GRUP TEORİNİN ESNEK BİRLEŞİMSEL GRUPLARA AKTARILMASI

EMRAH MUŞTUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2017

AMASYA

GRUP TEORİNİN ESNEK BİRLEŞİMSEL GRUPLARA AKTARILMASI

EMRAH MUŞTUOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2017

AMASYA

Emrah MUŞTUOĞLU tarafından hazırlanan "Grup Teorinin Esnek Birleşimsel Gruplara Aktarılması" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN
Tez Danışmanı, İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN ....
(İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, A.Ü.)
Doç. Dr. ....
()
Yrd. Doç. Dr. ....
( )

//2017

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Emrah MUŞTUOĞLU

GRUP TEORİNİN ESNEK BİRLEŞİMSEL GRUPLARA AKTARILMASI

(Yüksek Lisans Tezi)

Emrah MUŞTUOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2017

ÖZET

Molodstov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisi, belirsizlikle başa çıkmak için etkili bir matematiksel araç olarak görülmektedir. Bu teori; bilgi sistemleri, karar verme problemleri, optimizasyon teorisi, cebirsel yapılar ve matematiksel analiz gibi belirsizlik içeren birçok alana uygulandı. Bu tez çalışmasında, parametre kümesi grubun elamanlarından oluşan esnek kümeler üzerinde bir esnek çarpım işlemi tanımlandı ve bu işlemin özellikleri gösterildi. Normal esnek birleşimsel gruplar ile ilgili bazı teoremler ispatlandı ve tanımladığımız esnek çarpım işlemi ile bağıntısı verildi. Normal EB-Gruplarda fonksiyonların esnek görüntülerinin homomorfik yapılarda korunduğu gösterildi. Esnek karakteristik fonksiyon tanımlanarak özellikleri gösterildi. A-α Esnek Kümesindeki esnek çarpım işlemi ile esnek koset ve bölüm gruplarının inşası yapıldı.

Bilim Kodu :

Anahtar Kelimeler : Esnek Küme, Esnek Çarpım, Normal EB-Grup, Esnek Karakteristik Fonksiyon, A-α Esnek Kümesi, Esnek Koset, Bölüm Grupları

Sayfa Adedi : 60

Tez Yöneticisi :

CONVEYING GROUP THEORY TO SOFT UNI-GROUPS

(M.Sc.Thesis)

EMRAH MUŞTUOĞLU

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

JANUARY 2017

ABSTRACT

Soft set theory, proposed by Molodtsov, has been regarded as an effective mathematical tool to deal with uncertainties. This theory has been applied to many fields such as information systems, decision making problems, optimization theory, algebraic structures and basic mathematics analysis, etc. which contain uncertainties. In this thesis, we define soft product on a soft set the parameter of which is the elements of a group and derive its basic properties. We proof some theorems releated to Normal Soft Uni-Groups and investigate its relation as regards soft product which we defined. We demonstrate that soft images of functions are preserved under the homomorphic structure in Soft Uni-Groups. The soft characteristic function is defined and its properties are shown. We also construct soft coset and quotient groups with the soft product operation in the A-α soft set.

Science Code :

Key Words : **Soft Set, Soft Product, Normal Soft Uni-Group, Soft Characteristic Function, A-α Soft Set, Soft Coset, Quotient Groups**

Page Number : **60**

Adviser :

TEŞEKKÜR

Amasya üniversitesinde yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgisi, tecrübesi, akademik kişiliği ve güler yüzüyle bana yön veren saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Aslıhan Sezgin'e ve ders aşamasında bilgilerinden ve fikirlerinden istifade ettiğim Doç. Dr. Ergül Türkmen ile Doç. Dr. Burcu Nişancı Türkmen'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca üzerimde çok emekleri bulunan kıymetli annem ve babam ile her türlü desteğinden ötürü değerli eşim Selma Hanımefendi'ye sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

Bu tez 16-0227 numaralı FMB-BAP kapsamında Amasya Üniversitesi tarafından finansal olarak desteklenmiştir. Amasya Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine verdiği finansal destekten dolayı teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER LİSTESİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$H \leq G$	H Alt grup G
aH	H'nin G'deki a'yı Kapsayan Sol Yan Kümesi
Ha	H'nin G'deki a'yı Kapsayan Sağ Yan Kümesi
$\subseteq$	Alt Küme
$\supseteq$	Kapsama
$\cap$	Kümelerde Kesişim İşlemi
$\cup$	Kümelerde Birleşim İşlemi
$N_G(H)$	H'nin G İçindeki Normalleyeni
$H \lhd G$	H Normal Alt grup G
G/H	G'nin H Modülüne Göre Bölüm Grubu
$Ker(\varphi)$	φ Dönüşümünün Çekirdeği
$Im(\varphi)$	φ Dönüşümünün Görüntü Kümesi
$\cong$	İzomorf
U	Evrensel Küme
E	Parametreler Kümesi
$P(U)$	U'nun Kuvvet Cümlesi

Simgeler	**Açıklama**
$S_E(U)$	U Üzerindeki E Parametreli Esnek Kümelerin Kümesi
$NS_G(U)$	U Üzerindeki Normal EB-Grup
f_Φ	Boş Esnek Küme
$f_{\tilde{A}}$	A Evrensel Esnek Küme
$f_{\tilde{E}}$	Evrensel Esnek Küme
$\tilde{\subseteq}$	Esnek Alt Küme
$f_A = f_B$	Esnek Eşit Kümeler
$f_A^{\tilde{c}}$	f_A Esnek Kümesinin Esnek Tümleyeni
$\tilde{\cup}$	Esnek Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kesişim
$f_A \wedge f_B$	f_A ve f_B Esnek Kümelerinin Esnek $\wedge -$Çarpımı
$f_A \vee f_B$	f_A ve f_B Esnek Kümelerinin Esnek $\vee -$Çarpımı
S_3	S_3 Simetrik Grubu
D_2	Dihedral Grup
$\tilde{\cup}_{i \in I} f_{A_i}$	f_{A_i}, EB-Gruplar Ailesinin Esnek Birleşimi
$\tilde{\leq}_U$	Esnek Birleşimsel Alt Grup
$\varphi(f_A)$	f_A nın φ Altında Esnek Görüntüsü
$\varphi^{-1}(f_B)$	f_B nin φ Altında Esnek Ön Görüntüsü
$f_A * f_B$	f_A ve f_B Esnek Kümlerinin Esnek Çarpımı
$\tilde{\Delta}_U$	Normal EB-Alt Grup

$f_A = f_{B^u}$	f_A ve f_B Eşlenik EB-Grup
$N(f_G)$	f_G'nin Esnek Normalleştirici Kümesi
$f_{A\alpha}$	A-α Esnek Kümesi
af_G	f_G'nin Esnek Sol Koseti
$f_G a$	f_G'nin Esnek Sağ Koseti
$^{G}/_{f_G}$	G'nin f_G Normal EB Alt Grubuna Göre Bölüm Grubu
S_{X^C}	X'in Tümleyeninin Esnek Karakteristik Fonksiyonu

Kısaltmalar	**Açıklama**
A.Ü.	Amasya Üniversitesi
EK-Grup	Esnek Kesişimsel Grup
EB-Grup	Esnek Birleşimsel Grup

1. GİRİŞ

Belirsizlik içeren bazı problemleri Aristo mantığına dayalı klasik matematikle modellemek çok zordur. Günlük hayatta kullandığımız cümleler içerisinde çok sıcak, yüksek hız, güzel bebek, uzun boy gibi ölçüm değerleri kişiden kişiye değişen belirsiz ifadelerdir. Hayatımızda, buna benzer belirsizlikler içeren birçok olay vardır. Gün geçtikçe, etrafımızda bulunan belirsizliğin objektif olarak incelenmesi için klasik yöntemlerin dışında belirsizliği de inceleyen metotlara ihtiyaç duyulmaktadır. Bu yüzden bilim adamları belirsizliği anlamak ve elverişli çözümler sağlamak için bir hayli teori geliştirmeye başlamışlardır. “Olasılık teorisi”, “aralık matematiği”, “bulanık kümeler teorisi” en iyi bilinen ve belirsizliği modellemek için sık kullanılan matematiksel teorilerden birkaçıdır.

Bu teoriler arasında en dikkat çekenlerden birisi Zadeh’in [1] bulanık kümeler teorisidir. Bu teori son zamanlarda hızla gelişmesine rağmen bazı yapısal zorlukları içinde barındırmaktadır. Bilindiği gibi bir bulanık küme onun üyelik fonksiyonu yoluyla tanımlanır. Molodstov’a [2] göre üyelik fonksiyonunun doğası fazlasıyla bireyseldir. Bundan ötürü, her bir durum için bir üyelik fonksiyonu inşa etme zorluğu söz konusudur. Bu sebeple, üyelik fonksiyonu inşasından bağımsız bir kümeler teorisine ihtiyaç duyulmuştur.

Bu amaçla, “esnek kümeler teorisi”, Molodtsov [2] tarafından 1999 yılında belirsizlikle başa çıkmak için bir matematiksel araç olarak ortaya atıldı. Molodtsov [2], oyun teorisi, işlem araştırmaları, sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, olasılık, ölçüm teorisi, Reimann integrasyonu, Perron integrasyonu vb. alanlarda esnek küme teorisini kullanarak başarılı çalışmalara imza atmıştır.

Maji ve arkadaşları [3,4], Pawlak’ın [5] yaklaşımlı küme teorisinden faydalanarak, karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını geliştirerek esnek kümelerde bazı işlemler tanımladı. Xiao [6] esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine başarılı bir çalışma yaptı. Yang [7], esnek kümeler ve yaklaşımlı kümelere dayalı klinik teşhisin karar analizi ve indüksiyon başlığıyla çalışmasını yayımladı. Chen [8,9] ile Kong [10] esnek kümelerde parametre indirgemesi üzerine çalışmalar yaptı. Xiao [11] ile Pei ve Miao [12], esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine pek çok çalışma sundu. Mushrif [13], esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine araştırmalar yaparak bir çalışma yaptı.

Esnek kümelerin cebirsel özellikleri günümüzde de bazı yazarlar tarafından çalışılmaktadır. Jun [14] esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını tanımlayarak, onlarla ilgili bazı temel özelliklere ulaştı. Jun ve Park [15] esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özelliklerini araştırdı. Park [16], esnek WS-cebirleri üzerine incelemeler yaptı. Feng [17], esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkalar ile ilgili bir çalışma yaptı. Bu, pek çok yeni çalışmanın önünü açan bir inceleme olmuştur. Sun [18], esnek modüllerin tanımını verdi. Ayrıca modüllerin özelliklerini ve Molodtsov'un esnek küme tanımını kullanarak bazı temel özelliklerin karakterizasyonunu yaptı. Ali [19] esnek kümeler üzerinde bazı yeni işlemler tanımlayarak teorik olarak esnek kümeler üzerinde yapılan çalışmaları genişletti.

Maji [20], bulanık esnek kümeleri tanımlayarak sonrasında pek çok araştırmacının bulanık esnek kümeler üzerine çalışmalar yapmasının önünü açmıştır. Roy ve Maji [21] bir karar verme probleminde bulanık esnek kümelerin bir uygulaması üzerinde bir takım önemli sonuçlar buldu. Yang [22] bulanık esnek kümelerde indirgemeyi tanımlayarak, bulanık esnek kümeler yoluyla bir karar verme problemini inceledi. Enginoğlu [23], esnek küme işlemlerinin daha işlevsel olan yeni tanımlarını vererek, geliştirilen yeni esnek yaklaşım metotları sundu. Ayrıca, bu metotların karar verme problemleri üzerine iki uygulamasını verdi.

Aktaş ve Çağman [24] esnek kümeleri, bulanık kümeler ve yaklaşımlı kümelerin ilgili kavramlarıyla karşılaştırdı. Ayrıca pek çok yeni çalışmanın önünü açan " Esnek Grup Teorisi"ni literatüre kazandırdı. Esnek grup yapısı üzerinde esnek alt grup, normal esnek alt grup, esnek grup homomorfizmi gibi cebirsel yapılar tanımladı.

Bundan sonra esnek cebirsel yapılar üzerine yapılan çalışmaların bazıları; Acar ve ark. (2010) [25] esnek halkalar, Sezgin ve Atagün (2011a) [26] esnek gruplar ve normalistic esnek gruplar, Sezgin ve ark. (2013) [27] esnek N-grupları, H. Aktaş (2014) [28] esnek bijektif grupları, H. Aktaş ve Şerif Özlü (2014) [29] devirli esnek grupları, Sezgin ve Atagün (2016) [30] esnek vektör uzaylarını, Sezgin ve ark. (2011) [31] ile Atagün ve Sezgin (2016) [32] esnek yakın halkaları şeklinde sayılabilir.

Diğer taraftan çalışmalar, farklı bir yönden de ilerlemeye devam etmiştir. Esnek kümeyi (esnek kümenin değer kümesindeki elemanları), klasik kümeler teorisinde kullanılan kesişim ve kapsama işlemi kullanılarak karakterize edilmiştir [33]. Yani klasik küme teorisi, cebir ve esnek küme üçü bir arada kullanılarak tanımlar ve işlemler daha işlevsel hale getirilmiştir. Bu düşünce yeni çalışmaları da beraberinde getirmiştir. Çağman ve ark. 2012'de tanımladığı " soft int-grup (esnek kesişimsel gruplar)" yapısı [34] 2007 yılında ortaya atılan esnek grup tanımından farklıdır ve teorik olarak daha incelemeye açık bir yapı haline gelmiştir. Klasik grup teorisindeki pek çok özellik analog olarak bu yapıya aktarılabilmektedir. Kaygısız ve Şimşek ve ark., esnek kesişimsel gruplardaki çalışmayı bir adım ileri götürerek, esnek kesişimsel normal altgruplar üzerine 2012'de detaylı iki çalışma yayınlamıştır [35,36]. Aynı mantıktan hareket edilerek kapsama ve kesişim işlemleri kullanılarak pek çok cebirsel yapının "esnek kesişimsel" hali yapılmış ve çalışılmıştır. Bunlardan en temel olanlar, esnek kesişimsel halkalar (2015) [37] ve esnek kesişimsel yakın-halkalar (2012) [38], esnek kesişimsel hemi-halkalar (2015) [39].

"Soft int-grup" un öncülük ettiği klasik küme teorisindeki kapsama ve kesişim işlemlerinin kullanıldığı hal yerine alt küme ve birleşim işlemlerinin kullanıldığı yeni cebirsel yapılar da incelenmeye başlamış, ortaya "soft uni-cebirsel yapılar" ve farklı sonuçlar çıkmıştır. Bunlardan bazıları ise esnek birleşimsel halkalar [40,41], esnek birleşimsel hemiring (2014) [42], esnek birleşimsel LA-yarıgrup (2014) [43,44], esnek birleşimsel yarıgruplardır (2015) [45,46].

