduğundan,

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + Q = 0 \quad (3.14)$$

denklemini bulunur. Buradan Q normal vektörünü

$$Q = (0, \cos[\theta(t)], \sin[\theta(t)]) = (0, Q_1, Q_2) \quad (3.15)$$

şeklinde yazabiliriz. Bu Q vektöründeki ikinci ve üçüncü bileşenler Q_1 ve Q_2 olmak üzere gerekli türevler alınır

$$Q_1^* = -\sin[\theta(t)]\theta^*(t)$$

$$Q_1^{**} = -(\cos[\theta(t)]\theta^{*2}(t) + \sin[\theta(t)]\theta^{**}(t))$$

$$Q_2^* = \cos[\theta(t)]\theta^*(t)$$

$$Q_2^{**} = -\sin[\theta(t)]\theta^{*2}(t) + \cos[\theta(t)]\theta^{**}(t)$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler, Q_1 ve Q_2 için (3.14) denkleminin bir sonucu olan

$$\frac{d^2Q_1}{dt^2} + Q_1 = 0 \quad , \quad \frac{d^2Q_2}{dt^2} + Q_2 = 0$$

eşitliklerinde yerine yazılırsa,

$$-\cos[\theta(t)]\theta^{*2}(t) - \sin[\theta(t)]\theta^{**}(t) + \cos[\theta(t)] = 0$$

$$(1 - \theta^{*2}(t))\cos[\theta(t)] - \theta^{**}(t)\sin[\theta(t)] = 0$$

$$-\sin[\theta(t)]\theta^{*2}(t) + \cos[\theta(t)]\theta^{**}(t) + \sin[\theta(t)] = 0$$

$$(1 - \theta'^2(t)) \sin[\theta(t)] + \theta''(t) \cos[\theta(t)] = 0$$

denklemleri bulunur. Buradan;

$$1 - \theta'^2(t) = 0$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla,

$$\theta(t) = \mp t$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\theta(t) = \mp \int \tau_g(x) dx \quad (3.16)$$

eşitliği elde edilir. Genelliği bozmadan, $\theta(t)$ için pozitif işaretli olanı alabiliriz. Daha sonra (3.15) denkleminde (3.16) kullanılırsa,

$$Q(x) = (0, \sin[\int \tau_g(x) dx], \cos[\int \tau_g(x) dx]) \quad (3.17)$$

denklemini bulunur. Bu denklem (2.8) Frenet denklemlerinde normal vektörünün türevinde yerine yazılarak

$$n'(x) = -\tau_g(x)Q(x)$$

$$n'(x) = -\tau_g(x)(0, \sin[\int \tau_g(x) dx], \cos[\int \tau_g(x) dx]) \quad (3.18)$$

elde edilir. (3.8) denkleminin integrali alınarak düzenlenirse,

$$n(x) = (0, -\int \tau_g(x) \sin[\int \tau_g(x) dx] dx, -\int \tau_g(x) \cos[\int \tau_g(x) dx] dx) \quad (3.19)$$

denklemini elde edilir. (3.19) denkleminde içerideki integraller hesaplandığında,

$$n(x) = (0, \cos[\int \tau_g(x) dx], -\sin[\int \tau_g(x) dx]) \quad (3.20)$$

şeklinde bulunur. (2.8) Frenet formüllerinde teğet vektör alanının türevinde (3.17) ve (3.20) denklemleri kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \kappa_g(x)Q(x) + \kappa_n(x)n(x) \\
&= \kappa_g(x) \left(0, \sin \left[\int \tau_g(x) dx \right], \cos \left[\int \tau_g(x) dx \right] \right) \\
&+ \kappa_n(x) \left(0, - \int \tau_g(x) \sin \left[\int \tau_g(x) dx \right] dx, - \int \tau_g(x) \cos \left[\int \tau_g(x) dx \right] dx \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
T'(x) &= \left(0, \kappa_g(x) \sin \left[\int \tau_g(x) dx \right] - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) \sin \left[\int \tau_g(x) dx \right] dx, \right. \\
&\quad \left. \kappa_g(x) \cos \left[\int \tau_g(x) dx \right] - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) \cos \left[\int \tau_g(x) dx \right] dx \right) \quad (3.21)
\end{aligned}$$

