SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN BAZI ÖZELLİKLERİ

Tuğba AŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

AMASYA

SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN BAZI ÖZELLİKLERİ

Tuğba AŞIK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2016

AMASYA

Tuğba AŞIK tarafından hazırlanan "SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN BAZI ÖZELLİKLERİ" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR ....

Tez Danışmanı, Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / ~~oy çokluğu~~ ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ....

Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı, GOÜ

Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR ....

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

Yrd. Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR ....

Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.

29/12/2016

Bu tez ile Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu tezin yazılmasında bilimsel ahlâk kurallarına uyulduğunu, başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunulduğunu, tezin içerdiği yenilik ve sonuçların başka bir yerden alınmadığını, kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapılmadığını, tezin herhangi bir kısmının bu üniversite veya başka bir üniversitedeki başka bir tez çalışması olarak sunulmadığını beyan ederim.

Tuğba AŞIK

SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN BAZI ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Tuğba AŞIK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR

Aralık 2016

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, Sobolev uzaylarında süreksiz katsayılı ve geçiş şartlarına sahip özdeğer parametreli bir sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatörün izomorfizm ve Fredholm operatörü olma gibi bazı özelliklerinin araştırılmasıdır. Ayrıca bu araştırmaları yapabilmek için ölçüm teorisi, normlu uzaylar ve operatör teorisine ait bazı temel tanımlar ve teoremler verilmiştir.

2016, 87 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sınır Değer Problemi, Süreksiz Katsayı, Geçiş Şartları, Diferensiyel Operatör, Fredholm ve İzomorfizm.

SOME PROPERTIES OF A DIFFERENTIAL OPERATOR GENERATED BY A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH DISCONTINUOUS COEFFICIENTS

(M.Sc. Thesis)

Tuğba AŞIK

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Department of Mathematics

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

December 2016

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate some properties, such as isomorphism and Fredholmness of the differential operator in Sobolev spaces generated by a boundary-value problem involving discontinuous coefficients, transmission conditions and eigen – parameter. Moreover, for investigation of the considered problem we give some needed basic concepts and theorems, from the measure theory, normed space theory and operator theory.

2016, 87 pages

Key Words: Boundary Value Problem, Discontinuous Coefficients, Transmission Conditions, Differential Operator, Fredholmness and Isomorphism.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans öğrenimim boyunca olduğu gibi tez çalışmamın da her aşamasında her türlü desteğini ve emeğini esirgemeyen; kıymetli zamanını, fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; gösterdiği sonsuz anlayış ve ilgiyle tezimin ortaya çıkmasına yardımcı olan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR'e minnettarlığımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca maddi ve manevi desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen bölümümüzün değerli hocalarına şükranlarımı sunarım.

Öğrenim hayatım boyunca olduğu gibi bu çalışma dönemimde de hep yanımda olan kıymetli babam Aydın DAĞISTAN'a, sevgili annem Hülya DAĞISTAN'a, canım kardeşim Dr. Elif DAĞISTAN'a, eşim Dr. Muzaffer AŞIK'a ve biricik kızım Yağmur Elif AŞIK'a teşekkür ederim.

Tuğba AŞIK

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
$\mathbb{C}$	Karmaşık Sayılar
$(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{\mathcal{A}})$	Ölçülebilir Uzay
$\boldsymbol{\mu}_*(\boldsymbol{A})$	İç Ölçüm
$\boldsymbol{\mu}^*(\boldsymbol{A})$	Dış Ölçüm
$\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{X})$	P. Kuvvetten İntegrallenebilir Fonksiyonların Sınıfı
$\boldsymbol{L_p}(\boldsymbol{\Omega})$	Lebesgue Uzayı
$(\boldsymbol{X}, \|.\|)$	Normlu Lineer Uzay
$\boldsymbol{C}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$	$[\alpha, \beta]$ Aralığında Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$\boldsymbol{C}^{(r)}[\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}]$	$[\alpha, \beta]$ Aralığında r- inci Mertebeye Kadar Sürekli Türevlenebilir Fonksiyon Uzayı
$(\boldsymbol{X}, (.,.))$	İç Çarpım Uzayı
$(\mathbf{E_0}, \mathbf{E_1})$	İnterpolasyon Çifti
$(\mathbf{E_0}, \mathbf{E_1})_{\boldsymbol{\theta},\boldsymbol{p}}$	Reel İnterpolasyon Uzayı

$\boldsymbol{\mathcal{D}}(\boldsymbol{\Omega})$	Test Fonksiyonlarının Uzayı
$\boldsymbol{\mathcal{D}}'(\boldsymbol{\Omega})$	Genelleştirilmiş Fonksiyonların Lineer Uzayı
$\boldsymbol{L^p_{loc}}(\boldsymbol{\Omega})$	P. Kuvvetten Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$\boldsymbol{L^1_{loc}}(\boldsymbol{\Omega})$	Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar Uzayı
$\boldsymbol{W^k_p}(\boldsymbol{\Omega})$	Sobolev Uzayı
$\boldsymbol{L}$	Diferensiyel Operatör
$\boldsymbol{L}^*$	L nin Adjoint (Eşlenik) Operatörü

1. GİRİŞ

Basit gibi görünse de önemli bir konu olan suyun akışı ve ulaşımı kolaylaştırmak için tasarlanan uçağın uçuşu gibi bütün hareketler mekanik prensiplerine göre gerçekleştiği için kısmi diferensiyel denklemler ile yakından ilişkilidir.

Kısmi diferansiyel denklemler de değişkenlere ayırma yöntemi kullanıldıktan sonra adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemleri ortaya çıkmıştır. Mühendislikteki ve fiziksel bilimlerdeki birçok problem için sınır değer problemleri çok önemlidir.