Bu tez çalışmasında, normal esnek birleşimsel grubun çeşitli özellikleri, bilinen klasik grup teorideki teoremlerle bağdaştırılarak incelendi. Parametre kümesi grubun elamanlarından oluşan esnek kümeler üzerinde yeni bir işlem tanımlanarak, normal esnek birleşimsel grupla olan ilişkisi verildi. Esnek karakteristik fonksiyonunun tanımı verilerek özellikleri gösterildi. Daha önceden tanımlanan A-α esnek kümeleri üzerindeki esnek çarpım işleminde bir bağıntı verilerek bu işlemin grup özelliklerini sağladığı gösterildi. Daha sonra bu işlem üzerinden esnek koset ile bölüm grupları tanımlanıp örnekler verildi. Son olarak da esnek görüntü altında bazı homomorfik yapıların korunduğu gösterildi.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde Taşçı (2007) [48], Rotman (1999) [49], Dummit (1999) [50] ve Asar, Ahmet ve Aynur Arıkan (2012) [51] kaynaklarında yer alan grup teorisi ile ilgili diğer bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilecektir.

Grup teorisi kavramı modern cebirin en temel kavramlarından biridir. Geometrik şekillerin simetri özelliklerinin araştırılmasında ve cebirsel denklemlerin köklerinin belirlenmesinde ortaya çıkmıştır. Her geometrik şekle bir simetri grubu ve her cebirsel denklemin köklerine bir Galois grubu karşılık gelir. Grup kavramının ilk izleri Lagrange'ın cebirsel denklem üzerindeki çalışmalarına dayanır. Galois (1811-1832) ilk kez grup terimini permütasyon grubu anlamında kullanmıştır. Galois'in çalışmaları Liouville tarafından 1846 da yayınlandıktan sonra grup kavramı kullanılmaya başlamıştır [51]. Daha sonraları Cauchy, Cayley, Walter von Dyck bu teorinin gelişimine katkıda bulunarak yüzyıllar boyu sürecek olan çalışmalara öncülük etmişlerdir.

2.1. Tanım

G boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\star : G \times G \to G$$

fonksiyonuna G üzerinde bir ikili işlem ve $(G,\star)$ ikilisine cebirsel yapı denir.

2.2. Tanım

Aşağıdaki şartları sağlayan $(G,\star)$ cebirsel yapısına grup denir.

G_1) $\forall\, a,b,c \in G$ için $(a \star b) \star \mathrm{c} = \mathrm{a} \star (b \star \mathrm{c})$

G_2) Bir $e \in G$ ve $\forall\, a \in G$ için $a \star e = e \star a = a$ dır. (e elemanına G'nin birim elemanı denir).

G_3) e, G nin birim elemanı olmak üzere, G kümesindeki her bir a elemanı için

$$a \star a' = a' \star a = e$$

olacak şekilde bir tek $a' \in G$ vardır (a' elemanına a elemanının tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir).

Burada;

- (G_1) şartını sağlayan $(G,\star)$ cebirsel yapısına yarı grup denir.
- (G_1) ve (G_2) şartlarını sağlayan $(G,\star)$ cebirsel yapısına monoid denir.
- $\forall\, a, b \in G$ için $a \star b = b \star a$ şartını sağlayan $(G,\star)$ grubuna değişmeli grup denir.

Örnek

Bir n kenarlı düzgün çokgende, r merkez etrafında saat yönünde dönmeyle elde edilen keyfi bir permütasyon ve s yansımalarla elde edilen keyfi bir permütasyon olmak üzere $r^n = 1$, $s^2 = 1$ ve $rs = sr^{n-1}$ şartlarını sağlayan r ve s permütasyonları tarafından üretilen

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba Dihedral grup denir.

2.3. Tanım

$(G,\star)$ grup ve H, G nin boş olmayan alt kümesi olsun. Eğer $(H,\star)$ cebirsel yapısı grup ise, bu gruba $(G,\star)$ grubunun alt grubu denir ve $H \leq G$ şeklinde gösterilir.

2.4. Teorem

$(G,\star)$ bir grup ve H, G nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. Buna göre $H \leq G$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall a, b \in H$ için $a \star b \in H$

ii) $\forall a \in H$ için $a^{-1} \in H$

şartlarının sağlanmasıdır.

2.5. Not

Bundan sonra aksi belirtilmedikçe ve karışıklığa neden olmadığı durumlarda $(G,\star)$ şeklinde gösterilen cebirsel yapılar kısaca G şeklinde gösterilecektir ve ayrıca $a,b \in G$ için $a \star b$ gösterimi yerine ab gösterimi kullanılacaktır.

2.6. Tanım

G grup ve $H \leq G$ olsun. $\forall a \in G$ için $aH = Ha$ ise, H alt grubuna G'nin normal alt grubu denir ve $H \lhd G$ şeklinde gösterilir.

2.7. Tanım

G bir grup ve $H \leq G$ olsun.

$$N_G(H) = \{g \in G: gh = hg\}$$

kümesine H'nin G içindeki *normalleyeni* denir.

2.8. Teorem

G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Bu taktirde, $N_G(H) \leq G$ dir.

2.9. Tanım

G grup ve X, G'nin altkümesi olsun. Bu takdirde G'nin X'i içeren bütün alt gruplarının kesişimine *X tarafından üretilen alt grup* denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X'e $\langle X \rangle$ in bir *üreteç kümesi* denir.

2.10. Teorem

G grup ve $a \in G$ olsun. O zaman

$$\langle a \rangle = \{a^k : k \in \mathbb{Z}\}$$

dir.

2.11. Tanım

G grup olsun. Eğer $G = \langle a \rangle$ olacak biçimde bir $a \in G$ varsa G'ye a tarafından üretilen bir *devirli grup* denir.

2.12. Teorem

G grup ve $H, K \leq G$ olsun. $HK \leq G \Leftrightarrow HK = KH$ olmasıdır.

2.13. Teorem

G grup ve H ile K, G'nin alt grupları olmak üzere $H \lhd G$ ise, $HK \leq G$ dir.

2.14. Teorem

G grup ve $N \leq G$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir.

i) $\forall g \in G$ için ve $\forall n \in N$ için $gng^{-1} \in N$ dir.

ii) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} \subseteq N$ dir.

iii) $\forall g \in G$ için $gNg^{-1} = N$ dir.

iv) $N \lhd G$ dir.

2.15. Teorem

G grup ve $H \leq G$ olsun. Bu takdirde $H \lhd N_G(H)$ dır.

2.16. Tanım

G grup ve $H, K \leq G$ olsun. $HK = \{\text{hk}: \text{h} \in H, \text{k} \in K\}$ kümesine *H ile Knin çarpımı* (G'nin işlemi "+" ise $H + K = \{\text{h} + \text{k}: \text{h} \in H \text{ ve } \text{k} \in K\}$ kümesine *H ile K nin toplamı*) denir.

2.17. Tanım

G bir grup, $H \leq G$ ve $a \in G$ olmak üzere

$$aH = \{ah : h \in H\}$$

kümesine a elemanın H alt grubuna göre sol yan kümesi ve

$$Ha = \{ha : h \in H\}$$

kümesine a elemanın H alt grubuna göre sağ yan kümesi denir.

2.18. Not

G grup ve $H \leq G$ olsun. G nin H deki tüm farklı yan sınıflarının kümesini G/H ile gösterelim.

2.19. Teorem

G grup ve $H \leq G$ olsun. Her $a, b \in G$ için

$$(aH)(bH) = abH$$

ile tanımlı

$$. : G/H \times G/H \to G/H$$

dönüşümünün iyi tanımlı olması için gerek ve yeter koşul $H \lhd G$ olmasıdır. Bu durumda, G/H üzerinde tanımlı bu ikili işleme göre bir gruptur. G/H grubuna, G nin H alt grubuna göre *bölüm grubu* denir.

2.20. Tanım

$(G,\star)\ ve\ (H,\circ)$ iki grup olmak üzere eğer $\varphi: G \to H$ fonksiyonu $\forall x, y \in G$ için

$$\varphi(x \star y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

ise, φ ye grup homomorfizması ya da kısaca homomorfizma denir.

Eğer,

- φ, örten bir grup homomorfizması ise φ ye bir epimorfizma denir.
- φ, 1-1 bir grup homomorfizması ise φ ye bir monomorfizma denir.

- φ, 1-1 ve örten bir grup homomorfizması ise φ ye bir izomorfizma denir.

Bu durumda G ve H gruplarına "izomorftur" denir ve $G \cong H$ ile gösterilir.

2.21. Tanım

$\varphi: G \to H$ grup homomorfizması olsun.

$$Çek(\varphi) = \{g \in G | \varphi(g) = e_H\}$$

kümesine φ nin çekirdeği denir.

2.22. Tanım

$\varphi: G \to H$ bir grup homomorfizması olsun. Bu taktirde $Çek(\varphi) \lhd G$ dir.

2.23. Tanım

$\varphi: G \to H$ grup homomorfizması, $A \leq G$ ve $B \leq H$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i) $\varphi(A) \leq H$ dir.

ii) $\varphi^{-1}(B) \leq G$ dir.

İzomorfizma Teoremleri

Bu kısımda gruplara ait temel nitelikteki üç izomorfizma teoremi verilecektir. Aşağıdaki teoremden görüldüğü gibi normal alt gruplar ile grup homomorfizmaları arasında çok yakın bir ilişki vardır.

2.24. Teorem (Birinci İzomorfizma Teoremi)

$\varphi: G \to H$ grup epimorfizması olsun. Bu takdirde $G/Ker(\varphi) \cong H$ dır.

2.25. Teorem (İkinci İzomorfizma Teoremi)

G grup ve H ile K, G'nin alt grupları olmak üzere K, G'de normal olsun. Bu takdirde

$$HK/K \cong H/H \cap K$$

dır.

2.26. Teorem (Üçüncü İzomorfizma Teoremi)

G grup ve H ile K, G'nin normal alt grupları olmak üzere K, H'nin alt grubu olsun. Bu takdirde H/K $\lhd$ G/K ve

$$\frac{G/K}{H/K} \cong G/H$$

dır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili bazı temel kavramlar Molodtsov [2] ve (Çağman ve Enginoğlu, 2010) [52]'nun yapmış olduğu çalışmalardan derlenerek verilecektir.

3.1.1 Molodtsov'un Esnek Küme Yaklaşımı

Molodstov [2], yapmış olduğu çalışmalarında genellikle esnek kümelerde işlemler ve esnek kümeler arasındaki ilişkilerden ziyade, esnek analiz üzerinde durmuştur. Molodstov [2], "Esnek Küme Teorisi ve İlk Sonuçları" isimli çalışmasında limit gibi temel analiz konularını esnekleştirerek, sonraki çalışmalarına hazırlık yapmıştır. Yazar esnek yaklaşımı, kendi ifadeleriyle aşağıdaki şekilde ifade etmektedir:

"Ekonomi, çevre ve sağlık bilimi, mühendislik gibi pek çok alandaki karmaşık problemlerde bazı belirsizlik tiplerinin varlığı, bu problemleri çözmek için bilinen klasik metotları başarılı bir şekilde kullanmamızı engeller bir sebeptir. "Olasılık Teorisi", "Bulanık Küme Teorisi" ve "Aralık Matematiği" belirsizlikleri ortadan kaldırmak için matematiksel bir araç olarak göz önüne alabileceğimiz bilinen üç temel teoridir. Bu teoremlerin her birinin güçlü olduğu kadar zayıf yönleri de vardır. [2]"

Olasılık teorisi sadece uygun istatiksel olaylarla uğraşabilir. Matematiksel detaylara girmeksizin uygun bir matematiksel olayla kastetmek istediğimiz şey, uzun bir deneme serisinde

$$\mu_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

basit ortalamasının mevcut olmasıdır. Burada, denemelerde olaylar gerçekleşirse x_i, "1" e, olaylar gerçekleşmezse x_i, "0" a eşittir. Limitin varlığını test etmek için çok sayıda deneme yapmalıyız. Bunu mühendislikte gerçekleştirebiliriz fakat birçok ekonomik, çevrebilim ve sosyal problemlerde gerçekleştiremeyiz.

Aralık matematiği, bir problemin kesin çözümü için tahmini bir aralık inşa ederek, hesaplama hatalarını göz önünde bulunduran bir metot olarak ortaya çıkar. Bu birçok durumda faydalıdır ancak aralık matematiğindeki metotlar farklı belirsizliklere sahip problemler için yeterince uygun değildir. Bu metotlar düzgün değişen, güvensiz, yetersiz ve kısmen amaçla çelişen hatalı bir bilgiyi, vb. durumları yaklaşık olarak tanımlayamaz.

Belirsizlikle başa çıkmak için en yakın teori, Zadeh [1] tarafından geliştirilen bulanık küme teorisidir. Bulanık küme kavramının tanımını hatırlayalım. Her $A \subset X$ kümesi için onun μ_A karakteristik fonksiyonu

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1, x \in A \\ 0, x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır.

Bir küme ile onun karakteristik fonksiyonu arasındaki bu eşleme açık olarak 1-1 bir eşlemedir. Bir F bulanık kümesi, onun μ_F üyelik fonksiyonu ile tanımlanır. Bu fonksiyon her $x \in X$ noktasına, [0,1] kapalı aralığında bir $\mu_F(x)$ reel sayısını karşılık getirir. $\mu_F(x)$ sayısı, x'in F bulanık kümesine ait olma derecesi olarak yorumlanır.

Bu küme teorisi üzerine yapılan çalışmalar, şimdilerde hızlı bir şekilde ilerliyor. Fakat bir zorluk mevcuttur: Özel her bir durumda üyelik fonksiyonu nasıl kurulur?

Üyelik fonksiyonunu kurmak için sadece bir yola yüklenmemeliyiz. Üyelik fonksiyonunun doğası son derece bireyseldir. $\mu_F(x) = 0{,}8$ notasyonunu herkes kendi tarzında anlayabilir. Bu yüzden, üyelik fonksiyonları ile yapılan aritmetik işlemlere dayanan bulanık küme işlemleri, doğal gözükmez. Görülebilir ki bu işlemler, ağırlık ve uzunlukların toplamına benzerdir. Muhtemelen bu zorlukların sebebi, teorinin parametrizasyon araçlarının yetersizliğidir.

3.1.2. Tanım

U evrensel küme ve A parametrelerin bir kümesi olsun. F, A'dan U'nun tüm alt kümelerinin kümesine bir dönüşüm ise (F, A) sıralı ikilisi, U üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır.

Başka bir ifadeyle bir esnek küme U kümesinin alt kümelerinin parametrize edilmiş bir ailesidir [2].

Molodtsov [2] tarafından ortaya atılan bu tanımın bazı zorluklarından dolayı (Çağman ve Enginoğlu, 2010) [52] tanımı yeniden düzenleyerek üzerinde yapılacak birçok çalışmaya öncülük etmişlerdir. Biz tezimizde esnek kümelerin bu tanımını kullanacağız.