denklemini bulunur. Bu durumda $C_{\tau_g} = \cos \left[\int \tau_g(x) dx \right]$ ve $S_{\tau_g} = \sin \left[\int \tau_g(x) dx \right]$ kısaltmaları yapılırsa, (3.21) denklemi

$$T'(x) = \left(0, \kappa_g(x)S_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx, \kappa_g(x)C_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx \right) \quad (3.22)$$

şeklinde olur. Bu denklemden integral alınarak teğet vektör alanı,

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(\int 0 dx, \int \left(\kappa_g(x)S_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx \right) dx, \int \left(\kappa_g(x)C_{\tau_g} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx \right) dx \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\begin{aligned}
T(x) &= \left(1, \int \left(\kappa_g(x)S_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx \right) dx, \right. \\
&\quad \left. \int \left(\kappa_g(x)C_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx \right) dx \right) + d \quad (3.23)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Eğri birim hızlı olduğundan $\beta'(x) = T(x)$ olup bu eşitlikten

$$\begin{aligned}
\beta'(x) &= \left(1, \int \left(\kappa_g(x)S_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx \right) dx, \right. \\
&\quad \left. \int \left(\kappa_g(x)C_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx \right) dx \right) \quad (3.24)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. (3.24) denkleminde bir kez daha integral alınarak, eğrinin standart çatıya göre jeodezik, normal eğrilik ve jeodezik burulma fonksiyonlarına bağlı konum vektörü;

$$\beta(x) = \left(x, \int \left[\int \left(\kappa_g(x) S_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx \right) dx \right] dx, \right. \\ \left. \int \left[\int \left(\kappa_g(x) C_{\tau_g} - \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx \right) dx \right] dx \right) \quad (3.25)$$

şeklinde elde edilir. ■

3.3.G₃ Uzayında Bir Yüzey Üzerindeki Bilinen Bazı Özel Eğrilerin Konum Vektörleri

Bu kısımda yüzeyler üzerinde bilinen özel eğrilerden jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgilerinin konum vektörlerini ifade edeceğiz. Ayrıca bu eğrilerin dairesel helis, genel helis, Salkowski ve Anti-Salkowski eğrileri olma özel halleri için karakterizasyonlar vereceğiz.

3.3.1. Teorem

Galile uzayındaki jeodezik eğriler ailesinin konum vektörünü $\beta_g(x)$ olarak alırsak,

$$\beta_g(x) = \left(x, - \iint \kappa_n(x) \int \tau_g(x) S_{\tau_g} dx dx dx, - \iint \kappa_n(x) \int \tau_g(x) C_{\tau_g} dx dx dx \right) \quad (3.26)$$

şeklinde dir.

İspat

Teorem 3.2 de verdiğimiz konum vektöründe $\kappa_g(x) = 0$ alınırsa yukarıdaki denklem elde edilir. Şimdi aşağıda sırasıyla jeodezik eğrilerin dairesel helis, genel helis, salkowski ve anti-salkowski eğrisi olma durumlarını birer sonuç olarak ifade edeceğiz. Bu sonuçların her biri Teorem 3.3.1 de verilen jeodezik eğrilerin konum vektöründe Tablo 1 de verilen şartlar ve (2.9) denklemini kullanılarak elde edilebilir.

3.3.2. Sonuç

β eğrisi jeodezik ve dairesel helis olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{g_{ch}}(x) = \left(x, - \frac{e}{c^2} \cos(cx + c_1) + e_1 x^2 + e_2 x + e_3, \frac{e}{c^2} \sin(cx + c_1) + f_1 x^2 + f_2 x + f_3 \right)$$

şeklinde dir.