Sınır değer problemlerinin çözümüne birçok bilim dalında oldukça sık olarak rastlanılmaktadır. Çeşitli çalışmalarda uygulanan bazı yöntemler, adi diferensiyel denklemlerde, sınır değer problemlerinin spektral özelliklerinin çalışılmasını öngörmektedir. Örneğin; Kuantum mekaniğinden bilinmektedir ki, özdeğerler ve özvektörler, diferensiyel denklem içeren denklem sistemi çözümlerinde, sınır değer problemlerinde görülmektedir. Bu tür denklemlere, kuantum ve akışkanlar mekaniğinde, elektriksel bir potansiyel içinde bulunan bir parçacığın enerjisini hesaplamada, elastik çarpışma problemlerinde, hızlı salınım yapmakta olan cisimlerin hareketlerinde sıkça karşılaşılmaktadır.

Sınır değer problemleri sayılamayacak kadar çok konu ile yakından ilişkilidir. Kısmi diferensiyel denklemlerdeki çalışmalara bağlı olarak fizikte ve mühendislikte birçok konu ile iç içedir. Sınır değer problemleri fizik alanından jeofizik bilim dalı ve mühendislik alanından su mühendisliği uygulamaları için oldukça önemlidir. Yer altı madenlerinin çıkarılmasında da sınır değer problemleri karşımıza çıkmaktadır. Ayrıca bilgisayar programlarında yapay zekâ ile ilgili çalışmalarda sınır değer problemlerinden faydalanılmaktadır. Örneğin; tanıma ve yüzey tarama, şiddete, darbeye ya da bunun gibi etkili yüklere maruz kalan yapılardaki kritik denge durumlarının belirlenmesinde sınır değer problemlerinin özdeğerleri kullanılmaktadır. Sınır değer problemlerinden özdeğerler konusu sistemlerin stabiliteleri, karakteristik titreşimlerle ilişkilidir.

Bunların dışında sınır değer problemleri mekanikte de kullanılmaktadır. Verilen dalga boylarına göre homojen olmayan yayda yoğunluk dağılımının çalışılmasında karşımıza çıkmaktadır. Genel olarak açık bölge saçılma veya ışıma problemleri elektromanyetik sınır değer problemlerinin ilgi alanına girmektedir.

Sınır değer problemleri güncel olarak yaşamımızda önemli bir yere sahip olan ısı alışverişi ve hava sirkülasyonu gibi konularda önemli bir yere sahiptir. Bu tür denklemlerin çözümleri sayesinde sıvı veya gaz dinamiğinde akışın parametrelerini ve diğer kısımlarla olan ilişkilerini öğrenmek mümkündür.

Bunların yanı sıra yapı mühendislik birimlerinde sınır değer problemlerine ihtiyaç duyulmaktadır. Sıvı dinamiğinin temel denklemleri de ayrıca sınır değer problemleriyle yakından ilişkilidir.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Sınır değer problemlerine, fiziksel birçok alanda problemlerin çözümü için ihtiyaç duyulmuştur. Örneğin klasik mekanik problemleri, elektro manyetik teori, kuantum mekaniği, kuantum fiziği, termodinamik problemleri ve özellikle dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır.

Sınır değer problemleri aynı zaman da farklı fiziksel ve mekanik özellikleri bulunan cisimler arasındaki ısı ve madde iletiminde kullanılmaktadır [Kandemir ve ark., 2009].

Isı iletim probleminin çözümünde karşımıza çıkan özdeğer parametresine bağlı adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemi ilk defa Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından araştırılmaya başlanmıştır. C. Sturm ve J. Liouville çalışmasında matematiksel fizik alanında ısı iletimi tipinden problemlerle ilgili olarak Fourier yöntemini araştırmıştır.

G. D. Birkhoff 1908 yılında özdeğer parametresine bağlı olarak adi diferensiyel denklemleri incelemiştir. Bu denklemlerin temel çözüm sisteminde yer alan çözümler için, regüler sınır şartlarını tanımlamıştır. Elde ettiği regüler sınır değer problemi için özfonksiyonlar ve özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremi kanıtlamıştır.

Tamarkin tarafından 1928 yılında regüler ve güçlü regüler sınır şartları tanımlanmıştır. Ayrıca daha geniş sınıftan olan parametreye bağlı lineer diferensiyel denklemler için temel çözüm sistemleri üzerinde çalışılmıştır.

Sınır değer problemlerinin kullanım alanlarından biri de Elastisite teorisine ait bazı problemlerdir. Bu tip problemler bazı sınır değer problemlerine dönüştürülerek incelenebilmektedir [Papkovich, 1941].

Matematiksel fiziğin bazı problemlerinde sınır değer problemleri kullanılmaktadır. Bu tip problemler de zaman değişkenine göre kısmi türev sadece diferensiyel denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarında da ortaya çıkmaktadır. Böyle problemlere uygun olan spektral problemlerde özdeğer parametresi sadece diferensiyel denklemde değil aynı zamanda sınır şartlarında da bulunmaktadır [Lang, 1983].

Sınır şartlarında özdeğer parametresi bulunduran sınır değer problemleri hem teorik hem de uygulama açısından büyük önem taşımaktadır. Sınır değer problemlerinin çözümü tek olabildiği gibi çözümü olmayabilir veya sonsuz çözümde olabilir.

Sınır şartlarında spektral parametre içeren sınır değer problemleri M. Poisson tarafından çalışılmıştır [Poisson, 1820].

J. Walter çalışmasında hem ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemde hemde sınır şartlarının her ikisinde özdeğer parametre bulunduran sınır değer probleminin, uygun Hilbert uzayında kendine eşlenik lineer operatörle bağlantısını kurmuş ve bu tipten problemlerin operatör teorik yorumunu vermiştir [Walter, 1973].

1975 yılında yaptığı çalışmada Russakovskiy, sınır şartlarında polinom biçiminde özdeğer parametresi içeren problemler için operatör teorik yorumunu vermiştir.

Daha sonraki yıllarda fizik de somut problemlerin doğrultusunda diferensiyel operatörlerin spektral teorisi hızlı bir şekilde geliştirilmiştir. Bu konuda birçok makale ve kitap yazılmıştır [Likov, 1963; Schneider, 1974; Fulton, 1977; Hinton, 1979; Lang, 1983; Shkalikov 1983; Yakubov, 1994; Titeux ve Yakubov, 1997].