3.1.3. Tanım

U başlangıç evrensel kümesi, E parametreler kümesi; $P(U)$, U'nun kuvvet kümesi ve $A \subseteq E$ olsun.

Her $x \notin A$ için $f_A(x) = \emptyset$ olacak şekilde $f_A: E \to P(U)$ fonksiyonuna U üzerinde bir *esnek küme* denir. O halde, bir f_A esnek kümesi

$$f_A = \{(x, f_A(x)) : x \in E, f_A(x) \in P(U)\}$$

biçiminde sıralı ikililerin kümesidir.

Başka bir deyişle, U üzerindeki esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerinin parametrelenmiş ailesidir.

$\varepsilon \epsilon A$ olmak üzere $F(\varepsilon)$, (F, A) 'nın $\varepsilon -$ yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir.

E parametreler kümesinin bir A alt kümesi ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler f_A, g_A, h_A vb. şeklinde gösterilecektir. Ayrıca, E parametreler kümesinin A, B, C vb. farklı alt kümeleri ile birden fazla esnek küme tanımlanabilir. Bu durumda esnek kümeler f_A, f_B, f_C, vb. şeklinde gösterilecektir. Bundan böyle, U üzerindeki tüm esnek kümelerin kümesi $S_E(U)$ ile gösterilecektir [52].

Örnek

U satın almak için üzerinde düşünülen bebek arabalarının bir kümesi ve E parametrelerin kümesi olsun. Her bir parametre bir kelime veya bir kümedir.

$$E = \{hafif, ekonomik, katlanabilir, dayanıklı, garantili\}$$

Bu durumda bir esnek küme tanımlamak, “ hafif bebek arabaları, ekonomik bebek arabaları vb.” oluşturmak demektir.

(F, E) esnek kümesi Gül Vera Hanım’a alınması düşünülen “bebek arabalarının çekiciliği” olarak tanımlanır.

U evrensel kümesinde aşağıdaki şekilde verilen 6 tane bebek arabasının olduğunu düşünelim.

$$U = \{u_1, u_2, u_3, u_4, u_5, u_6\}$$

ve

$$E = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$$

olsun.

Burada,

- x_1 "hafif" parametresini,
- x_2 "ekonomik" parametresini,
- x_3 "katlanabilir" parametresini,
- x_4 "dayanıklı" parametresini,
- x_5 "garantili" parametresini

temsil etsin. Buna göre bebek arabası almaya gelen Selma Hanım için f_A esnek kümesini oluşturalım. Bunun için önce verilen parametrelere göre arabaları sınıflandıralım.

- $f_A(x_1) = \{u_2, u_4\}$
- $f_A(x_2) = \emptyset$
- $f_A(x_3) = U$
- $f_A(x_4) = \{u_1, u_3, u_5\}$
- $f_A(x_5) = \emptyset$

(F, E) esnek kümesi U'nun alt kümelerinin parametrelenmiş ailesi olan

$$\{f_A(x_i), i = 1,2,3,4,5\}$$

dir. Ayrıca bize bir nesnenin yaklaşık tanımlarının bir derlemesini verir. Örneğin; $f_A(x_1)$ ve $f_A(x_3)$ te "u_4" var. Yani u_4 bebek arabası hafif ve katlanabilir özelliğine sahiptir. Buradan u_4 arabasının özellikleri hakkında yaklaşık bir sonuç çıkarıyoruz.

O halde f_A esnek kümesini aşağıdaki şekilde yaklaşımların bir derlemesi olarak alabiliriz.

$f_A = \{hafif\ arabalar = \{u_2, u_4\}, katlanabilir$ özellikli $arabalar = U, dayanıklı\ arabalar = \{u_1, u_3, u_5\}\}$.

Burada esnek küme küme olmadığı için elemanlarını da özel olarak " yaklaşım " olarak adlandırırız. Bu esnek küme

$$f_A = \{(x_1, \{u_2, u_4\}), (x_3, U), (x_4, \{u_1, u_3, u_5\})\}$$

şeklinde yazılabilir. Burada görüntüsü boş küme olan elemanlar yazılmamıştır ve bundan sonra da yazmayacağız.

Bilgisayar ortamında esnek küme oluşturmak için esnek kümeyi aşağıdaki tablo ile temsil edebiliriz.

Şekil 3.1. Esnek Kümenin Temsili Tablosu

U	"hafif"	"ekonomik"	"katlanabilir"	"dayanıklı"	"garantili"
u_1	0	0	1	1	0
u_2	1	0	1	0	0
u_3	0	0	1	1	0
u_4	1	0	1	0	0
u_5	0	0	1	1	0
u_6	0	0	1	0	0

3.1.4. Tanım

$f_A \in S_E(U)$ olsun. Eğer $\forall$x $\in$ E için f_A(x) $= \emptyset$ ise f_A'ya *boş esnek küme* denir ve f_Φ ile gösterilir [52].

3.1.5. Tanım

$f_A \in S_E(U)$ olsun. Eğer $\forall$x $\in$ A için f_A(x) $=$ U ise f_A'ya *A-evrensel esnek küme* denir ve $f_{\tilde{A}}$ ile gösterilir [52].

3.1.6. Tanım

$f_A \in S_E(U)$ olsun. Eğer $\forall$x $\in$ E için f_A(x) $=$ U ise f_A'ya *evrensel esnek küme* denir ve $f_{\tilde{E}}$ ile gösterilir [52].

3.1.7. Tanım

$f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. Eğer $\forall$x $\in$ E için f_A(x) $\subseteq f_B$(x) ise f_A esnek kümesine f_B'nin *esnek alt kümesi* denir ve $f_A \,\tilde{\subseteq}\, f_B$ ile gösterilir [52].

3.1.8. Tanım

f_A ,$f_B \in S_E(U)$ olsun. Eğer $\forall$x $\in$ E için f_A(x) $= f_B$(x)ise f_A ve f_B esnek kümelerine *esnek eşit kümeler* denir ve $f_A = f_B$ ile gösterilir [52].

3.1.9. Tanım

$f_A \in S_E(U)$ olsun. f_A esnek kümesinin *esnek tümleyeni* $f_A^{\tilde{c}}$, her x $\in$ E için $f_A^{\tilde{c}}(x) = U \backslash f_A$(x) şeklinde tanımlanır [52].

3.1.10. Tanım

$f_A, f_B \in \mathrm{S_E(U)}$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin *esnek birleşimi* $f_A \tilde{\cup} f_B$, her $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ için

$$(f_A \tilde{\cup} f_B)(x) = f_A(\mathrm{x}) \cup f_B(\mathrm{x})$$

şeklinde tanımlanır [52].

3.1.11. Tanım

$f_A, f_B \in S_E(U)$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin *esnek kesişimi* $f_A \tilde{\cap} f_B$, her $\mathrm{x} \in \mathrm{E}$ için

$$(f_A \tilde{\cap} f_B)(x) = f_A(\mathrm{x}) \cap f_B(\mathrm{x})$$

şeklinde tanımlanır [52].

3.1.12. Önerme

$f_A \in S_E(U)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $\left(f_A^{\tilde{c}}\right)^{\tilde{c}} = f_A$
2. $f_{\Phi}^{\tilde{c}} = f_{\tilde{E}}$
3. $f_A \tilde{\cup} f_A = f_A$
4. $f_A \tilde{\cap} f_A = f_A$
5. $f_A \tilde{\cup} f_{\Phi} = f_A$
6. $f_A \tilde{\cap} f_{\Phi} = f_{\Phi}$
7. $f_A \tilde{\cup} f_{\tilde{E}} = f_{\tilde{E}}$
8. $f_A \tilde{\cap} f_{\tilde{E}} = f_A$
9. $f_A \tilde{\cup} f_A^{\tilde{c}} = f_{\tilde{E}}$
10. $f_A \tilde{\cap} f_A^{\tilde{c}} = f_{\Phi}$ [52].

3.1.13. Önerme

$f_A, f_B, f_C \in S_E(U)$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki özellikler sağlanır:

1. $f_A \tilde{\cup} f_B = f_B \tilde{\cup} f_A$

2. $f_A \tilde{\cap} f_B = f_B \tilde{\cap} f_A$
3. $(f_A \tilde{\cup} f_B)^{\tilde{c}} = f_A^{\tilde{c}} \tilde{\cap} f_B^{\tilde{c}}$
4. $(f_A \tilde{\cap} f_B)^{\tilde{c}} = f_A^{\tilde{c}} \tilde{\cup} f_B^{\tilde{c}}$
5. $(f_A \tilde{\cup} f_B) \tilde{\cup} f_C = f_A \tilde{\cup} (f_B \tilde{\cup} f_C)$
6. $(f_A \tilde{\cap} f_B) \tilde{\cap} f_C = f_A \tilde{\cap} (f_B \tilde{\cap} f_C)$
7. $f_A \tilde{\cup} (f_B \tilde{\cap} f_C) = (f_A \tilde{\cup} f_B) \tilde{\cap} (f_A \tilde{\cup} f_C)$
8. $f_A \tilde{\cap} (f_B \tilde{\cup} f_C) = (f_A \tilde{\cap} f_B) \tilde{\cup} (f_A \tilde{\cap} f_C)$ [52].

3.1.14. Tanım

$f_A, f_B \in \mathrm{S_E(U)}$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin $esnek\ \wedge -çarpımı$ $f_A \wedge f_B$, her $(x,y) \in \mathrm{E \times E}$ için

$$(f_A \wedge f_B)(x,y) = f_A(x) \cap f_B(y)$$

şeklinde tanımlanır.

Burada dikkat edilecek olursa $(f_A \wedge f_B)(x,y) \in \mathrm{S_{E\times E}(U)}$'dur [4].

3.1.15. Tanım

$f_A, f_B \in \mathrm{S_E(U)}$ olsun. f_A ve f_B esnek kümelerinin $esnek\ \vee -çarpımı$ $f_A \vee f_B$, her $(x,y) \in \mathrm{E \times E}$ için

$$(f_A \vee f_B)(x,y) = f_A(x) \cup f_B(y)$$

şeklinde tanımlanır.

Yine burada dikkat edilecek olursa $(f_A \vee f_B)(x,y) \in \mathrm{S_{E\times E}(U)}$'dur [4].

3.1.16. Tanım

G bir grup ve $f_G \in S_E(U)$ olsun.

1. Her $x, y \in G$ için $f_G(xy) \supseteq f_G(x) \cap f_G(y)$
2. Her $x \in G$ için $f_G(x^{-1}) = f_G(x)$

şartları sağlanıyorsa f_G esnek kümesine U üzerinde bir *esnek kesişimsel grup* denir ve kısaca EK-Grup olarak gösterilir [34].

3.2. Esnek Birleşimsel Gruplar

Bu bölümde Zeynep Kaya Türk'ün [47] tez çalışmasında yer alan esnek birleşimsel gruplar ile ilgili tanımlar ve bazı özellikler verilecektir.

3.2.1. Tanım

G bir grup ve $f_G \in S_G(U)$ olsun.

1. Her $x, y \in G$ için $f_G(xy) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$
2. Her $x \in G$ için $f_G(x^{-1}) = f_G(x)$

şartları sağlanıyorsa f_G esnek kümesine U üzerinde bir *esnek birleşimsel grup* denir. Bundan sonra tez çalışması boyunca, "esnek birleşimsel grup" yerine kısaca "EB-Grup" kullanacağız [47].

Örnek 1

$U = S_3$ evrensel küme ve

$$G = D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$$

dihedral grubu parametreler kümesi olsun. Bilindiği gibi D_2 'nin grup tablosu aşağıdaki gibidir :

Şekil 3.2. D_2'nin grup tablosu

.	e	x	y	yx
e	e	x	y	yx
x	x	e	yx	y
y	y	yx	e	x
yx	yx	y	x	e

Eğer f_G esnek kümesini,

$f_G(e) \ = \{(13)\}$

$f_G(x) \ = \{e, (12), (13)\}$

$f_G(y) \ = \{e, (13), (23)\}$

$f_G(yx) = \{e, (12), (13), (23)\}$

olacak şekilde inşa edersek f_G esnek kümesi S_3 üzerinde bir EB-Grup olur [47].

Örnek 2

$\mathrm{U} = \mathrm{Z}_{10}$ evrensel küme ve $\mathrm{G} = \mathrm{Z}_{10}$ parametreler kümesi olsun. f_G esnek kümesini her $\mathrm{x} \in \mathrm{Z}_{10}$ için

$$f_G(x) \ = \{\, y \in Z_{10} \colon y \in \langle x \rangle\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $f_G(0) = \{0\}$, $f_G(1) = f_G(3) = f_G(7) = f_G(9) = Z_{10}$, $f_G(2) = f_G(4) = f_G(6) = f_G(8) = \{0,2,4,6,8\}$, $f_G(5) = \{0,5\}$ olur.

$f_G(4+5) = f_G(9) = Z_{10} \not\subset f_G(4) \cup f_G(5) = \{0,2,4,5,6,8\}$ olduğundan f_G , Z_{10} üzerinde bir EB-Grup değildir [47].

3.2.2. Önerme

f_G, U üzerinde bir EB-Grup ise, her $x \in G$ için $f_G(e) \subseteq f_G(x)$'dir [47].

3.2.3. Teorem

G bir grup ve f_G, U üzerinde bir EB-Grup olsun. Eğer $x, y \in G$ için $f_G(xy^{-1}) = f_G(e)$ ise $f_G(x) = f_G(y)$.

İspat $f_G(xy^{-1}) = f_G(e)$ olsun. O halde $x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned} f_G(x) &= f_G\big((xy^{-1})y\big) \\ &\subseteq f_G(xy^{-1}) \cup f_G(y) \\ &= f_G(e) \cup f_G(y) \\ &= f_G(y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} f_G(y) &= f_G(y^{-1}) \\ &= f_G\big(x^{-1}(xy^{-1})\big) \\ &\subseteq f_G(x^{-1}) \cup f_G(xy^{-1}) \\ &= f_G(x^{-1}) \cup f_G(e) \\ &= f_G(x) \end{aligned}$$

dir. Bu nedenle $f_G(x) = f_G(y)$ dir.

3.2.4. Teorem

U üzerinde bir f_G esnek kümesinin EB-Grup olması için gerek ve yeter koşul her $x, y \in G$ için $f_G(xy^{-1}) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$ olmasıdır [47].

3.2.5. Teorem

f_G, U üzerinde bir EB-Grup ve $x \in G$ olsun. O halde her $y \in G$ için $f_G(xy) = f_G(y)$ olması için gerek ve yeter şart $f_G(x) = f_G(e)$ olmasıdır [47].

3.2.6. Teorem

f_G, U üzerinde bir EB-Grup ve $x \in G$ olsun. O halde her $y \in G$ için

$$f_G(x) = f_G(e) \Rightarrow f_G(xy) = f_G(yx)$$

dir [47].