3.3.3.Sonuç

β eğrisi jeodezik ve genel helis olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{g_{gh}}(x) = \left(x, \iint \kappa_n(x) \left[\cos \left(d \int \kappa_n(x) dx \right) + d_1 \right] dx dx, \right. \\ \left. - \iint \kappa_n(x) \left[\sin \left(d \int \kappa_n(x) dx \right) + d_2 \right] dx dx \right)$$

şeklindedir.

3.3.4.Sonuç

β eğrisi jeodezik ve salkowski eğrisi olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{g_s}(x) = \left(x, m \iint \left(\cos \left(\int \tau_g(x) dx \right) + m_1 \right) dx dx, \right. \\ \left. - m \iint \left(\sin \left(\int \tau_g(x) dx \right) + m_2 \right) dx dx \right)$$

şeklindedir.

3.3.5.Sonuç

β eğrisi jeodezik ve anti-salkowski eğrisi olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{g_{as}}(x) = \left(x, \iint (\kappa_n(x) [\cos(bx + b_1) + b_2]) dx dx, \right. \\ \left. - \iint (\kappa_n(x) [\sin(bx + b_1) + b_3]) dx dx \right)$$

şeklindedir.

3.3.6.Teorem

Galile uzayındaki asimptotik eğriler ailesinin konum vektörünü $\beta_a(x)$ olarak alırsak,

$$\beta_a(x) = \left(x, \iint \kappa_g(x) \sin \left(\int \tau_g(x) dx \right) dx dx, \iint \kappa_g(x) \cos \left(\int \tau_g(x) dx \right) dx dx \right) \quad (3.27)$$

şeklindedir.

İspat

Teorem 3.2 de verdiğimiz konum vektöründe $K_n(x) = 0$ alınırsa yukarıdaki denklem elde edilir. Şimdi aşağıda sırasıyla jeodezik eğrilerin dairesel helis, genel helis, salkowski ve anti-salkowski eğrisi olma durumlarını birer sonuç olarak ifade edeceğiz. Bu sonuçların her biri Teorem 3.3.1 de verilen jeodezik eğrilerin konum vektöründe Tablo 1 de verilen şartlar ve (2.9) denklemi kullanılarak elde edilebilir.

3.3.7.Sonuç

β eğrisi asimptotik ve dairesel helis olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{a_{ch}}(x) = \left(x, -\frac{e}{c^2} \sin(cx + c_1) + c_2x + c_3, -\frac{e}{c^2} \cos(cx + c_1) + c_4x + c_5 \right)$$

şeklindedir.

3.3.8.Sonuç

β eğrisi asimptotik ve genel helis olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{a_{gh}}(x) = \left(x, -\frac{1}{k} \int \cos \left(k \int \kappa_g(x) dx \right) dx + k_1x + k_2, \frac{1}{k} \int \sin \left(k \int \kappa_g(x) dx \right) dx + k_3x + k_4 \right)$$

şeklindedir.

3.3.9.Sonuç

β eğrisi asimptotik ve salkowski eğrisi olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{a_s}(x) = \left(x, \iint \left(e \sin \left(\int \tau_g(x) dx \right) \right) dx dx, \iint \left(e \cos \left(\int \tau_g(x) dx \right) \right) dx dx \right)$$

şeklindedir.

3.3.10.Sonuç

β eğrisi asimptotik ve anti-salkowski eğrisi olsun. Bu durumda eğrinin konum vektörü,

$$\beta_{a_{as}}(x) = \left(x, \iint (\kappa_g(x) \sin(dx + d_1)) dx dx, \iint (\kappa_g(x) \cos(dx + d_1)) dx dx \right)$$

şeklindedir.

3.3.11. Teorem

Galile uzayındaki eğrilik çizgisi eğriler ailesinin konum vektörünü $\beta_a(x)$ olarak alırsak,

$$\beta_p(x) = \left(x, \iint (c_1 \kappa_g(x) - c_2 \kappa_n(x)) dx dx, \iint (c_3 \kappa_g(x) - c_4 \kappa_n(x)) dx dx \right) \quad (3.28)$$

şeklindedir.