Sınır şartlarında öz değer parametresi bulunduran bazı kendine eşlenik sınır değer problemleri A. Schneider'in (Schneider, 1974) çalışmasında incelenmiştir.

Fulton (1977) çalışmasında fonksiyonel analiz ve Titcmarh'ın (1962) klasik yöntemlerinden yararlanarak özdeğer parametresinin sınır şartlarından sadece bir tanesinde bulunduğu durum için çalışmalar yapmıştır. Çalışmalarında belirlediği problem için öz fonksiyonların asimptotiğini ve öz değerlerini bulmuş ve farklı açılım teoremlerini ispatlamıştır.

Shkalikov 1983 yılındaki çalışmasında, diferensiyel denklemin katsayı fonksiyonlarında özdeğer parametresine yer vermiş ve de sınır şartlarında polinom tipinde kendine eşlenik olmayan sınır değer problemlerinin araştırılması için lineerleştirme yöntemi geliştirmiştir [Aydemir, 2010].

S. Y. Yakubov'un kitabında regüler diferensiyel operatörlerin genel teorisi kurulmuştur ve bu teoride yeni yöntemler geliştirilmiştir [Yakubov, 1994].

Mekanikte uygulaması görülen bazı sınır değer problemleri ile ilgili çalışmalara I. Titeux ve Ya. Yakubov'un çalışmalarında rastlanmaktadır [Titeux ve Yakubov, 1997].

Y. Yakubov'un son yıllardaki çalışmalarında ise irregular sınır değer problemlerinin spektral özellikleri araştırılarak elde edilen sonuçlar birçok fiziksel problemlere uygulanmıştır [Yakubov, 1998].

S. Yakubov ve Ya. Yakubov sınır şartlarında spektral parametre içeren sınır değer problemlerinin soyut bir teorisini kurmuşlardır. Bunun yanı sıra sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin izomorfizm olma ve koersitivliği ile ilgili çok sayıda çalışmasıyla ışık tutmuştur. Fredholm operatörü ile ilgili de kitapları bulunmaktadır [Yakubov, 1999].

Sınır değer problemlerinin önemli uygulamalarının birçoğu fiziksel problemlerde ortaya çıkmaktadır. Pivovarchik'in, 1999 yılında ki çalışmasında uçlarında ağırlıklı yük asılmış telin (veya çubuğun) titreşimi ile ilgili sınır değer problemi ele alınmıştır. Ayrıca bu problemlerden bazıları homojen olmayan ortamlarda ısı transfer problemleri, difraksiyon problemleri ve çeşitli fiziksel transfer problemleridir [Pivovarchik, 1999; Yakubov ve Aliev, 2006].

Süreksiz katsayılı ve geçiş şartlarına sahip sınır değer problemleri standart olmayan problemler olarak adlandırılmaktadır [Yakubov ve ark., 2009].

Süreksizliğin varlığı operatörlerin incelenmesinde temel niteliksel gelişmeler sağlamıştır. Aralıkta süreksizliğe sahip sınır değer problemleri matematik, mekanik, fizik ve jeofizik gibi bilim dallarında sıklıkla karşımıza çıkmaktadır. Süreksizliğe sahip sınır değer problemleri için düz ve ters problemlerin çeşitli formülasyonları diğer birçok çalışmada ele alınmıştır [Borg, 1946; Mclaughlin, 1986].

Oktay Sh. Mukhtarov danışmanlığında süreksiz katsayılı diferensiyel denklem, sınır şartları ve ek olarak geçiş şartlarından oluşan sınır değer geçiş problemi, Altınışık'ın, Kadakal'ın tezlerinde incelenmiştir [Altınışık, 1998 ve Kadakal, 2000].

Mukhtarov ve ark. birçok çalışmasında, süreksiz katsayılı adi diferensiyel denklem için geçiş şartları içeren sınır değer problemlerini araştırmışlardır [Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Mukhtarov ve ark., 2004].

Sınır değer problemleri günümüze kadar güncelliğini korumaktadır. Çok sayıda makale ve kitap da bu problemler incelenmiş ve halen incelenmeye devam etmektedir [Yakubov, 1994; Yakubov, 1998; Mukhtarov ve Demir, 1999; Mukhtarov ve Yakubov, 2002; Mukhtarov ve Kandemir, 2002; Mukhtarov ve ark., 2004; Kandemir ve Yakubov, 2010; Mukhtarov ve Aydemir, 2014; Mukhtarov, Olğar ve Aydemir, 2015; Kandemir, 2015].

3. ÖLÇÜLEBİLİR UZAYLAR ve ÖLÇÜLEBİLİR FONKSİYONLAR

3.1. Ölçüler

3.1.1. Tanım X bir küme olsun. X kümesinin alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ ailesi için aşağıdaki şartlar sağlanırsa $\mathcal{A}$ sınıfına X kümesi üzerinde bir **cebirdir** denir.

$i)$ $X \in \mathcal{A}$

$ii)$ Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X \setminus E \in \mathcal{A}$

$iii)$ $k = 1,2,\ldots,n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

verilen (iii) şartı yerine her $n \in \mathbb{N}$ için

$$E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$$

şartı sağlanırsa $\mathcal{A}$ cebirine bir $\sigma -$ cebiri adı verilir.

3.1.2. Tanım X bir küme ve $\mathcal{A}$, X üzerinde bir σ - cebir olsun. $(X,\mathcal{A})$ ikilisine ölçülebilir uzay denir.

3.1.3. Tanım $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir η fonksiyonu

$i)$ $\eta(\emptyset) = 0$,

$ii)$ Her $K \in \mathcal{A}$ için $\eta(K) \geq 0$,

$iii)$ Her ayrık (K_n) dizisi için

$$\eta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \eta(K_n),$$

şartlarını sağlarsa bu fonksiyona bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** adı verilir.