3.2.7. Sonuç

f_G, U üzerinde bir EB-Grup ve $x \in G$ ise her $y \in G$ için $f_G(xy) = f_G(yx) = f_G(y)$ olması için gerek ve yeter şart $f_G(x) = f_G(e)$ olmasıdır [47].

3.2.8. Teorem

f_G ve f_H, U üzerinde EB-Gruplar olsun. O zaman $f_G \vee f_H$, U üzerinde EB-Gruptur. [47]

3.2.9. Teorem

f_G ve f_H, U üzerinde birer EB-Grup olsun. O zaman her $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in G \times H$ için,

$$(f_G \wedge f_H)\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)^{-1}\big) \subseteq (f_G \vee f_H)(x_1, y_1) \cup (f_G \vee f_H)(x_2, y_2)$$

dir. [47]

3.2.10. Teorem

f_G ve h_G, U üzerinde iki EB-Grup ise $f_G \,\widetilde{\cup}\, h_G$ de U üzerinde EB-Gruptur [47].

3.2.11. Teorem

Her $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ için $\mathrm{A_i} \leq \mathrm{G}$ ve $\{f_{\mathrm{A_i}} : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$'ler EB-Grupların bir ailesi olsun. Bu durumda $\widetilde{\bigcup}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} f_{\mathrm{A_i}}$ EB-Gruptur. .

İspat

f_G ve h_G EB-Grup olduğundan $f_G \,\widetilde{\cup}\, h_G$ 'nin de EB-Grup olduğunu biliyoruz. $\forall\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{G}$ alalım.

$$\widetilde{\bigcup_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}} f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{xy}^{-1}) = \bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{xy}^{-1}) : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$$

$$\subseteq \bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{x}) \cup f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{y}) : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$$

$$= \Big(\bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{x}) : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}\Big) \cup \Big(\bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}(\mathrm{y}) : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}\Big)$$

$$= \left(\bigcup_{i \in I} f_{A_i}(x) \right) \cup \left(\bigcup_{i \in I} f_{A_i}(y) \right)$$

olur. $\tilde{\bigcup}_{i \in I} f_{A_i}$ EB-Gruptur.

Aşağıdaki teorem U üzerinde EK-Grup ve EB-Grup arasındaki temel ilişkiyi vermektedir.

3.2.12. Teorem

f_G, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_G'nin U üzerinde bir EB-Grup olması için gerek ve yeter şart $f_G^{\tilde{c}}$ nin U üzerinde bir EK-Grup olmasıdır [47].

Teorem 3.2.12 bir esnek kümenin U üzerinde bir EB-Grup olması halinde, onun tümleyeninin U üzerinde bir EK-Grup olduğunu ve tersinin de doğru olduğunu gösterir [47].

3.2.13. Tanım

G bir grup, $H \leq G$ ve f_G, U üzerinde bir EB-Grup olsun. Eğer f_H (f_G' nin esnek alt kümesi) kendi başına U üzerinde bir EB-Grup ise o zaman f_H'ın U üzerinde f_G'nin bir *esnek birleşimsel-alt grubu* olduğu söylenir ve bu "$f_H \mathrel{\tilde{\leq}}_U f_G$" ile gösterilir [47].

Örnek

$U = Z$'yi evrensel küme olarak ve toplamsal grup $G = Z_4$'ü parametre kümesinin alt kümesi olarak düşünelim. Esnek küme f_G 'yi $f_G(0) = \{0,2\}$, $f_G(1) = f_G(3) = \{0,1,2,3\}$ ve $f_G(2) = \{0,2,3\}$ ile tanımlayalım. O zaman f_G'nin U üzerinde bir EB-Grup olduğu açıktır. $H = \{0,2\} \leq Z_4$ ve Z üzerinde f_H, $f_H(0) = \{0\}$ ve $f_H(2) = \{0,2\}$ ile tanımlansın. f_H, f_G'nin bir esnek alt kümesi olduğundan ve kendisi de U üzerinde bir EB-Grup olduğundan $f_H \mathrel{\tilde{\leq}}_U f_G$ olur [47].

3.2.14. Tanım

f_A ve f_B ortak evrensel küme U üzerinde esnek kümeler ve φ, A dan B ye bir fonksiyon olsun. O halde U üzerinde her b ∈ B için

$$\big(\varphi(f_A)\big)(\mathrm{b}) = \begin{cases} \cup\{f_A(a) \mid a \in A \; ve \; \varphi(a) = b\}, & \mathrm{b} \in \varphi(A) \\ \emptyset, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $\varphi(f_A)$ esnek kümesine f_A nın φ altında *esnek görüntüsü* denir. Ayrıca her $a \in A$ için U üzerinde

$$\left(\varphi^{-\mathbf{1}}(f_B)\right)(a) = f_B\big(\varphi(a)\big)$$

şeklinde tanımlanan $\varphi^{-\mathbf{1}}(f_B)$ esnek kümesine f_B nin φ altında *esnek ön görüntüsü* denir [47].

3.2.15. Teorem

f_G ve f_H, U üzerinde esnek kümeler ve $\varphi: G \to H$ bir grup izomorfizması olsun. Eğer f_G, U üzerinde bir EB-Grup ise $\varphi(f_G)$, U üzerinde bir EB-Gruptur [47].

3.2.16. Teorem

f_G ve f_H, U üzerinde esnek kümeler ve $\varphi: G \to H$ bir grup homomorfizması olsun. Eğer f_H, U üzerinde bir EB-Grup ise $\varphi^{-\mathbf{1}}(f_H)$, U üzerinde bir EB-Gruptur [47].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Esnek Çarpım İşlemi

Bu bölümde klasik grup teorisinde olduğu gibi, parametre kümesi grubun elamanlarından oluşan esnek kümeler üzerinde de bir esnek çarpım işlemi tanımlandı, örnek verildi ve özellikleri ile ilgili teoremler verilip ispatı yapıldı. Bir esnek kümenin eleman bazında belirli şartları sağladığında EB-Grup olduğu tanımlanmıştı. Burada ise bu yeni tanımlanan işlem ile bir esnek kümenin küme bazında hangi şartlar altında EB-Grup olabileceği ile ilgili teorem verilip ispatı yapıldı.

4.1.1. Tanım

G grup olmak üzere $A, B \subseteq G$ olsun. f_A ve f_B, U üzerinde esnek kümler olmak üzere f_A ve f_B esnek kümlerinin *esnek çarpımı*,

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap \{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}) \colon uv = x, \qquad u, v \in G\}$$

olarak tanımlanır.

f_A'nın tersi ise her $x \in G$ için,

$${f_A}^{-1}(x) = f_A(x^{-1})$$

olarak tanımlanır.

Örnek

$G = (Z_3, +)$ ve $U = D_2 = \{\langle x, y \rangle \colon x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$ olsun.

$f_G(0) = \{e, y, yx\}$, $f_G(1) = \{e, x\}$, $f_G(2) = \{y, yx\}$

ve

$h_G(0) = \{e, x, y\}$, $h_G(1) = \{e, yx\}$, $h_G(2) = \{yx\}$

olsun. Bu durumda f_G ve h_G, U üzerinde bir esnek kümedir.

- $(f_G \circ h_G)(0) = \cap \{f_G(\mathrm{u}) \cup h_G(\mathrm{v}) \colon u + v = 0,\ u, v \in G\}$

$$\left(\begin{array}{c|c} u = 0 \; ve \; v = 0 & \\ u = 1 \; ve \; v = 2 & için \; u + v = 0 \; sağlanır. \\ u = 2 \; ve \; v = 1 & \end{array} \right)$$

$$(f_G \circ h_G)(0) = \{f_G(0) \cup h_G(0)\} \cap \{f_G(1) \cup h_G(2)\} \cap \{f_G(2) \cup h_G(1)\}$$
$$= \{e, x, y, yx\} \cap \{e, x, yx\} \cap \{e, y, yx\}$$
$$= \{e, yx\}$$

- $(f_G \circ h_G)(1) = \bigcap\{f_G(\mathrm{u}) \cup h_G(\mathrm{v}) : u + v = 1,\ u, v \in G\}$

$$\left(\begin{array}{l|l} u = 0 \ ve \ v = 1 & \\ u = 1 \ ve \ v = 0 & için \ u + v = 1 \ sağlanır. \\ u = 2 \ ve \ v = 2 & \end{array}\right)$$

$$(f_G \circ h_G)(1) = \{f_G(0) \cup h_G(1)\} \cap \big\{f_G(1) \cup h_G(0) \cap \{f_G(2) \cup h_G(2)\}\big\}$$
$$= \{e, y, yx\} \cap \{e, x, y\} \cap \{y, yx\}$$
$$= \{y\}$$

- $(f_G \circ h_G)(2) = \bigcap\{f_G(\mathrm{u}) \cup h_G(\mathrm{v}) : u + v = 2,\ u, v \in G\}$

$$\left(\begin{array}{l|l} u = 0 \ ve \ v = 2 & \\ u = 2 \ ve \ v = 0 & için \ u + v = 2 \ sağlanır. \\ u = 1 \ ve \ v = 1 & \end{array}\right)$$

$$(f_G \circ h_G)(2) = \{f_G(0) \cup h_G(2)\} \cap \big\{f_G(2) \cup h_G(0) \cap \{f_G(1) \cup h_G(1)\}\big\}$$
$$= \{e, y, yx\} \cap \{e, x, y, yx\} \cap \{e, x, yx\}$$
$$= \{e, yx\}$$

elde edilir.

4.1.2. Teorem

$f_A, f_B, f_C \in S_G(U)$ olsun.

i) $(f_A \circ f_B) \circ f_C = f_A \circ (f_B \circ f_C)$.

ii) $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$, Ancak G değişmeli ise $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ dır.

iii) $f_A \circ (f_B \tilde{\cup} f_C) = (f_A \circ f_B) \tilde{\cup} (f_A \circ f_C)$ ve
$(f_A \tilde{\cup} f_B) \circ f_C = (f_A \circ f_C) \tilde{\cup} (f_B \circ f_C)$.

iv) $f_A \circ (f_B \tilde{\cap} f_C) = (f_A \circ f_B) \tilde{\cap} (f_A \circ f_C)$ ve
$(f_A \tilde{\cap} f_B) \circ f_C = (f_A \circ f_C) \tilde{\cap} (f_B \circ f_C)$.

v) $f_A \tilde{\subseteq} f_B$ ise $f_A \circ f_C \tilde{\subseteq} f_B \circ f_C$ dir.

İspat

i) $\forall x \in G$ için,

$[(f_A \circ f_B) \circ f_C](x) = \bigcap\{(f_A \circ f_B)(a) \cup f_C(b): ab = x, \quad a, b \in G\}$

$= \bigcap\{[\cap \{f_A(m) \cup f_B(n): mn = a, m, n \in G\}] \cup f_C(b): ab = x, \quad a, b \in G\}$

$= \bigcap\{f_A(m) \cup f_B(n) \cup f_C(b): mnb = x, \quad m, n, b \in G\}$

$= \bigcap\{f_A(m) \cup [\cap \{f_B(n) \cup f_C(b): nb = k, n, b \in G\}]: mk = x, \quad m, n, b \in G\}$

$= \bigcap\{f_A(m) \cup (f_B \circ f_C)(k): mk = x, \quad m, k \in G\}$

$= [f_A \circ (f_B \circ f_C)](x)$

olup $(f_A \circ f_B) \circ f_C = f_A \circ (f_B \circ f_C)$ elde edilir.

ii) $f_A \circ f_B \neq f_B \circ f_A$ olduğu Tanım 4.1.1 den açıktır. Kabul edelim ki G değişmeli olsun.

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap\{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}): uv = x, \quad u, v \in G\}$$

$$= \bigcap\{f_B(\mathrm{v}) \cup f_A(\mathrm{u}): vu = x, \quad u, v \in G\}$$

$$= (f_B \circ f_A)(x)$$

olduğundan $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ dır.

iii) $xy = a$ olacak şekilde $x, y \in G$ alalım.

$\big(f_A \circ (f_B \,\tilde{\cup}\, f_C)\big)(a) = \bigcap\{f_A(\mathrm{x}) \cup (f_B \,\tilde{\cup}\, f_C)(\mathrm{y}): xy = a, \quad x, y \in G\}$

$= \bigcap\{f_A(\mathrm{x}) \cup (f_B(y) \cup f_C(y)): xy = a, \quad x, y \in G\}$

$= \bigcap\{f_A(\mathrm{x}) \cup f_B(y): xy = a, x, y \in G\} \cup \bigcap\{f_A(\mathrm{x}) \cup f_C(y): xy = a, x, y \in G\}$

$= (f_A \circ f_B)(a) \cup (f_A \circ f_C)(a)$

$= \big((f_A \circ f_B) \,\tilde{\cup}\, (f_A \circ f_C)\big)(a).$

Benzer şekilde $(f_A \,\tilde{\cup}\, f_B) \circ f_C = (f_A \circ f_C) \,\tilde{\cup}\, (f_B \circ f_C)$ eşitliği de gösterilebilir.

iv) $xy = a$ olacak şekilde $x, y \in G$ alalım.

$\big(f_A \circ (f_B \,\tilde{\cap}\, f_C)\big)(a) = \bigcap\{f_A(\mathrm{x}) \cup (f_B \,\tilde{\cap}\, f_C)(\mathrm{y}): xy = a, \quad x, y \in G\}$

$$= \bigcap \{f_A(\mathrm{x}) \cup (f_B(y) \cap f_C(y)) : xy = a, \quad x, y \in G\}$$
$$= \bigcap \{f_A(\mathrm{x}) \cup f_B(y) : xy = a, x, y \in G\} \cap \bigcap \{f_A(\mathrm{x}) \cup f_C(y) : xy = a, x, y \in G\}$$
$$= (f_A \circ f_B)(a) \cap (f_A \circ f_C)(a)$$
$$= \left((f_A \circ f_B) \tilde{\cap} (f_A \circ f_C)\right)(a).$$

Benzer şekilde $(f_A \tilde{\cap} f_B) \circ f_C = (f_A \circ f_C) \tilde{\cap} (f_B \circ f_C)$ eşitliği de gösterilebilir.

v) $f_A \tilde{\subseteq} f_B$ olsun. Bu durumda $\forall x \in G$ için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ olduğunu biliyoruz.

$$(f_A \circ f_C)(a) = \bigcap \{f_A(\mathrm{x}) \cup f_C(y) : xy = a, \quad x, y \in G\}$$
$$\subseteq \bigcap \{f_B(\mathrm{x}) \cup f_C(y) : xy = a, \quad x, y \in G\}$$
$$= (f_B \circ f_C)(a)$$

olur. $f_A \circ f_C \tilde{\subseteq} f_B \circ f_C$ elde edilir.