İspat

Teorem 3.2 de verdiğimiz konum vektöründe $\tau_g(x) = 0$ alınırsa yukarıdaki denklem elde edilir. Şimdi aşağıda sırasıyla jeodezik eğrilerin dairesel helis, genel helis, salkowski ve anti-salkowski eğrisi olma durumlarını birer sonuç olarak ifade edeceğiz.

3.3.12. Sonuç

β eğrisi eğrilik çizgisi ve dairesel helis eğrisi olsun. Bu durumda aşağıdaki diferansiyel denklem sistemi,

$$\kappa_g(x) \kappa'_g(x) + \kappa_n(x) \kappa'_n(x) = 0$$

$$\kappa_n(x) \kappa''_g(x) - \kappa_g(x) \kappa''_n(x) = 0$$

elde edilir.

Özel Durum:

$\kappa_g(x)$ ve $\kappa_n(x)$ sabit fonksiyonlar olarak alınırsa yukarıdaki denklem sisteminin sağlanacağı açıktır. Bu durumda, $\kappa_g(x)$ ve $\kappa_n(x)$ eğrilikleri sabit olan bir eğrilik çizgisinin dairesel helis olması durumunda konum vektörü,

$$\beta_{p_{ch}}(x) = (x, a_1 x^2 + a_2 x + a_3, b_1 x^2 + b_2 x + b_3)$$

şeklindedir.

Ayrıca başka bir özel durum olarak $\kappa_g(x)$ ve $\kappa_n(x)$ fonksiyonlarının sırasıyla $\sin(x)$ ve $\cos(x)$ olması durumu için de konum vektörü ifade edilebilir.

3.3.13.Sonuç

β eğrisi eğrilik çizgisi ve genel helis olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \kappa_g'' \kappa_n^3 + \kappa_g'' \kappa_n \kappa_g^2 - \kappa_n^2 \kappa_g \kappa_n'' - 3\kappa_n^2 \kappa_g' \kappa_n' - 3\kappa_n \kappa_g \kappa_g'^2 + 3\kappa_n \kappa_g \kappa_n'^2 - \kappa_g^3 \kappa_n'' \\ + 3\kappa_g^2 \kappa_g' \kappa_n' = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

3.3.14.Sonuç

β eğrisi eğrilik çizgisi ve salkowski eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\kappa_g \kappa_g' + \kappa_n \kappa_n' = 0$$

diferansiyel denklemi elde edilir. Yani $\kappa_g^2 + \kappa_n^2 = c(sbt)$ olur. Dolayısıyla 3.3.12. Sonuçta verilen özel haller burada da geçerli olduğu açıktır.

3.3.15.Sonuç

β eğrisi eğrilik çizgisi ve anti-salkowski eğrisi olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \kappa_g'' \kappa_g^2 \kappa_n + \kappa_g'' \kappa_n^3 - \kappa_n'' \kappa_g^3 - \kappa_n'' \kappa_g \kappa_n^2 - 2\kappa_n'^2 \kappa_g \kappa_n + 2\kappa_g' \kappa_n' \kappa_g^2 - 2\kappa_g' \kappa_n' \kappa_n^2 \\ + 2\kappa_n'^2 \kappa_g \kappa_n = 0 \end{aligned}$$

diferansiyel denklemi elde edilir.

3.3.16.Örnek

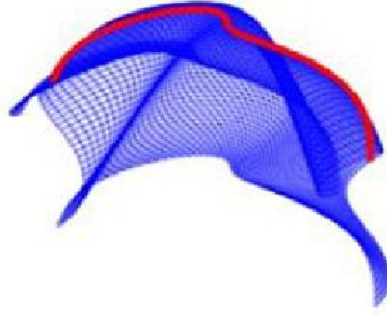
Bir φ yüzeyi;

$$\varphi(u,v) = \left(u + v, \frac{u - \sin(u+v)\cos(u+v)}{4}, \frac{\sin^2(u+v) - u^2}{4} \right)$$