3.1.4. Tanım Bir X kümesi verilsin. $\mathcal{A},\ X$ üzerinde bir $\sigma -$ cebiri ve $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı bir η ölçüsünden oluşan $(X, \mathcal{A}, \eta)$ üçlüsüne bir ölçü uzayı adı verilmektedir.

Örnek **1**

$$\bigcup_{m=1}^{\infty}\left\{\alpha\colon \frac{1}{m+1} \leq \alpha < \frac{1}{m}\right\}$$

kümesinin ölçümü 1 dir. $m = 1,2,3, \ldots$ sayıları için

$$I_m = \left\{\alpha\colon \frac{1}{m+1} \leq \alpha < \frac{1}{m}\right\}$$

olsun. Buna göre,

$$I_1 = \left\{\alpha\colon \frac{1}{2} \leq \alpha < 1\right\},\ I_2 = \left\{\alpha\colon \frac{1}{3} \leq \alpha < \frac{1}{2}\right\}, \ldots,\ I_n = \left\{\alpha\colon \frac{1}{n+1} \leq \alpha < \frac{1}{n}\right\}$$

olur. Dolayısıyla,

$$\eta(I_1) = 1 - \frac{1}{2}, \qquad \eta(I_2) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}, \ldots\ , \eta(I_n) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

yazılır. Bütün I_m aralıkları ayrık olduğundan,

$$\eta\left(\bigcup_{m=1}^{n} I_m\right) = \sum_{m=1}^{n} \eta(I_m) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

olur. Buradan,

$$\eta\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} I_m\right) = \lim_{n\to\infty} \eta\left(\bigcup_{m=1}^{n} I_m\right) = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1$$

olarak bulunur.

3.1.5. Tanım Eğer her $K \in \mathcal{A}$ için $\eta(K) < \infty$ ise η ye bir **sonlu ölçü** adı verilir.

3.1.6. Tanım $K \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin.

$$E_K = \left\{\sum_{n=1}^{\infty} \ell(\mathrm{I}_n) :\ \mathrm{I}_n\ ler\ aralıklar, \qquad K \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathrm{I}_n\right\}$$

olmak üzere, $m^*(K) = \inf E_K$ sayısına K kümesinin dış ölçüsü denir.

3.1.7. Tanım 1- $\mu^*(E\backslash\mathcal{A})$ sayısı, $\mathcal{A}$ kümesinin iç ölçümü olarak adlandırılır ve bu iç ölçüm $\mu_*(\mathcal{A})$ ile gösterilir. $\mathcal{A}$ kümesinin iç ölçümü,

$$\mu_*(\mathcal{A}) = sup \sum_{\mathcal{A}\supseteq\cup P_k} m(P_k)$$

şeklinde de ifade edilebilir. Buna göre bir kümenin iç ve dış ölçümü arasında,

$$\mu_*(\mathcal{A}) = 1 - \mu^*(E\backslash\mathcal{A})$$

bağıntısı vardır.

3.1.1. Önerme Bir kümenin iç ölçümü, dış ölçümünden küçük ya da eşittir. Yani her zaman $\mu_*(\mathcal{A}) \leq \mu^*(\mathcal{A})$ dır.

3.1.8. Tanım X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir kümelerin birleşimi şeklinde yazılabiliyorsa η ölçüsü $\sigma -$ sonludur denir. Eğer $\eta(X) = 1$ olarak verilirse bu ölçüye **olasılık ölçüsü** adı verilir.

3.1.9. Tanım $\mathcal{A}$ bir küme olmak üzere bir $\mathcal{F}$ $\sigma -$ cebiri, aşağıdaki şartları sağlayan $\mathcal{A}$ kümesinin alt kümelerinin bos kümeden farklı bir sınıfıdır:

$i)$ $\mathcal{A}$ kümesi $\mathcal{F}$ cebirindedir.

$ii)$ $\mathcal{A}$ kümesi $\mathcal{F}$ cebirinde ise, $\mathcal{A}$ kümesinin tümleyeni de $\mathcal{F}$ cebirindedir.

$iii)$ $\mathcal{A}_n$, $\mathcal{F}$ cebirinin elemanlarının dizisi ise, $\mathcal{A}_n$ kümelerinin birleşimi $\mathcal{F}$ cebirindedir.

3.2. Ölçülebilir Fonksiyonlar

Fonksiyonların ölçülebilir olmasının, Lebesgue integrali kavramında önemli bir yeri vardır. Fonksiyonlarda ölçülebilme özelliği, görüntü aralıklarına ilişkin ters görüntülerinin σ - cebirine ait olup olmadığı ile ilgili bir kavramdır.

3.2.1. Tanım $\mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A})$ ise, $\mathcal{A}$ kümesine Lebesgue anlamında ölçülebilir küme adı verilir.

3.2.2. Tanım E ölçülebilir bir küme olmak üzere $f : E \to \mathbb{R}$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Eğer $\{x \in E \mid f(x) > k, \ \ k \in \mathbb{R}\}$ kümesi ölçülebilir ise $f(x)$ fonksiyonuna **ölçülebilir fonksiyon** denir.

3.2.1. Teorem Bir $\mathcal{A}$ kümesi verilmiş olsun. Bu kümenin ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli şart $\mu^*(\mathcal{A}) + \mu^*(E\backslash\mathcal{A}) = 1$ olmasıdır.

3.2.1. Sonuç $\mathcal{A}$ kümesi ölçülebilirse, $\mathcal{A}$ kümesinin tümleyeni olan $E\backslash\mathcal{A}$ kümesi de ölçülebilirdir.

3.2.2. Teorem Bir $f(x)$ fonksiyonunun bir E kümesinde ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli şart, her K reel sayısı için, $\{x \in E : f(x) \leq K\}$ kümesinin ölçülebilir olmasıdır.

3.2.3. Teorem $f(x)$ fonksiyonunun bir E kümesinde ölçülebilir olması için gerekli ve yeterli şart, herhangi $K_1 < K_2$ gerçel sayıları için, $\{x \in E \mid K_1 < f(x) < K_2\}$ kümesinin ölçülebilir olmasıdır.