4.1.3. Teorem

f_G esnek küme olsun. f_G bir EB-Gruptur $\Leftrightarrow$ f_G esnek kümesi aşağıdaki durumları sağlar:

(1) $(f_G \circ f_G) \tilde{\supseteq} f_G$

(2) ${f_G}^{-1} = f_G$ (veya $f_G \tilde{\supseteq} {f_G}^{-1}$ veya ${f_G}^{-1} \tilde{\supseteq} f_G$)

İspat

$f_G \in S_G(U)$ olsun. Her $x \in G$ için,

$$(f_G \circ f_G)(x) = \bigcap \{f_G(\mathrm{u}) \cup f_G(\mathrm{v}) : uv = x, \quad u, v \in G\}$$
$$\tilde{\supseteq} \bigcap \{f_G(\mathrm{uv}) : uv = x, \quad u, v \in G\}$$
$$= f_G(\mathrm{x})$$

elde edilir çünkü $f_G \in S_G(U)$ dur. Dolayısıyla $(f_G \circ f_G) \tilde{\supseteq} f_G$ dir.

İkinci kısım EB-Grup tanımından dolayı açıktır. Her $x \in G$ için,

$${f_G}^{-1}(x) = f_G(x^{-1}) = f_G(\mathrm{x})$$

bulunur.

Tersine, $(f_G \circ f_G) \; \widetilde{\supseteq} \, f_G$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in G$ için,

$$(f_G \circ f_G)(x) \supseteq f_G(x)$$

dir. Bu durumda

$$f_G(x) \subseteq (f_G \circ f_G)(x)$$
$$= \bigcap \{f_G(\mathrm{u}) \cup f_G(\mathrm{v}) : uv = x, \qquad u, v \in G\}$$

elde edilir. Çünkü $f_G(\mathrm{uv}) \subseteq f_G(\mathrm{u}) \cup f_G(\mathrm{v})$ olduğundan ve ikinci kısımdaki kabulümüzden dolayı uv=x olacak şekilde $\exists\, u, v \in G$ vardır.

4.1.4. Teorem

$A, B \subseteq G$ ve f_A, f_B EB-Gruplar olsun.

$$(f_A \circ f_B)^{-1} = {f_B}^{-1} \circ {f_A}^{-1}$$

dir.

İspat

$x \in G$ olsun. G bir grup olduğu için

$$(f_A \circ f_B)^{-1}(x) = (f_A \circ f_B)(x^{-1})$$
$$= \bigcap \{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}) : uv = x^{-1}, \qquad u, v \in G\}$$
$$= \bigcap \{f_B(\mathrm{v}) \cup f_A(\mathrm{u}) : uv = x^{-1}, \qquad u, v \in G\}$$
$$= \bigcap \{f_B(v^{-1})^{-1} \cup f_A(u^{-1})^{-1} : v^{-1}u^{-1} = x\}$$
$$= \bigcap \{{f_B}^{-1}(v^{-1}) \cup {f_A}^{-1}(u^{-1}) : v^{-1}u^{-1} = x\}$$
$$= \left({f_B}^{-1} \circ {f_A}^{-1}\right)(x).$$

Klasik grup teorisindeki Teorem 2.12 den hareketle aşağıdaki şekilde bir teorem verebiliriz.

4.1.5. Teorem

$A, B \subseteq G$ ve f_A, f_B EB-Gruplar olsun.

$f_A \circ f_B$, EB-Gruptur ancak ve ancak $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ dır.

İspat

f_A ve f_B EB-Gruplar olsun. Öncelikle $f_A \circ f_B$'nin EB-Grup olduğunu kabul edelim. Bu durumda $f_B \circ f_A = {f_B}^{-1} \circ {f_A}^{-1} = (f_A \circ f_B)^{-1} = f_A \circ f_B$ dir.

Tersine, $f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$ olduğunu kabul edelim.

$$\begin{aligned}(f_A \circ f_B) \circ (f_A \circ f_B) &= f_A \circ (f_B \circ f_A) \circ f_B \\ &= f_A \circ (f_A \circ f_B) \circ f_B \\ &= (f_A \circ f_A) \circ (f_B \circ f_B) \\ &\supseteq f_A \circ f_B\end{aligned}$$

ve

$$(f_A \circ f_B)^{-1} = (f_B \circ f_A)^{-1} = {f_A}^{-1} \circ {f_B}^{-1} = f_A \circ f_B$$

olup $f_A \circ f_B$'nin EB-Grup olduğu görülür.

4.2. Normal Esnek Birleşimsel Gruplar İle İlgili Bazı Teoremler

Bu bölümde değişmeli ve Normal EB-Grup tanımları ile bazı teoremlere yer verilecek. Daha sonra eşlenik esnek birleşimsel gruplar ile normalleştirici kavramlarının Normal EB-Gruplar ile ilişkisi incelenecek. Daha önce tanımladığımız esnek çarpım işleminin, normal esnek birleşimsel grupla olan bağlantısı verilecek. Klasik grup teorisinde yer alan normallikteki denkliklerle ilgili temel teoremin ve Kenan Kaygısız ve arkadaşlarının [35,36] Normal EK-Gruba uyarladığı teoremin Normal EB-Grup'taki karşılığı verilecek. Son olarak da Normal EB-Gruplarda fonksiyonların esnek görüntülerinin homomorfik yapılarda korunduğu gösterilecek.

4.2.1. Tanım

f_G, U üzerinde bir EB-Grup olsun. Her $x, y \in G$ için $f_G(xy) = f_G(yx)$ oluyorsa f_G, U üzerinde bir *abelyan(değişmeli) esnek birleşimsel-grup* olarak adlandırılır. G abelyan ise f_G'nin U üzerinde abelyan olduğu açıktır [47].

4.2.2. Tanım

f_G , U üzerinde EB-Grup ve $f_N \tilde{\leqq}_U f_G$ olsun. Eğer f_N , U üzerinde değişmeli EB-Grup ise f_N, U üzerinde f_G'nin *Normal EB-Alt grubu* olarak adlandırılır ve "$f_N \tilde{\Delta}_U f_G$" ile gösterilir.
Açıktır ki eğer G değişmeli grupsa f_N, U üzerinde f_G'nin bir Normal EB-Alt grubudur [47].

Örnek

$U = Z_8$ evrensel küme ve $G = S_3$ parametreler kümesi olsun. f_G esnek grubunu,
$f_G(e) = \{2,3\}$,
$f_G(12) = f_G(23) = f_G(13) = \{1,2,3,5,7\}$
$f_G(123) = f_G(132) = \{1,2,3,5\}$
olarak tanımlayalım. f_G 'nin U üzerinde EB-Grup olduğu kolaylıkla gösterilebilir. $N = A_3 = \{e, (123), (132)\} \leq S_3$ alterne grup ve f_N, S_3 üzerinde esnek küme öyle ki $f_N(e) = \{3\}$ ve $f_N(123) = f_N(132) = \{2,3,5\}$. $f_N \tilde{\leqq}_U f_G$ olduğu kolayca gösterilebilir, üstelik $f_N \tilde{\Delta}_U f_G$ 'dir [47].

4.2.3. Teorem

f_G, U üzerinde bir esnek küme ve f_N, U üzerinde f_G'nin boştan farklı esnek altkümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

i) Her $x, y \in G$ için $f_N(xy) = f_N(yx)$,
ii) Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) = f_N(y)$,
iii) Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) \supseteq f_N(y)$,
iv) Her $x, y \in G$ için $f_N(xyx^{-1}) \subseteq f_N(y)$.

İspat

$x, y \in G$ alalım.
$(i \Rightarrow ii)$ $f_N(xyx^{-1}) = f_N(x^{-1}xy) = f_N(y)$.
$(ii \Rightarrow iii)$ Açık.
$(iii \Rightarrow iv)$ $f_N(xyx^{-1}) \subseteq f_N(x^{-1}xyx^{-1}(x^{-1})^{-1}) = f_N(y)$.
$(iv \Rightarrow i)$ $f_N(xy) = f_N(xyxx^{-1}) \subseteq f_N(yx) = f_N(yxyy^{-1}) \subseteq f_N(xy)$. O halde $f_N(xy) = f_N(yx)$.

Klasik grup teorisindeki Teorem 2.12 ve Teorem 2.13 den hareketle Normal EB-Gruplar için aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.4. Lemma

G grup ve $A, B \subseteq G$ olsun. f_B, G'de EB-Grup olmak üzere eğer f_A, U üzerinde Normal EB-Grup ise

$$f_A \circ f_B = f_B \circ f_A$$

sağlanır.

İspat

Her $x \in G$ için,

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap \{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}) : uv = x, \qquad u, v \in G\}$$

f_A Normal EB-Grup ve $uv = x$ ise $u = xv^{-1}$ olduğu için

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap \{f_A(xv^{-1}) \cup f_B(\mathrm{v}) : (xv^{-1})v = x, \qquad v \in G\}$$

$$= \bigcap \{f_B(\mathrm{v}) \cup f_A(v^{-1}x) : v(xv^{-1}) = x, \qquad v \in G\}$$

$$= (f_B \circ f_A)(x)$$

Klasik grup teorisinden hareketle Teorem 2.13 ü Normal EB-Gruplara uyarlayarak aşağıdaki şekilde verebiliriz.

4.2.5. Teorem

f_A , U üzerinde Normal EB-Grup ve f_B , U üzerinde EB-Grup ise $f_A \circ f_B$ ’de U üzerinde EB-Gruptur.

İspat

İlk olarak

$$\begin{aligned}(f_A \circ f_B) \circ (f_A \circ f_B) &= f_A \circ (f_B \circ f_A) \circ f_B \\ &= f_A \circ (f_A \circ f_B) \circ f_B \text{ (Lemma 4.2.4)} \\ &= (f_A \circ f_A) \circ (f_B \circ f_B) \\ &\supseteq (f_A \circ f_B) \text{ (Teorem 4.1.3)}\end{aligned}$$

İkinci olarak, her $x \in G$ için,

$$\begin{aligned}(f_A \circ f_B)(x^{-1}) &= \bigcap \{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}) : uv = x^{-1}, \quad u, v \in G\} \\ &= \bigcap \{f_A((u^{-1})^{-1}) \cup f_B((v^{-1})^{-1}) : (u^{-1}v^{-1}) = x, \quad u, v \in G\} \\ &= \bigcap \{f_B(v^{-1}) \cup f_A(u^{-1}) : v^{-1}u^{-1} = x, \quad u, v \in G\} \\ &= (f_B \circ f_A)(x) \\ &= (f_A \circ f_B)(x) \text{ (Lemma 4.2.4)}\end{aligned}$$

4.2.6. Sonuç

Eğer f_A ve f_B’nin ikisi de Normal EB-Grup ise $(f_A \circ f_B)$’de Normal EB-Gruptur.

İspat

Teorem 4.2.5'den dolayı $(f_A \circ f_B)$ EB-Gruptur. Biz $(f_A \circ f_B)$'nin Normal EB-Grup olduğunu gösterelim. Her $x \in G$ için,

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap\{f_A(\mathrm{u}) \cup f_B(\mathrm{v}) : uv = x, \qquad u, v \in G\}$$

$$= \bigcap\{f_A(w^{-1}uw) \cup f_B(w^{-1}vw) : (w^{-1}uw)(w^{-1}vw)$$
$$= w^{-1}xw, \qquad u, v \in G\}$$
$$= (f_A \circ f_B)(w^{-1}xw)(\forall\, w, x \in G)$$

Böylece $(f_A \circ f_B)$' nin U üzerinde Normal EB-Grup olduğu görülür.

4.2.7. Teorem

f_G, G'de Normal EB-Grup ve H bir grup olsun. Eğer φ, G'den H'ye bir epimorfizma ise $\varphi(f_G)$, H'da Normal EB-Grup olur.

İspat

$\varphi(f_G)$'nin H'da EB-Grup olduğunu biliyoruz (Teorem 3.2.15). Herhangi $x, y \in H$ için $\varphi(u) = x$ ve $\varphi(v) = y$ olacak şekilde $u, v \in G$ vardır. Böylece her $x, y \in H$ için,

$$\varphi(f_G)(xy) = \bigcup\{f_G(\mathrm{w}) : w \in G, \varphi(w) = xy\}$$
$$= \bigcup\{f_G(\mathrm{uv}) : uv \in G, \varphi(uv) = xy\}$$
$$= \bigcup\{f_G(\mathrm{uv}) : vu \in G, \varphi(u)\varphi(v) = xy\}$$
$$= \bigcup\{f_G(\mathrm{uv}) : vu \in G, \varphi(u) = x \ ve\ \varphi(v) = y\}$$
$$= \bigcup\{f_G(\mathrm{vu}) : vu \in G, \varphi(v)\varphi(u) = yx\}$$
$$= \bigcup\{f_G(\mathrm{vu}) : vu \in G, \varphi(vu) = yx\}$$
$$= \varphi(f_G)(yx).$$

Böylece $\varphi(f_G)$ Normal EB-Gruptur.

4.2.8. Teorem

H bir grup ve f_H , H 'da Normal EB-Grup olsun. Eğer φ , G 'den H 'ye bir homomorfizma ise $\varphi^{-1}(f_H)$, G'de Normal EB-Gruptur.

İspat

$\varphi^{-1}(f_H)$'nin G'de EB-Grup olduğunu biliyoruz(Teorem 3.2.16). Her $x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(f_H)(xy) &= f_H\big(\varphi(xy)\big)\\ &= f_H\big(\varphi(x)\varphi(y)\big)\\ &= f_H\big(\varphi(y)\varphi(x)\big)\\ &= f_H\big(\varphi(yx)\big)\\ &= \varphi^{-1}(f_H)(yx)\end{aligned}$$

Böylece $\varphi^{-1}(f_H)$ Normal EB-Gruptur.

4.2.9. Sonuç

Her $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ için $\mathrm{A_i} \leq \mathrm{G}$ olsun. $\{f_{\mathrm{A_i}} : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$, G'nin Normal EB-Gruplarının bir ailesi olsun. Bu durumda $\tilde{\bigcup}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} f_{\mathrm{A_i}}$ de Normal EB-Gruptur.

İspat

Her $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$ için $\mathrm{A_i} \leq \mathrm{G}$ ve $\{f_{\mathrm{A_i}} : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}$ 'ler EB-Grupların bir ailesi olduğundan $\tilde{\bigcup}_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}} f_{\mathrm{A_i}}$ 'nin de Teorem 3.2.11 den dolayı EB-Grup olduğunu biliyoruz.

Her $x, y \in G$ alalım.

$$\begin{aligned}\tilde{\bigcup_{\mathrm{i} \in \mathrm{I}}} f_{\mathrm{A_i}}\,(\mathrm{xyx^{-1}}) &= \bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}\,(\mathrm{xyx^{-1}}) : \ \mathrm{i} \in \mathrm{I}\,\}\\ &= \bigcup\{f_{\mathrm{A_i}}\,(\mathrm{y}) : \ \mathrm{i} \in \mathrm{I}\,\}\,\big(\{f_{\mathrm{A_i}} : \mathrm{i} \in \mathrm{I}\}\, Normal\ EB-Grup\ olduğu\ için\big)\end{aligned}$$

$$= \widetilde{\bigcup_{i \in I}} f_{A_i}\ (y)$$

olduğundan $\widetilde{\bigcup}_{i \in I} f_{A_i}$ birleşim kümesi Normal EB-Gruptur.