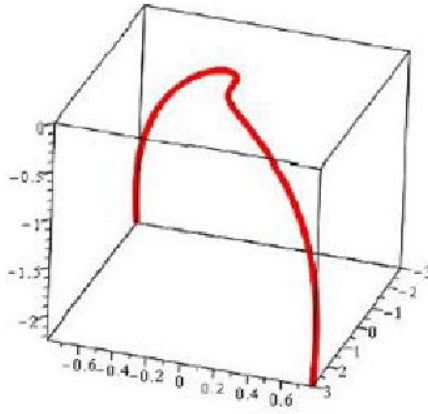
şeklinde ve φ yüzeyi üzerinde bir $\beta(x)$ eğrisi $\kappa = \sin x$ ve $\tau = 1$ olan bir jeodezik eğri olsun. Bu durumda bu eğri

$$\beta(x) = \left(x, \frac{x - \sin x \cos x}{4}, \frac{\sin^2 x - x^2}{4} \right)$$

şeklindedir. Aşağıda bu yüzey ve eğrinin grafiği verilmiştir.



Şekil 1 : $\varphi(u,v)$ yüzeyi



Şekil 2 : $\beta(x)$ eğrisi

4. SONUÇ

Sonuç olarak, bu çalışmada 3-boyutlu Galile uzayında bir yüzey üzerindeki birim hızlı eğrilerin Darboux çatısına göre konum vektörü elde edildi. Bu konum vektörü kullanılarak yüzey üzerindeki önemli özel eğrilerin örneğin; jeodezik, asimptotik ve eğrilik çizgilerinin de konum vektörleri elde edildi. Bu tezdeki konum vektörleri kullanılarak bilinen önemli eğri çiftlerinin konum vektörleri de elde edilebilir. Bu eğrilere bağlı olarak verilen denklemler, konum vektörleri kullanılarak daha genel denklemler olarak da ifade edilebilir.

KAYNAKLAR

Ali, A.T. (2010). Position vectors of spacelike general helices in Minkowski 3-space, *Nonlin. Anal. Theory Meth. Appl.* **73**, 1118–1126.

Ali, A.T. (2012a). Position vectors of curves in the Galilean 3-space, *Mathematical Vesnik.*, (64), 200-210.

Ali, A.T. (2012b). Position vectors of slant helices in Euclidean 3-space, *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **20**(1), 1–6.

Allman E.S. ve Rhodes J.A. (2004). *Mathematical Models in Biology an Introduction* İngiltere: Cambridge University Press.

Aziz, H.S.A. ve Saad, (2015). M. K., Smarandache curves of some special curves in the Galilean 3-space. *Honam Mathematical journal*, (37), 253-264.

Casse,R. (2006). *Projective Geometry:An Introduction*, Oxford Univ.Press.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1982). *Diferansiyel Geometri 1*. Ankara: İnönü Üniv. Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 3-20.

Hacısalıhoğlu, H. H. (1998). *Dönüşümler ve Geometriler*. Ankara: Fen Fakültesi yayınları, Erdem matbaa, 3-10.

Kreyszig E. (1991). *Differential Geometry*. New York: Dover Publications.

Şahin, T. (2013). Intrinsic equations for a generalized relaxed elastic line on an oriented surface in the Galilean space. *Acta Mathematica Scientia*, B(33), 701-711.

Yaglom, I. M. (1979). *A simple non-Euclidean geometry and its physical basis*. New York: Springer-Verlag. 5-250.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Buket DİRİŞEN
 Uyuşu : Türkiye Cumhuriyeti
 Doğum tarihi ve yeri : 03.04.1989- Vezirköprü
 Medeni hali : Evli
 e-mail : buketceylendirisen@hotmail.com

| Eğitim Derecesi | Okul/Program | Mezuniyet Yılı |
|-----------------|--|----------------|
| Lisans | Ondokuz Mayıs Üniversitesi/ Matematik Bölümü | 2014 |
| Lisans | Amasya Üniversitesi/ İlköğretim Matematik Öğretmenliği | 2019 |

Yabancı Dil

İngilizce

Bilimsel Faliyetler

Şahin, T. and Dirişen, B.C. (2019). Position vectors of with respect to Darboux frame in the Galilean space. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.* 68(2), 2079-2093. (E-SCI)