***Örnek* 1** Rasyonel sayıların herhangi bir alt kümesi ölçülebilirdir. $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{Q}$ olsun.

$$\mu^*(\mathcal{A}) \leq \mu^*(\mathbb{Q}) = \mu_*(\mathbb{Q}) = 0$$

dır. Ölçüm negatif olamaz, dolayısıyla $\mu_*(\mathcal{A}) = 0$ olur. Ayrıca,
$0 \leq \mu_*(\mathcal{A}) \leq \mu^*(\mathcal{A}) = 0$ eşitsizliklerinden,

$$\mu_*(\mathcal{A}) = \mu^*(\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A})$$

dır. Bu da $\mathcal{A}$ kümesinin ölçülebilir olmasının tanımıdır. Dolayısıyla, $\mathcal{A}$ kümesinin ölçümü de $\mu(\mathcal{A}) = 0$ olarak bulunur.

***Örnek* 2** [0,1] kapalı aralığındaki irrasyonel sayılar kümesi ölçülebilirdir ve ölçümü bir birimdir. [0,1] kapalı aralığındaki rasyonel sayılar kümesi ölçülebilir ve ölçümü sıfırdır. [0,1] kapalı aralığındaki rasyonel sayılar kümesinin bu aralığa göre tümleyeni bu aralıktaki irrasyonel sayılardır. Sonuç 3.2.1. e göre [0,1] kapalı aralığındaki irrasyonel sayılar kümesi ölçülebilirdir. [0,1] kapalı aralığındaki rasyonel sayılar $\mathcal{M}$ ve irrasyonel sayılar da $\mathcal{N}$ kümesi ile gösterilirse,

$$1 = \mu([0,1]) = \mu(\mathcal{M}) + \mu(\mathcal{N}) = \mu(\mathcal{N})$$

yazılır. $\mu(\mathcal{M}) = 0$ olduğundan, $\mu(\mathcal{N}) = 1$ olarak bulunur.

3.2.4. Teorem Eğer $(f_n(x))$,

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

olacak şekilde, E kümesinde ölçülebilir fonksiyonların monoton bir dizisi ise, $f(x)$ fonksiyonu da E kümesinde ölçülebilirdir.

3.2.5. Teorem Ölçülebilir bir E kümesi üzerinde tanımlı reel değerli bütün ölçülebilir fonksiyonların kümesi bir vektör uzayıdır ve çarpma işlemi altında kapalıdır. Yani f ve g ölçülebilir fonksiyonlar ise $f + g$ ve $f.g$ fonksiyonlarıda ölçülebilirdir.

3.2.3. Tanım $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ölçülebilir bir uzay ve $1 \leq p < \infty$ olsun.

$$\int_X |f(x)|^p \ d\mu < \infty$$

özelliğini sağlayan

$$f: X \to \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı ölçülebilir f fonksiyonlarının sınıfına $L_p(X)$ uzayı denir. Buna göre $L_p(X)$ uzayı

$$L_p(X) = \left\{ f \ \middle| \ f \text{ ölçülebilir fonksiyon}, \quad \int_X |f(x)|^p \ d\mu < \infty \right\}$$

şeklinde gösterilir ve $\boldsymbol{p}$. **kuvvetten integrallenebilen fonksiyonların sınıfıdır.**

3.3. Lebesgue Uzayı

Bu bölümde Lebesgue integrali tanımı verilmiştir ve bu integralden yararlanılarak ortaya çıkan bazı önemli teoremlere yer verilmiştir.

3.3.1. Tanım $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında sınırlı ve ölçülebilir olsun. $\alpha < f(x) < \beta$ olacak şekilde α ve β gerçel sayıları verilsin. $[a, b]$ kapalı aralığını, $\alpha = y_0 < y_1 < y_2 < \cdots < y_{n-1} < y_n = \beta$ olacak şekilde $y_1, y_2, \dots, y_{n-1}$

noktalarıyla n tane alt aralığa bölünmek üzere bu noktalar, geometrik olarak y ekseni üzerindedir. $[a, b]$ kapalı aralığını bu biçimde bölerek elde edilen noktaların kümesine bu aralığın parçalanışı denir. E_k kümesi, $k = 1,2, \dots, n$ sayıları için

$$E_k = \{x : \ y_{k-1} \leq f(x) < y_k\}$$

şeklinde tanımlansın. $f(x)$ fonksiyonu ölçülebilir olduğundan, E_k kümelerinin her biri ölçülebilirdir ve ayrıktır.

$$S = \sum_{k=1}^{n} y_k . \eta(E_k) , \qquad s = \sum_{k=1}^{n} y_{k-1} . \eta(E_k)$$

ifadeleri sırasıyla üst ve alt toplamlar olarak tanımlanırsa, S ve s nin farklı değerler kümesi parçalanma çeşitlendirilerek tanımlanabilir. Mümkün olan bütün parçalanmalar için $I = \inf(S)$ ve $J = \sup(s)$ dir

Her zaman mevcut olan bu değerler sırasıyla $f(x)$ fonksiyonunun $[a, b]$ kapalı aralığındaki üst ve alt Lebesgue integralleri olarak tanımlanır ve

$$I = \int_{a}^{\bar{b}} f(x)dx, \qquad J = \int_{\underline{a}}^{b} f(x)dx,$$

ile gösterilir. Eğer $I = J$ ise $f(x)$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığında **Lebesgue integrallenebilirdir** denir ve bu değer

$$\int_{a}^{b} f(x)dx$$

ile gösterilir.

Uygulamalı matematik alanında ki problemlerde genelleştirmeler yapılmak istendiğinde genellikle düşünülen ilk metot Riemann anlamındaki integralden Lebesgue anlamındaki integrale geçmek şeklindedir. Çünkü Lebesgue anlamındaki integral Riemann anlamındaki integrale göre daha geneldir ve Riemann anlamında mevcut olmayan bir integral Lebesgue anlamında mevcut olabilir.