4.2.10. Tanım

f_A ve f_B EB-Grup. Her $x \in G$ için, $f_A(x) = f_B(uxu^{-1})$ olacak şekilde $u \in G$ mevcutsa f_A ve f_B *eşlenik EB-Grup* olarak adlandırılır ve "$f_A = f_{B^u}$" şeklinde gösterilir. Her $x \in G$ için $f_{B^u}(x) = f_B(uxu^{-1})$'dir [47].

4.2.11. Teorem

f_A, G üzerinde Normal EB-Gruptur ancak ve ancak her $u \in G$ için $f_{A^u} = f_A$'dır.

İspat

f_A, Normal EB-Grup olsun. Her $x, u \in G$ için,

$$\begin{aligned} f_{A^u}(x) &= f_A(uxu^{-1}) \\ &= f_A(xuu^{-1}) \\ &= f_A(x) \end{aligned}$$

Tersine $f_{A^u} = f_A$ olsun. Her $x, u \in G$ için,

$$\begin{aligned} f_A(xu) &= f_A(xuxx^{-1}) \\ &= f_A(x(ux)x^{-1}) \\ &= f_A(ux) \end{aligned}$$

olur. Böylece f_A, U üzerinde Normal EB-Gruptur.

4.2.12. Tanım

f_G , U üzerinde EB-Grup olsun. $N(f_G) = \{g \in G : f_G^g = f_G\}$ olarak tanımlanan kümeye f_G'nin *Esnek Normalleştirici Kümesi* denir [47].

4.2.13. Sonuç

f_G EB-Grup ise, her $y \in G$ için f_G'nin Esnek Normalleştirici Kümesi,

$$N(f_G) = \{x \in G : f_G(xy) = f_G(yx)\}$$

olarak tanımlanabilir.

Bütün f_G EB-Gruplarda, G'nin birim elemanı $N(f_G)$'dedir ve G değişmeli ise $N(f_G) = G$'dir [47].

4.2.14. Teorem

f_G, U üzerinde EB-Grup olsun.

i) $N(f_G) \leq G$,

ii) f_G, Normal EB-Gruptur $\Leftrightarrow N(f_G) = G$ [47].

4.2.15. Teorem

f_G, U üzerinde EB-Grup olsun. $H \leq G$ ise $f_G|H$ kısıtlanışı da EB-Gruptur.

İspat

f_G, U üzerinde EB-Grup olsun.

Her $x, y \in H$ için $H \leq G$ olduğundan $f_G(\mathrm{x}y^{-1}) \subseteq f_G(\mathrm{x}) \cup f_G(\mathrm{y})$ ve $f_H(\mathrm{x}) = f_G(\mathrm{x})$ 'dir. Aynı zamanda H bir grup olduğundan $\mathrm{x}y^{-1} \in H$ 'dır. Bu durumda her $x, y \in H$ için,

$$\begin{aligned} f_H(\mathrm{x}y^{-1}) &= f_G(\mathrm{x}y^{-1}) \\ &\subseteq f_G(\mathrm{x}) \cup f_G(\mathrm{y}) \\ &= f_H(\mathrm{x}) \cup f_H(\mathrm{y}) \end{aligned}$$

f_H, U üzerinde EB-Gruptur.

Yani $f_G \in S_G(U)\ ve\ H \leq G \Rightarrow f_G|H \in S_H(U)$ 'dur.

4.3. Esnek Birleşimsel Gruplarda Esnek Karakteristik Fonksiyon

Esnek karakteristik fonksiyon daha önceden yarı gruplar [53] ve halkalar [54] için tanımlanmıştı. Bu bölümde ise grup yapısı üzerinde esnek karakteristik fonksiyonun tanımı yapılacak ve bazı özellikleri gösterilecektir.

4.3.1. Tanım

X, G'nin bir alt kümesi olsun. S_{X^C} ile gösterilen X'in tümleyeninin esnek karakteristik fonksiyonu

$$S_{X^C}(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \in X \; ise, \\ U, & x \in G \setminus X \; ise \end{cases}$$

ile tanımlanır.

4.3.2. Teorem

X ve Y, G grubunun boştan farklı iki alt kümesi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

Eğer $Y \subseteq X$ ise $S_{X^C} \tilde{\subseteq} S_{Y^C}$ dir.

$S_{X^C} \tilde{\cap} S_{Y^C} = S_{X^C \cap Y^C}$ ve $S_{X^C} \tilde{\cup} S_{Y^C} = S_{X^C \cup Y^C}$ dir.

İspat

Tanım 4.3.1 den açıktır.

$g \in G$ alalım.

$g \in X^C \cap Y^C$ olsun. Bu durumda $g \in X^C$ ve $g \in Y^C$ dir.

$\left(S_{X^C} \tilde{\cap} S_{Y^C}\right)(g) = S_{X^C}(g) \cap S_{Y^C}(g) = U \cap U = U = S_{X^C \cap Y^C}(g)$ ve

$g \notin X^C \cap Y^C$ olsun. Bu durumda $g \notin X^C$ veya $g \notin Y^C$ dir.

$\left(S_{X^C} \tilde{\cap} S_{Y^C}\right)(g) = S_{X^C}(g) \cap S_{Y^C}(g) = \emptyset = S_{X^C \cap Y^C}(g)$ olup

$S_{X^C} \tilde{\cap} S_{Y^C} = S_{X^C \cap Y^C}$ sağlanır. Şimdi ise

$g \in X^C \cup Y^C$ olsun. Bu durumda $g \in X^C$ veya $g \in Y^C$ dir.

$\left(S_{X^C} \tilde{\cup} S_{Y^C}\right)(g) = S_{X^C}(g) \cup S_{Y^C}(g) = U = S_{X^C \cup Y^C}(g)$ ve

$g \notin X^C \cup Y^C$ olsun. Bu durumda $g \notin X^C$ ve $g \notin Y^C$ dir.

$\left(S_{X^c} \tilde{\cup} S_{Y^c}\right)(g) = S_{X^c}(g) \cup S_{Y^c}(g) = \emptyset = S_{X^c \cup Y^c}(g)$ olup
$S_{X^c} \tilde{\cup} S_{Y^c} = S_{X^c \cup Y^c}$ sağlanır.

Her $x \in G$ için $f_G(x) = \emptyset$ olduğunda f_G nin U üzerinde bir EB-Grup olduğunu görmek kolaydır. Bu tür EB-Grubu $\tilde{\theta}$ ile gösterelim. $\tilde{\theta} = S_{G^c}$ olduğu açıktır. Yani her $x \in G$ için $\tilde{\theta}(x) = \emptyset$ dir.

4.3.3. Lemma

f_G, U üzerinde EB-Grup olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) $\tilde{\theta} \circ \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} \tilde{\theta}$.

ii) $f_G \circ \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} \tilde{\theta}$ ve $\tilde{\theta} \circ f_G \tilde{\supseteq} \tilde{\theta}$.

iii) $f_G \tilde{\cap} \tilde{\theta} = \tilde{\theta}$ ve $f_G \tilde{\cup} \tilde{\theta} = f_G$.

4.3.4. Teorem

G grubunun boştan farklı bir H alt kümesini alalım. H nin, G nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter şart $\alpha, \beta \subseteq U$ ve $\alpha \supseteq \beta$ olmak üzere

$$f_G(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in G \backslash H, \\ \beta, & x \in H \end{cases}$$

ile tanımlanan f_G nin EB-Grup olmasıdır.

İspat

H, G nin bir alt grubu ve $x, y \in G$ olsun. Eğer $x, y \in H$ ise $xy^{-1} \in H$ dir. Bu durumda $f_G(xy^{-1}) = f_G(x) = f_G(y^{-1}) = f_G(y) = \beta$ olup $f_G(xy^{-1}) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$ sağlanır. Eğer $x, y \notin H$ ise $xy^{-1} \in H$ veya $xy^{-1} \notin H$ dir. İki durumda da $f_G(xy^{-1}) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y) = \alpha$ dır. Böylece f_G, EB-Gruptur.

Tersine f_G nin G üzerinde EB-Grup olduğunu kabul edelim. $x, y \in H$ alalım. Bu durumda $f_G(xy^{-1}) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y) = \beta$ olur ki bu da $f_G(xy^{-1}) = \beta$ anlamına gelir. Yani $xy^{-1} \in H$ dir. Dolayısıyla da H, G nin bir alt grubudur.

4.3.5. Teorem

X, G grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda X in, G nin bir alt grubu olması için gerek ve yeter şart S_{X^C} nin, G üzerinde EB-Grup olmasıdır.

İspat

$$S_{X^c}(x) = \begin{cases} \emptyset, & x \in X \; ise, \\ U, & x \in G \setminus X \; ise \end{cases}$$

ve U ⊇ ∅ olduğu için ve Teorem 4.3.4 den dolayı ispatı görülür.

4.4. A-α Esnek Kümeleri, Kosetler ve Bölüm Grupları

Bu bölümde Kenan Kaygısız'ın (2012) [35] tanımladığı A-α Esnek Kümesi verilecek. Bu kümeler üzerinde daha önceden tanımladığımız "∘" işlemi altında grup özelliklerinin sağlandığı gösterilecek. Daha sonra bu işlem üzerinden esnek koset ile bölüm grupları tanımlanıp örnekler verilecek.

4.4.1. Tanım

$f_A \in S(U)$ ve $\alpha \in P(U)$ olsun. Her $x \in A$ için $f_{A\alpha}(\mathrm{x}) = \alpha$ biçiminde tanımlanan $f_{A\alpha}$ esnek kümesi *A-α esnek kümesi* olarak tanımlanır. A tek nokta kümesi ise, bu tek nokta kümesine {w} diyelim, bu durumda $f_{w\alpha}$ *esnek tek nokta kümesi* olarak adlandırılır. Eğer $\alpha = U$ ise $f_{AU} = f_{\tilde{A}}$, A'nın karakteristik fonksiyonudur [35].

4.4.2. Teorem

G bir grup ve $f_{x\alpha}$, $f_{y\beta} \in S(U)$ olsun. Her $x, y \in G$ ve $\emptyset \subset$α, $\beta \subseteq U$ olmak üzere

$$f_{x\alpha} \circ f_{y\beta} = f_{(xy)(\alpha \cup \beta)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat

$f_{x\alpha}$, $f_{y\beta} \in S(U)$ olsun. Tanım 4.1.1 den dolayı herhangi bir $w \in G$ için

$$\left(f_{x\alpha} \circ f_{y\beta}\right)(w) = \bigcap \{f_{x\alpha}(\mathrm{u}) \cup f_{y\beta}(\mathrm{v}) \colon uv = w, \qquad u, v \in G\}$$

u=x ve v=y olduğunda $f_{x\alpha}(\mathrm{u}) \cup f_{y\beta}(\mathrm{v}) = \alpha \cup \beta$'dır, diğer durumlarda $f_{x\alpha}(\mathrm{u}) \cup f_{y\beta}(\mathrm{v}) = U$ olur.

$$\left(f_{x\alpha} \circ f_{y\beta}\right)(w) = \bigcap \{U, \alpha \cup \beta\} = \alpha \cup \beta = f_{(xy)(\alpha\cup\beta)}(w)$$

olup

$$f_{x\alpha} \circ f_{y\beta} = f_{(xy)(\alpha\cup\beta)}$$

olduğu görülür.

4.4.3. Sonuç

$A \subseteq G, f_A \in S(U)$ ve $f_{x\alpha}$, $f_{y\beta}$, $f_{z\gamma}$ f_A da tek nokta kümeleri olsun.

i) $\left(f_{x\alpha} \circ f_{y\beta}\right) \circ f_{z\gamma} = f_{x\alpha} \circ \left(f_{y\beta} \circ f_{z\gamma}\right)$,

ii) $f_{x\alpha} \circ f_{y\beta} = f_{y\beta} \circ f_{x\alpha}$, G değişmeli ise

iii) $f_{x\alpha} \circ f_{e(f_A(e))} = f_{e(f_A(e))} \circ f_{x\alpha} = f_{x\alpha}$, $f_A \in S_G(U)$ ise

İspat

$f_A \in S(U)$ olsun.

i) $f_{x\alpha}$, $f_{y\beta}$, $f_{z\gamma} \in f_A$ olsun.

$$\begin{aligned}\left(f_{x\alpha} \circ f_{y\beta}\right) \circ f_{z\gamma} &= f_{(xy)(\alpha\cup\beta)} \circ f_{z\gamma} \\ &= f_{((xy)z)((\alpha\cup\beta)\cup\gamma)} \\ &= f_{(x(yz))(\alpha\cup(\beta\cup\gamma))} \\ &= f_{x\alpha} \circ f_{(yz)(\beta\cup\gamma)} \\ &= f_{x\alpha} \circ \left(f_{y\beta} \circ f_{z\gamma}\right)\end{aligned}$$

ii) $f_{x\alpha} \circ f_{y\beta} = f_{(xy)(\alpha\cup\beta)} = f_{(yx)(\beta\cup\alpha)} = f_{y\beta} \circ f_{x\alpha}$

iii) $f_{x\alpha} \in f_A$ olsun.

$$f_{x\alpha} \circ f_{e(f_A(e))} = f_{(xe)(\alpha \cup f_A(e))} = f_{x\alpha} = f_{(ex)(f_A(e) \cup \alpha)} = f_{e(f_A(e))} \circ f_{x\alpha}$$

4.4.4. Teorem

$A \subseteq G$ ve $f_A \in S_G(U)$ olsun. " $\circ$ " işleminin birim elemanı $f_{e(f_A(e))}$' dır [35].

4.4.5. Teorem

$A, B \subseteq G$ ve f_A ve f_B esnek kümeler olsun. $\exists\, x \in G$ için,

$$(f_A \circ f_B)(x) = \bigcap_{v \in G} \{f_A(\mathrm{v}) \cup f_B(v^{-1}x)\} = \bigcap_{v \in G} \{f_A(xv^{-1}) \cup f_B(v)\}$$

[35].

4.4.6. Sonuç

$A \subseteq G$ ve $\alpha = f_A(A)$ olacak şekilde f_A ve $f_{u\alpha}$ esnek kümeler olsun. $\exists\, x, u \in G$ için, $(f_{u\alpha} \circ f_A)(x) = f_A(u^{-1}x)$ ve $(f_A \circ f_{u\alpha})(x) = f_A(xu^{-1})$

İspat

$\exists\, x, u \in G$ için,

$$\begin{aligned}(f_{u\alpha} \circ f_A)(x) &= \bigcap_{u \in G} \{f_{u\alpha}(\mathrm{u}) \cup f_A(u^{-1}x)\} \\ &= \alpha \cup f_A(u^{-1}x) \\ &= f_A(u^{-1}x)\end{aligned}$$

4.4.7. Sonuç

$f_G \in S_G(U)$ olsun. $f_{\tilde{G}}$ ve $f_{e_{f_G}(f_G(e))}$ Normal Esnek Birleşimsel Guptur.

4.4.8. Sonuç

$(NS_G(U),\circ)$ değişmeli idempotent bir yarıgruptur. Çünkü

1. $NS_G(U)$, $\circ$ işlemi altında kapalıdır. (Sonuç 4.2.6)
2. $(NS_G(U),\circ)$, değişmelidir.
3. $(NS_G(U),\circ)$, birleşmelidir.
4. $(NS_G(U),\circ)$, idempotenttir. $(f_G \circ f_G = f_G)$

Şu ana kadar verilen teorem ve sonuçları kullanarak kosetin gösterimini tanımlayacağız.

$f_G \in S_G(U)$ ve $a \in G$ olsun. f_G'nin $\left(f_{a(f_G(e))} \circ f_G\right)$ ve $\left(f_G \circ f_{a(f_G(e))}\right)$ esnek alt kümeleri sırasıyla 'sol koset' ve 'sağ koset' olarak adlandırılır. Önerme 3.2.2 den dolayı her $x \in G$ için $f_G(e) \subseteq f_G(x)$ olduğu için

$\left(f_{a(f_G(e))} \circ f_G\right)(y) = f_G(a^{-1}y)$ ve $\left(f_G \circ f_{a(f_G(e))}\right)(y) = f_G(ya^{-1})$ dir.

Bu çıkarımlar sonucunda takip eden tanımı verebiliriz.

4.4.9. Tanım

$f_G \in S_G(U)$ ve $a \in G$ olsun. f_G'nin *esnek sol koseti*, her $x \in G$ için $(af_G)(x) = f_G(a^{-1}x)$ yaklaşım fonksiyonu ile tanımlanır ve 'af_G' ile gösterilir. Benzer şekilde f_G'nin *esnek sağ koseti*, her $x \in G$ için $(f_Ga)(x) = f_G(xa^{-1})$ ile tanımlanır ve 'f_Ga' ile gösterilir.

$H \leq G$ ve H'nin karakteristik fonksiyonu f_H olsun. Yani

$$f_H(x) = \begin{cases} U, & x \in H \\ \emptyset, & x \in G|H \end{cases}$$

af_H, G üzerinde bir fonksiyondur, öyle ki

$$af_H(x) = \begin{cases} U, & x \in aH \\ \emptyset, & x \in G|(aH) \end{cases}$$

4.4.10. Teorem

$f_G \in NS_G(U)$ olsun. $\exists\ a \in G$ ve $\forall g \in G$ için
$af_G(ga) = af_G(ag) = f_G(g)$ dir.

İspat

$g \in G$ alalım. $\exists a \in G$ için

$$
\begin{aligned}
af_G(ga) &= f_G\big(a^{-1}(ga)\big) \\
&= f_G\big(a^{-1}(ag)\big), f_G \in NS_G(U)\ olduğu\ için \\
&= f_G\big((a^{-1}a)g\big), Sonuç\ 4.4.8\ den \\
&= f_G(g)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f_G(g) &= f_G(eg) \\
&= f_G\big((a^{-1}a)g\big) \\
&= f_G\big(a^{-1}(ag)\big) \\
&= af_G(ag)
\end{aligned}
$$

olup $af_G(ga) = af_G(ag) = f_G(g)$ dir.

4.4.11. Teorem

$f_G \in S_G(U)$ olsun. $\forall a, b \in G$ için $af_G = bf_G \Leftrightarrow aef_G = bef_G$ dir.

İspat

$af_G = bf_G$ olsun. $\forall x \in G$ için

$$
\begin{aligned}
aef_G(x) &= f_G((ae)^{-1}x) \\
&= f_G(a^{-1}x) \\
&= af_G(x) \\
&= bf_G(x) \\
&= f_G(b^{-1}x) \\
&= f_G((be)^{-1}x) \\
&= bef_G(x).
\end{aligned}
$$

Tersine $aef_G = bef_G$ olsun. $\forall x \in G$ alalım

$$\begin{aligned} af_G(x) &= f_G(a^{-1}x) \\ &= f_G((ae)^{-1}x) \\ &= aef_G(x) \\ &= bef_G(x) \\ &= f_G((be)^{-1}x) \\ &= f_G(b^{-1}x) \\ &= bf_G(x) \end{aligned}$$

4.4.12. Teorem

$f_G \in NS_G(U)$ olsun.
Eğer $af_G = bf_G$ ise $\exists\, a, b \in G$ için $f_G(a) = f_G(b)$ dir.

4.4.13. Teorem

$f_G \in NS_G(U)$ olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $G/f_G = \{\, xf_G : x \in G \,\}$ kümesini tanımlayalım. Her $x, y \in G$ için,

1. $(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$
2. $(G/f_G, \circ)$ bir gruptur. Ayrıca G abelyan ise G/f_G de abelyandır.

İspat

Her $x, y \in G$ için,

1. $$\begin{aligned} (xf_G) \circ (yf_G) &= \left(f_{x(f_G(e))} \circ\ f_G\right) \circ \left(f_{y(f_G(e))} \circ\ f_G\right) \\ &= f_{x(f_G(e))} \circ \left(f_G \circ f_{y(f_G(e))}\right) \circ f_G \\ &= f_{x(f_G(e))} \circ \left(f_{y(f_G(e))} \circ f_G\right) \circ f_G \\ &= \left(f_{x(f_G(e))} \circ\ f_{y(f_G(e))}\right) \circ (f_G \circ\ f_G) \\ &= \left(f_{x(f_G(e))} \circ\ f_{y(f_G(e))}\right) \circ f_G, \text{ (Sonuç 4.4.8)} \end{aligned}$$

$= f_{xy(f_G(e))} \circ f_G$, (Teorem 4.4.2)

$= xyf_G$

2. $(G/f_G,\circ)$, 1. özellikten dolayı " $\circ$ " işlemi altında kapalıdır ve Sonuç 4.4.3 ten dolayı birleşmelidir. Her $x \in G$ için,

$f_G \circ xf_G = ef_G \circ xf_G = (ex)f_G = xf_G = (xe)f_G = xf_G \circ ef_G = xf_G \circ f_G$

olduğu için G/f_G 'nin birim elemanı $f_G = ef_G$'dir. Ayrıca her $x \in G$ için,

$(x^{-1}f_G) \circ (xf_G) = (x^{-1}x)f_G = ef_G = (xx^{-1})f_G = (xf_G) \circ (x^{-1}f_G)$

olduğu için $(x^{-1}f_G)$, (xf_G)'nin tersidir. Sonuç olarak $(G/f_G,\circ)$ bir gruptur.

Eğer G abelyan ise her $x, y \in G$ için,

$xf_G \circ yf_G = (xy)f_G = (yx)f_G = yf_G \circ xf_G$

olur. Dolayısıyla G/f_G de abelyandır.

4.4.14. Tanım

f_G, U üzerinde Normal EB-Grup olsun. Teorem 4.4.13 ile tanımlanan G/f_G grubuna, G' nin f_G Normal EB altgrubuna göre *bölüm grubu* denir.

Örnek

$U = S_3$ ve $G = D_2$ olsun. $D_2 = \{e, x, y, xy\}$ elemanları için

$$f_G(e) = \{(13)\}$$
$$f_G(x) = \{e, (12), (13)\}$$
$$f_G(y) = \{e, (12), (23)\}$$
$$f_G(yx) = \{e, (12), (13), (23)\}$$

Bu şartlar altında f_G, U üzerinde Esnek Birleşimsel Gruptur. Çünkü $\forall x, y \in G$ için

i) $f_G(xy) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$

ii) $f_G(x^{-1}) = f_G(x)$

özelliklerini sağlar.

$\forall x, y \in G$ alalım.

$f_G(xy) = f_G((xy)^{-1})$

$= f_G(y^{-1}x^{-1})$

$= f_G(ey^{-1}x^{-1}e)$
$= f_G(y^2y^{-1}x^{-1}x^2)$
$= f_G(yx)$

olduğu için f_G değişmeli Esnek Birleşimsel Grup olup f_G, Normal Esnek Birleşimsel Altgruptur.

$G/f_G = \{ xf_G : x \in G \}$ bölüm grubunu oluşturabiliriz.

$(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$ olduğunu gösterelim.

$xf_G(e) = f_G(x^{-1}e) = f_G(x^{-1}) = f_G(x)$
$xf_G(x) = f_G(x^{-1}x) = f_G(e)$
$xf_G(y) = f_G(x^{-1}y) = f_G(xy)$
$xf_G(xy) = f_G(x^{-1}xy) = f_G(y),$

$yf_G(e) = f_G(y^{-1}e) = f_G(y^{-1}) = f_G(y)$
$yf_G(x) = f_G(y^{-1}x) = f_G(yx)$
$yf_G(y) = f_G(y^{-1}y) = f_G(e)$
$yf_G(xy) = f_G(y^{-1}xy) = f_G(x),$

$xyf_G(e) = f_G(y^{-1}x^{-1}e) = f_G(xy)$
$xyf_G(x) = f_G(y^{-1}x^{-1}x) = f_G(y)$
$xyf_G(y) = f_G(y^{-1}x^{-1}y) = f_G(x)$
$xyf_G(xy) = f_G(y^{-1}x^{-1}xy) = f_G(e).$

- $e \in G$ için,

$$(xf_G) \circ (yf_G)(e) = \bigcap \{xf_G(\mathrm{u}) \cup yf_G(\mathrm{v}) : uv = e, \qquad u, v \in G\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u = e \; ve \; v = e & \\ u = x \; ve \; v = x & \\ u = y \; ve \; v = y & için \; uv = e \; sağlanır. \\ u = xy \; ve \; v = xy & \end{array} \right)$$

$= [xf_G(e) \cup yf_G(e)] \cap [xf_G(x) \cup yf_G(x)] \cap [xf_G(y) \cup yf_G(y)]$
$\cap [xf_G(xy) \cup yf_G(xy)]$
$= [f_G(x) \cup f_G(y)] \cap [f_G(e) \cup f_G(yx)] \cap [f_G(xy) \cup f_G(e)] \cap [f_G(y) \cup f_G(x)]$
$= f_G(xy) \cap f_G(xy) \cap f_G(xy) \cap f_G(xy)$
$= f_G(xy)$

$= (xyf_G)(e)$

olup $(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$ elde edilir.

- $\forall\, x \in G$ alalım.

$$(xf_G) \circ (yf_G)(x) = \bigcap \{xf_G(\mathrm{u}) \cup yf_G(\mathrm{v}) : uv = x, \quad u, v \in G\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u = x \; ve \; v = e & \\ u = e \; ve \; v = x & \text{için } uv = x \text{ sağlanır.} \\ u = xy \; ve \; v = y & \\ u = y \; ve \; v = xy & \end{array} \right)$$

$= [xf_G(x) \cup yf_G(e)] \cap [xf_G(e) \cup yf_G(x)] \cap [xf_G(xy) \cup yf_G(y)]$

$\cap\, [xf_G(y) \cup yf_G(xy)]$

$= \; [f_G(e) \cup f_G(y)] \cap [f_G(x) \cup f_G(xy)] \cap [f_G(y) \cup f_G(e)] \cap [f_G(xy) \cup f_G(x)]$

$= \; f_G(y) \cap f_G(xy) \cap f_G(y) \cap f_G(xy)$

$= f_G(y) \cap f_G(xy)$

$= f_G(y)$

$= (xyf_G)\,(x)$

olduğundan $(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$ elde edilir.

- $\forall\, y \in G$ alalım.

$$(xf_G) \circ (yf_G)(y) = \bigcap \{xf_G(\mathrm{u}) \cup yf_G(\mathrm{v}) : uv = y, \quad u, v \in G\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u = y \; ve \; v = e & \\ u = e \; ve \; v = y & \text{için } uv = y \text{ sağlanır.} \\ u = xy \; ve \; v = x & \\ u = x \; ve \; v = xy & \end{array} \right)$$

$= [xf_G(y) \cup yf_G(e)] \cap [xf_G(e) \cup yf_G(y)] \cap [xf_G(xy) \cup yf_G(x)]$

$\cap\, [xf_G(x) \cup yf_G(xy)]$

$= \; [f_G(xy) \cup f_G(y)] \cap [f_G(x) \cup f_G(e)] \cap [f_G(y) \cup f_G(xy)] \cap [f_G(e) \cup f_G(x)]$

$= \; f_G(xy) \cap f_G(x) \cap f_G(xy) \cap f_G(x)$

$= f_G(x) \cap f_G(xy)$

$= f_G(x)$

$= (xyf_G)\,(y)$

olduğundan $(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$ elde edilir.

- $\forall\, x, y \in G$ alalım.

$$(xf_G) \circ (yf_G)(xy) = \bigcap \{xf_G(\mathrm{u}) \cup yf_G(\mathrm{v}) : uv = xy, \quad u, v \in G\}$$

$$\left(\begin{array}{c|c} u = x\ ve\ v = y & \\ u = y\ ve\ v = x & \\ u = xy\ ve\ v = e & için\ uv = xy\ sağlanır. \\ u = e\ ve\ v = xy & \end{array}\right)$$

$= [xf_G(x) \cup yf_G(y)] \cap [xf_G(y) \cup yf_G(x)] \cap [xf_G(xy) \cup yf_G(e)]$

$\cap [xf_G(e) \cup yf_G(xy)]$

$= [f_G(e) \cup f_G(e)] \cap [f_G(xy) \cup f_G(xy)] \cap [f_G(y) \cup f_G(y)] \cap [f_G(x) \cup f_G(x)]$

$= f_G(e) \cap f_G(xy) \cap f_G(y) \cap f_G(x)$

$= f_G(e)$

$= xyf_G(xy)$

olduğundan $(xf_G) \circ (yf_G) = (xyf_G)$ elde edilir.

$G/f_G = \{ef_G, xf_G, yf_G, xyf_G\}$ bölüm grubu elde edilir.

4.4.15. Not

Örnekten de görüldüğü üzere klasik grup teoriden farklı olarak EB-Gruplar üzerinde kurulan bölüm gruplarının eleman sayısı grubun eleman sayısı kadardır. Klasik grup teorisinde ise bölüm grubunun eleman sayısı, grupların mertebelerinin oranı kadar olduğu için değişkenlik göstermekteydi. EB-Gruplarda ise böyle bir durum oluşmamıştır.

4.4.16. Teorem

f_G, U üzerinde Normal EB-Grup olsun. Bu durumda $G/f_G \cong G/ef_G$' dir.