Riemann anlamındaki integralde fonksiyonun tanım aralığının uygun olarak parçalanması ve de fonksiyonların bu parçalar üzerinde sınırlı değerler alması önemlidir. Ancak Lebesgue integralinde fonksiyonun tanım kümesinin bir kümeler sınıfı olması ve bu kümeler sınıfının σ - cebir olması gerekliliği ön plandadır. Ayrıca integrali alınacak fonksiyonun ölçülebilir bir fonksiyon olması da başka önemli bir koşuldur. Tanım bölgesi değişmediği zaman Riemann anlamındaki integralin sonucu fonksiyona bağlı olduğu bilinmektedir. Ancak Lebesgue anlamında integralde sonuç σ - cebir üzerinde tanımlanan ölçüye bağlıdır. Çünkü bir σ - cebir üzerinde birden fazla ölçü tanımlanabilir. Ayrıca Riemann anlamındaki integralde sonuç bölgenin parçalanış şeklinden bağımsızdır.

Değişken üslü Lebesgue uzayları nümerik analiz, nonlineer analiz, fonksiyonel analiz, sınır değer problemleri, kısmi diferensiyel denklemler, matematiksel modelleme ve integral denklemler, operatör teorisi gibi matematiğin birçok alanındaki uygulamalarda kullanılmıştır.

3.3.2. Tanım $E \subseteq \mathbb{R}$ alt kümesi verilsin. Her $\mathcal{N} \subseteq \mathbb{R}$ için,

$$m^*(\mathcal{N}) = m^*(\mathcal{N} \cap E) + m^*(\mathcal{N} \cap E^c)$$

ise, E kümesine **Lebesgue anlamında ölçülebilirdir** denir.

***Örnek* 1** $\mathbb{R}$ üzerinde açık kümeler, sayılabilir sayıda olmak üzere açık aralıkların birleşimi olarak verilebilir. Buradan $\mathbb{R}$ üzerinde ki açık kümeler, Lebesgue anlamında ölçülebilirdir diyebiliriz.

3.3.1. Teorem

$i)$ Her sıfır kümesi ölçülebilirdir.

$ii)$ Her aralık ölçülebilirdir.

3.3.2. Teorem Dış ölçü sayılabilir alt toplamsaldır, herhangi bir $\{A_n\}$ kümeler dizisi için,

$$m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n)$$

dir.

3.3.3. Teorem $f(x)$ fonksiyonu [a,b] aralığında mutlak sürekli olmak üzere [a,b] aralığında hemen hemen her yerde sonlu $f'(x)$ türevi vardır ve $f'(x)$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilirdir [Natanson, 1957].

3.3.3. Tanım $[x, y]$ kapalı aralığında tanımlı f fonksiyonu verilsin. Eğer $\forall\ \varepsilon > 0$ için

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - y_k) < \delta$$

olacak şekilde öyle $\delta > 0$ sayısı varsa ki her sonlu sayıda ayrık $(x_1\,, y_1), (x_2\,, y_2), \dots, (x_n\,, y_n)$ aralıkları için

$$\sum_{k}|f(x_k) - f(y_k)| < \varepsilon$$

olsun. O zaman bu f fonksiyonuna $[x, y]$ aralığında mutlak süreklidir denir (burada $n \in N;\ (x_k\,, y_k) \subset [x, y],\ k = 1,2, \dots, n$).

3.3.1. Sonuç: Her mutlak sürekli fonksiyonun hemen hemen her yerde sonlu $f'(x)$ türevi mevcutsa, bu türev fonksiyonu $[a, b]$ aralığında Lebesgue anlamında integrallenebilirdir [Lang, 1983].

3.3.1. Lemma (Riemann – Lebesgue Lemması) $c \neq 0$ sabiti ve (a, b) aralığında integrallenebilir $\psi(z)$ fonksiyonu verilsin. O halde λ kompleks sayısı $Re(c\lambda) \leq 0$ yarım düzleminde kalmak şartı ile $\alpha, \beta \in (a, b)$ sayılarına göre düzgün olarak

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_{\boldsymbol{a}}^{\boldsymbol{b}}\psi(z)e^{c\lambda z}dz = 0$$

eşitliği sağlanır [Rasulov, 1967].

Klasik analizden de bilindiği gibi bir fonksiyonun Riemann integralinin mevcut olması için f nin tanım aralığında sürekli olması ya da süreksiz olduğu noktalar kümesinin çok geniş olmaması gerekir. Başka bir deyişle f, integrallenme bölgesinde sınırlı salınımlı olmalıdır.

Sınırlı fonksiyonların Riemann anlamında integrallenebilmesi için süreksiz olduğu noktaların kümesinin ölçümünün sıfır olması gerekir.

3.3.2. Lemma $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

$i)$ f Riemann anlamında integrallenebilir $\Leftrightarrow f,$ $[a,b]$ kapalı aralığının hemen hemen her noktasında süreklidir.

$ii)$ f Riemann anlamında integrallenebiliyorsa Lebesgue anlamında da integrallenebilirdir ve her iki integral birbirine eşittir.

4. NORMLU UZAYLAR

4.1. Normlu Uzay

4.1.1. Tanım $(X,\oplus)$ değişmeli grup, $(K,+,\cdot)$ bir cisim olsun.

$$\odot : K \, x \, X \to X ,$$
$$\odot : (m,x) \to m \odot x$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X e $(K,+,\cdot)$ cismi üzerinde **vektör uzayı** denir.

$i)$ $\forall m \in K$ ve $\forall x \in X$ için $m\odot x \in X$ dir.

$ii)$ $\forall m,n \in K$ ve $\forall x,y \in X$ için $m\odot(x \oplus y) = (m\odot x) \oplus (m\odot y)$ dir.

$iii)$ $\forall m,n \in K$ ve $\forall x \in X$ için $(m+n)\odot x = (m\odot x) \oplus (n\odot x)$ dir.

$iv)$ $\forall m,n \in K$ ve $\forall x \in X$ için $(m \cdot n)\odot x = m\odot(n\odot x)$ dir.

$v)$ $1 \in K$ ve $\forall x \in X$ için $1\odot x = x$ dir.