İspat

$f_G \in NS_G(U)$ olduğu için ef_G, G'nin normal altgrubudur. Dolayısıyla G/ef_G bir bölüm grubudur. Ayrıca Teorem 4.4.13 ten dolayı G/f_G bir gruptur.

Şimdi $\varphi(xf_G) = xef_G$ olacak şekilde

$$\varphi: G/f_G \to G/ef_G$$

dönüşümünü tanımlayalım.

φ, bir homomorfizmadır çünkü her $xf_G, yf_G \in G/f_G$ için,

$$\begin{aligned}\varphi\big((xf_G)\circ(yf_G)\big) &= \varphi(xyf_G)\\ &= xyef_G\\ &= (xef_G)\circ(yef_G)\\ &= \varphi(xf_G)\circ\varphi(yf_G)\end{aligned}$$

Bununla birlikte φ, birebir ve örtendir ve böylece

$$G/f_G \cong G/ef_G$$

4.4.17. Teorem

f_G, U üzerinde Normal EB-Grup olsun. G/f_G üzerinde bir ${f_G}^{(*)}$ esnek kümesini tanımlayalım. $\forall x \in G$ için, ${f_G}^{(*)}(xf_G)$=$f_G(x)$ olsun. Bu durumda ${f_G}^{(*)}$, G/f_G' nin bir Normal EB-altgrubudur.

İspat

Öncelikle ${f_G}^{(*)}$'ın iyi tanımlı olduğunu gösterelim. Herhangi $xf_G, yf_G \in G/f_G$ alalım.

$$\begin{aligned}xf_G = yf_G &\Rightarrow f_G(x) = f_G(y)\\ &\Rightarrow {f_G}^{(*)}(xf_G) = {f_G}^{(*)}(yf_G)\end{aligned}$$

İkinci olarak $\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned}{f_G}^{(*)}\big((xf_G)\circ(yf_G)\big) = {f_G}^{(*)}(xyf_G) &= f_G(xy) \subseteq f_G(x)\cup f_G(y)\\ &= {f_G}^{(*)}(xf_G)\cup {f_G}^{(*)}(yf_G)\end{aligned}$$

ve $\forall x \in G$ için,

$$ {f_G}^{(*)}((xf_G)^{-1}) = {f_G}^{(*)}(x^{-1}f_G) = f_G(x^{-1}) = f_G(x) = {f_G}^{(*)}(xf_G)$$

Olur. Böylece ${f_G}^{(*)}$ U üzerinde EB-Gruptur. Şimdi normalliğini gösterelim.

$\forall x, y \in G$ için,

$$\begin{aligned}{f_G}^{(*)}\big((xf_G)\circ(yf_G)\big) &= {f_G}^{(*)}(xyf_G)\\ &= f_G(xy)\\ &= f_G(yx)\\ &= {f_G}^{(*)}(yxf_G)\end{aligned}$$

$$= {f_G}^{(*)}\big((yf_G) \circ (xf_G)\big)$$

olup ${f_G}^{(*)}$, U üzerinde Normal EB-Gruptur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Klasik grup teorisindeki çarpım işlemi parametre kümesi grubun elamanlarından oluşan esnek kümeler üzerinde de tanımlandı ve bu tanımlanan esnek çarpım işlemi klasik grup teorisindeki teoremlere uyarlandı. Eleman bazında gösterilen EB-Grup olma şartı esnek çarpım işlemi altında yeniden belirlendi. Normallikteki denkliklerle ilgili temel teoremin Normal EB-Grup'taki karşılığı verildi. Esnek çarpım işleminin, normal esnek birleşimsel grupla olan bağlantısı verildi. Normal EB-Gruplarda fonksiyonların esnek görüntülerinin homomorfik yapılarda korunduğu görüldü. Esnek karakteristik fonksiyon tanımlanarak özellikleri gösterildi. A- α esnek kümeleri yardımıyla esnek kosetin tanımı yapıldı, bölüm grupları oluşturuldu ve izomorfizma teoremi verildi.

Benzer şekilde 'Çözülebilir ve Nilpotent gruplar', 'p-grupları ve Sylow Teoremleri' gibi klasik grup teorisindeki kavram ve teoriler esnek kümeler üzerinde tanımlanıp özellikleri gösterilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Zadeh, L. A., ***Fuzzy Set***, Inform. and Control, 8 (1), 338-353, (1965).

[2] Molodtsov, D., ***Soft Set Theory-First Results***, Computers and Mathematics with Applications, 37(1), 19-31 (1999).

[3] Maji, P.K., Roy, A. R., Biswas, R., ***An Application of Soft Sets in a Decision Making Problem***, Computers and Mathematics with Aplications, 44(1), 1077-1083, (2002).

[4] Maji, P. K., Bismas. R., Roy, A. R, ***Soft Set Theory***, Computers and Mathematics with Applications, 45(1), 555-562, (2003).

[5] Pawlak, Z., ***Rough Sets***, Internatiol Journal of Information and Computer Sciences, 11 (1), 341-356, (1982).

[6] Xiao, Z., Li, Y., Zhong, B., Yang, X., ***Research on Synthetically Evaluating Method for Business Competitive Capacity Based on Soft Set***, Statistical Research, 52-54, (2003).

[7] Yang, H., Qu, C., Li, N-C., ***The İnduction and Decision Analysis of Clinical Diagnosis Based on Rough Sets and Soft Sets***, (Fangzhi Gaoxiao Jichukexe Xuebao Ed.), 17 (3), 208-212, September, (2004).

[8] Chen, D-G., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., ***Some Notes on The Parameterization Reduction of Soft Sets,*** International Conference on Machine Learning and Cybernetics, 3, 1442-1445, (2003).

[9] Chen, D., Tsang, E. C. C., Yeung, D. S., Wang, X., ***The Parameterization Reduction of Soft Sets and Its Applications,*** Computers and Mathematics with Applications, 49 (1), 757-763, (2005).

[10] Kong, Z., Gao, L., Wang, L. and Li, S., ***The Normal Parameter Reduction of Soft Sets and Its Algorit,*** Computers and Mathematics with Applications, 56 (1), 3029-3037, (2008).

[11] Xiao, Z., Chen, L., Zhong, B., Ye, S., ***Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets,*** In Proceedings of ICSSSM-05 (Ed; J. Chen), IEEE, 2, 1104-1106, (2005).

[12] Pei, D. and Miao, D., ***From Soft Sets to Information Systems***, In: Proceedings of Granular Computing (Eds: X. Hu, Q. Liu, A. skowron, T. Y. Lin, R. R. Yager, B. Zhang) IEEE, 2, 617-621, (2005).

[13] Mushrif, M. M., Sengupta, S., Ray, A. K., Texture Classifcation Using a Novel, ***Soft-Set Theory Based Classifcation,*** Algorithm. Lecture Notes In Computer Science, 3851, 246-254, (2006).

[14] Jun, Y. B., ***Soft BCK/BCI-Algebras***, Computers and Mathematics with Applications, 56 (1), 1408-1413, (2008).

[15] Jun, Y. B., Park, C. H., ***Applications of Soft Sets in Ideal Theory of BCK/BCI-Algebras, Information Sciences,*** 178 (1), 2466-2475, (2008).

[16] Park, C. H., Jun, Y. B., Öztürk, M. A., ***Soft WS-Algebras***. Commun, Korean Math. Soc, 23 (3), 313-324, (2008).

[17] Feng, F., Jun, Y. B., Zhao, X., ***Soft Semirings,*** Computers and Mathematics with Applications, 56 (10), 2621-2628, (2008).

[18] Sun, Q-M., Zhang, Z-L., Liu, J., ***Soft Sets and Soft Modules.*** (In Guoyin Wang, Tian-rui Li, Jerzy W. Grzymala-Busse, Duoqian Miao, Andrzej Skowron, Yiyu 54

Yao Eds.), ***Rough Sets and Knowledge Technology***, RSKT, Proceedings, Springer, 403-409, (2008).

[19] Ali, M. I., Feng, F., Liu, X., Min, W. K., Shabir, M., ***On Some New Operations in Soft Set Theory***, Comput. Math. Appl., 57 (9), 1547-1553, (2009).

[20] Maji, P. K., Biswas, R., Roy, A. R., ***Fuzzy Soft Sets***, Journal of Fuzzy Mathematics, 9 (3), 589-602, (2001).

[21] Roy, A. R. and Maji, P. K., ***A Fuzzy Soft Set Theoretic Approach to Decision Making Problems***, Journal of Computational and Applied Mathematics, 203 (1), 412-418, (2007).

[22] Yang, X., Yu, D., Yang, J., Wu, C., ***Generalization of Soft Set Theory: From Crisp to Fuzzy Case.*** In Fuzzy Information and Engineering: Proceedings of ICFIE, (Bing-Yuan Cao Ed.) Advances in Soft Computing, Springer, 345-355, (2007).

[23] Enginoğlu, S., ***Esnek Karar Verme Metodları***, Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat, (2008).

[24] Aktaş, H., Çağman, N., ***Soft Sets and Soft Groups***, Information Sciences, 177 (1), 2726-2735, (2007).

[25] Acar, U., Koyuncu, F. and Tanay, B., ***Soft Sets and Soft Rings***. Computers and Mathematics with Applications, 59, 3458-3463 (2010).

[26] Sezgin, A., Atagün, A.O., ***Soft Groups and Normalistic Soft Groups***, Computers & Mathematics with Applications, 62 (2), 1457-1467 (SCI),(2011).

[27] Sezgin, A., Atagün, A.O. and Çağman, N., ***A New View to N-Group Theory-Soft N-Groups***, Fasciculi Mathematici, no: 51,123-140, (2013).

[28] Aktaş, H., ***Some Algebraic Applications of Soft Sets,*** Applied Soft Computing, Volume 28, Pages 327–331, (2015).

[29] Aktaş, H., Özlü, Ş., ***Cyclic Soft Groups and Their Applications on Groups***, The Scientific World Journal,Volume 2014 Article ID 437324, 5 pages (2014).

[30] Sezgin, A., Atagün, A.O., ***A New Kind of Vector Space: Soft Vector Space***, Southest Asian Bulletin of Mathematics, 40 (5), 753-770, (2016).

[31] Sezgin, A., Atagün, A.O., Aygün, E., ***A Note on Idealis1tic Soft Near-Rings***, Filomat, 25 (1) 53-68. (SCI) (2011).

[32] Sezgin, A., Atagün, A.O., ***A New View to Near-Ring Theory: Soft Near-Rings***, Applied Mathematics & Information Science, accepted (2016).

[33] Sezgin, A., Atagün, A.O., ***Soft Substructures of Rings***, fields, and modules, Computers & Mathematics with Applications, 61 (3) 592-601 (2011).

[34] Çağman, N., Çıtak, F., Aktaş, H., ***Soft Int-Group and Its Applications to Group Theory,*** Neural Computing and Applications (2011).

[35] Kaygisiz, K., ***On Soft Int-Groups***, Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics Volume 4, No. 2, pp. 365–375 (2012).

[36] Şimsek, İ., Kaygısız, K., Çağman, N., ***Normal Soft Int-Group***, Contemporary Analysis and Applied Mathematics Vol.2, No.2, 258-267, (2014).

[37] Çitak, F., Çagman, N., ***Soft Int-Rings and Its Algebraic Applications,*** Journal of Intelligent and Fuzzy Systems (2015),

[38] Sezgin, A., Atagün, A.O., Çağman, N., ***Soft Intersection Near-Rings with Applications,*** Neural Computıng & Applıcatıons, 21 (Issue 1-Supplement), 221-229 (2012).

[39] Ma, X., Zhan, J., ***Applications of Soft Intersection Set Theory to H-Hemiregular and H-Semisimple Hemirings,*** Journal of multiple-valued logic and soft computing (2015).

[40] Tunçay, M., Sezgin, A., ***Soft Union Ring and Its Application to Ring Theory,*** International Journal of Computer Applications, 151, (9), 7-13, (2016).

[41] Sezgin, A., ***A New View to Ring Theory Via Soft Union Rings, İdeals and Bi-İdeals,*** Knowledge-Based Systems, 36, 300-314 (2012).

[42] Zhan, J., Çağman, N., Sezgin Sezer, A., ***Applications of Soft Union Sets to Hemirings Via SU-H-İdeals,*** Journal of Intelligent and Fuzzy Systems, 26, (3), 1363-1370, (2014).

[43] Sezgin Sezer, A., ***A New Approach to LA-Semigroup Theory Via The Soft Sets,*** Journal of Intelligent and Fuzzy Systmes, 26, (5), 2483-2495, (2014).

[44] Sezgin Sezer, A., ***Certain Characterizations of LA-Semigroups By Soft Sets,*** Journal of Intelligent and Fuzzy Systmes, 27 (2), 1035-1046, (2014).

[45] Sezgin Sezer, A., ***A New Approach to LA-Semigroup Theory Via The Soft Sets***, Journal of Intelligent and Fuzzy Systmes, 26, (5), 2483-2495, (2014).

[46] Sezgin Sezer, A., ***Certain Characterizations of LA-Semigroups By Soft Sets,*** Journal of Intelligent and Fuzzy Systmes, 27 (2), 1035-1046, (2014).

[47] Kaya Türk, Z., ***Esnek Birleşimsel Gruplar,*** Yüksek Lisans Tezi, Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Tokat, (2013).

[48] Taşçı D., ***Soyut Cebir,*** Alp Yayınevi, Ankara (2007).

[49] Rotman, J. J., ***An Introduction to the Theory of Groups,*** Springer, United States of America (2009).

[50] Dummit, D. S., Foote, R., M., ***Abstract Algebra,*** John Wiley and Sons, United States of America (2009).

[51] Asar, A. O., Arıkan, A., Arıkan, A., ***Cebir,*** Eflatun Yayınları, Ankara (2012).

[52] Çağman, N., and Enginoğlu, S., ***Soft Set Theory and Uni-Int Decision Making,*** European Journal of Operational Research, 207, 848-855 (2010).

[53] Sezgin Sezer, A., ***A New Approach to Semigroup Theory I; Soft Union Semigroup, Ideals and Bi-Ideals,*** Algebra Letters, Vol 2016, Article ID 3 (2016).

[54] Sezgin Sezer, A***., A New wiev to Ring Theory Via Soft Union Rings, Ideals and Bi-Ideals,*** Knowledge-Based Systems, 36, 300-314 (2012).

ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

Adı Soyadı	: Emrah MUŞTUOĞLU
Doğum Yeri	: KASTAMONU
Doğum Tarihi	: 06.09.1987
Bildiği Yabancı Dil	: İngilizce

Eğitim Durumu

Lise	: Kastamonu Abdurrahmanpaşa Lisesi (2001-2005)
Lisans	: Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Eğitim Fakültesi, Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü (2005-2010)

İletişim Bilgileri

Adres	: Bahçelievler Mahallesi, Altan Sokak, Tuğra 1 Apt., No: 3/11, Havza/Samsun
E-posta	: mattea_1987@hotmail.com