$(K,+,\cdot)$ cismi üzerindeki X vektör uzayı $\big((X,\oplus),(K,+,\cdot),\odot\big)$ şeklinde gösterilir. Burada, eğer $K = \mathbb{R}$ ise X e **reel vektör uzayı**, $K = \mathbb{C}$ ise **kompleks vektör uzayı** adı verilir.

4.1.2. Tanım X bir vektör uzayı olmak üzere $\emptyset \neq A \subset X$ olarak verilsin. A, X üzerindeki vektör uzayı işlemlerine göre bir vektör uzayı belirtiyorsa A ya X in **alt vektör uzayı** denir.

4.1.3. Tanım Bir X lineer uzayı (vektör uzayı) üzerinde tanımlanan $\|.\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu,

$i)$ Her $x_1 \in X$ için $\|x_1\| \geq 0$

$ii)$ $\|x_1\| = 0 \Leftrightarrow x_1 = 0$

$iii)$ Her $x_1 \in X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) için $\|\lambda x_1\| = |\lambda|\|x_1\|$

$iv)$ Her $x_1, y_1 \in X$ için $\|x_1 + y_1\| \leq \|x_1\| + \|y_1\|$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona norm denir.

4.1.4. Tanım X lineer uzayı üzerinde tanımlanan $\|.\|$ fonksiyonu normun özelliklerini sağlarsa $(X, \|.\|)$ ikilisine de **normlu lineer uzay** veya sadece **normlu uzay** adı verilir [Kreyszig, 1989].

***Örnek* 1** $\alpha,\ \beta > 0$ ve $X = \mathbb{C}^2$ olmak üzere $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ için

$$\|x\| = \alpha|x_1| + \beta|x_2|$$

ile tanımlı $\|.\|$ fonksiyonu $\mathbb{C}^2$ üzerinde bir normdur.

$i)$ $\alpha, \beta > 0$ olduğundan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ için $\|x\| = \alpha|x_1| + \beta|x_2| \geq 0$ olur.

$ii)$ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ için

$$\begin{aligned} \|x\| = 0 &\Leftrightarrow \alpha|x_1| + \beta|x_2| = 0 \\ &\Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = 0, \qquad (\alpha, \beta > 0) \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

$iii)$ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$ ve $\eta \in \mathbb{C}$ için $\eta x = (\eta x_1,\ \eta x_2)$ dir. Dolayısıyla

$$\|\eta x\| = \alpha|\eta x_1| + \beta|\eta x_2| = \alpha|\eta||x_1| + \beta|\eta||x_2| = |\eta|\|x\|$$

dir.

$iv)$ $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{C}^2$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{C}^2$ olmak üzere $x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ dir. Buradan

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \alpha|x_1 + y_1| + \beta|x_2 + y_2| \\ &\leq \alpha|x_1| + \alpha|y_1| + \beta|x_2| + \beta|y_2| \\ &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

dır. $\|.\|$ fonksiyonu norm özelliklerini sağlar.

***Örnek* 2** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ için

$$\|\alpha\|_1 = \sum_{\ell=1}^{n} |\alpha_\ell| = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n|;$$

$\mathbb{F}^n$ vektör uzayı üzerinde bir normdur.

$i)$ Her $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ için

$$\|\alpha\|_1 = |\alpha_1| + |\alpha_2| + \cdots + |\alpha_n| \geq 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$$

dır.

$ii)$ $\alpha = 0 = (0,0, \dots ,0)$ ise

$$\|\alpha\|_1 = |0| + |0| + \dots + |0| = 0$$

olmak üzere ve tersine $\alpha \in X$ için $\|\alpha\|_1 = 0$ ise

$$\begin{aligned} |\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n| = 0 &\Leftrightarrow |\alpha_1| = |\alpha_2| = \dots = |\alpha_n| = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \\ &\Leftrightarrow \alpha = 0 \end{aligned}$$

dır.

$iii)$ Her $\beta \in \mathbb{F}$ ve $\alpha \in X$ için

$$\begin{aligned} \|\beta\alpha\|_1 &= |\beta\alpha_1| + |\beta\alpha_2| + \dots + |\beta\alpha_n| \\ &= |\beta||\alpha_1| + |\beta||\alpha_2| + \dots + |\beta||\alpha_n| \\ &= |\beta|(|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha_n|) \\ &= |\beta|\|\alpha\|_1 \end{aligned}$$

dır.

$iv)$ $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ ve $(\mathbb{C}, |\cdot|)$ içindeki üçgen eşitsizliğinden $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots, \beta_n) \in \mathbb{F}^n$ için

$$\begin{aligned} \|\alpha + \beta\|_1 &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j + \beta_j| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} (|\alpha_j| + |\beta_j|) \\ &= \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j| + \sum_{j=1}^{n} |\beta_j| \\ &= \|\alpha\|_1 + \|\beta\|_1 \end{aligned}$$

fonksiyonu üzerinde bir norm tanımlar.

Örnek 3 de yararlanacağımız teorem ve uyarıyı verelim.

4.1.1. Teorem ζ ve δ ölçülebilir fonksiyon olmak üzere aşağıdaki eşitsizlik sağlanır. (Burada integraller sonsuz değerini alabilir).

Minkowski eşitsizliği ($1 \leq q < \infty$ $için$):

$$\left(\int_x |\zeta + \delta|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leq \left(\int_x |\zeta|^q \, d\mu\right)^{1/q} + \left(\int_x |\delta|^q \, d\mu\right)^{1/q}$$

4.1.1. Uyarı $g \in C[\alpha,\beta]$ olmak üzere bu durumda

$$\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|dx = 0 \Leftrightarrow her\ x \in [\alpha,\beta]\ için\ g(x) = 0\ (yani\ g = 0)$$

dır.

***Örnek* 3** $1 \leq q < \infty$ için

$$\|g\|_q = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_q : C[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $C[\alpha,\beta]$ üzerinde bir normdur.

$i)$ Her $g \in C[\alpha,\beta]$ için $\|x\|_q \geq 0$;

$ii)$ Uyarı 4.1.1. den

$$\|g\|_q = 0 \Leftrightarrow g = 0$$

olduğunu görürüz.

$iii)$ $g \in C[\alpha,\beta]$ ve $\lambda \in \mathbb{F}$ için

$$\|\lambda g\|_q = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\lambda g(x)|^q dx\right)^{1/q} = |\lambda| \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

olur.

$iv)$ Minkowski eşitsizliğinden (Teorem 4.1.1.)

$$\|g + \delta\|_q = \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x) + \delta(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq \left(\int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|^q dx\right)^{1/q} + \left(\int_{\alpha}^{\beta} |\delta(x)|^q dx\right)^{1/q}$$

$$\leq \|g\|_q + \|\delta\|_q$$

dır. $\|\cdot\|_q : C[\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $C[\alpha,\beta]$ üzerinde bir normdur.

Her norm, norm aracılığıyla bir metrik üretir. Her metrik fonksiyonu bir normdan üretilemeyebilir. Ayrık metrik bir norm tarafından üretilemez.

***Örnek* 4** V bir F cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, V üzerindeki $\|.\| : V \to F$ biçimindeki bir norm her $\alpha \epsilon F$ ve $x \epsilon V$ için $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ homojenlik şartını sağlar. Böylece norm tarafından tanımlanmış

$$d: VxV \rightarrow F$$
$$d(x,y) = \|x-y\|$$

metriği

$$d(\alpha x, \alpha y) = \|\alpha x - \alpha y\| = |\alpha|\|x-y\| = |\alpha| d(x,y) \quad (4.1)$$

şartını sağlar. Fakat

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

ayrık metriği bir norm olamaz Gerçekten $\alpha = 2$ alınırsa

$$\delta(2x,2y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} \neq 2\begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases} = 2\delta(x,y)$$

olduğundan (4.1) şartının sağlanmadığı görülür.

4.1.5. Tanım $(X, \|x_1\|)$ normlu lineer uzayı üzerinde tanımlanan

$$d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+, \ d(x_1, y_1) = \|x_1 - y_1\|$$

fonksiyon bir metriktir ve bu metriğe $\|.\|$ normu tarafından üretilen **metrik** denir.

4.1.6. Tanım $(X, \|\cdot\|)$ tam bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı n_ε sayısı varsa (x_n) ye X de bir **Cauchy dizisi** denir.

4.1.1. Lemma $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay $x, y \in X$ için $d(x,y) = \|x-y\|$ ve $a \in K$ olsun. Bu durumda

$i)$ $\forall x, y, z \in X$ için $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ (d nin öteleme özelliği),

$ii)$ $d(ax, ay) = |a| d(x,y)$ (d nin mutlak homojenlik özelliği)

özellikleri doğrudur.

4.1.2. Lemma (X, d) bir metrik vektör uzayı, d metriği öteleme ve mutlak homojenlik özelliklerine sahip olsun. $x \in X$ için $\|x\| = d(x, \theta)$ olmak üzere (X, d) ve $(X, \|\cdot\|)$ uzaylarının topolojik yapıları aynıdır. (X, d) içinde her yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisi $(X, \|\cdot\|)$ içinde sırası ile yakınsak, sınırlı ve Cauchy dizisidir.

4.1.1. Önerme

$i)$ Normlu uzayda yakınsak bir dizi Cauchy dizisidir.

$ii)$ Normlu uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

$iii)$ Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) cauchy dizisi, $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisine sahip ise (x_n) dizisi de x e yakınsaktır.

$iv)$ Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında (x_n) ve (y_n) iki Cauchy dizisi ise $(x_n + y_n)$ dizisi de bir Cauchy dizisidir.

Özel olarak $X = \mathbb{R}$ $(veya\; X = \mathbb{C}$) olmak üzere $\|X\| = |X|$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{R}$ $veya$ $\mathbb{C}$ deki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Ancak bu özellik herhangi bir norm için geçerli değildir.

İspat.

$i)$ $(X, \|\cdot\|)$ tam bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun

$x_n \longrightarrow x$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için, $n > N$ ve

$$d(x_n, x) < \varepsilon/2$$

olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ sayısı vardır. Buna göre üçgen eşitsizliğinden $m, n > N$ için

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, x) + d(x, x_n) < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

elde edilir. Buradan x_n dizisi bir cauchy dizisidir. Lemma 4.1.2 den önermenin doğruluğu görülür.

$ii)$ Lemma 4.1.2 den açıktır.

$iii)$ $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ tanımı ile (X, d) nin bir metrik vektör uzayı olduğunu biliyoruz. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir (x_n) Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisine sahip olsun. O halde Lemma 4.1.2 den dolayı (x_n), (X, d) uzayında bir Cauchy dizisidir ve

$$\lim_{k\to\infty} d\left(x_{n_k}, x\right) = \lim_{k\to\infty} \left\|x_{n_k} - x\right\| = 0$$

dır. Demek ki (x_n), (X, d) metrik uzayında bir $x \in X$ noktasına yakınsayan bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisine sahip olan bir Cauchy dizisidir. Bir (X, d) metrik uzayında bir (x_n)

Cauchy dizisi $x \in X$ noktasına yakınsak bir (x_{n_k}) altdizisine sahip ise (x_n) dizisinin kendisi de x e yakınsaktır. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x) = 0$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$$

dır.

$iv)$ (x_n) ve (y_n), $(X, \|\cdot\|)$ içinde iki Cauchy dizisi olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \in$ N vardır öyle ki $\forall n, m > n_\varepsilon$ için $\|x_n - x_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve $\|y_n - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$ olur. $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = \|x - y\|$ biçiminde tanımlanan d metriği öteleme özelliğine sahip olduğundan Lemma 4.1.1 den $\forall n, m > n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned} d(x_n + y_n, x_m + y_m) &\leq d(x_n + y_n, x_m + y_n) + d(x_m + y_n, x_m + y_m) \\ &= d(x_n, x_m) + d(y_n, y_m) \\ &= \|x_n - x_m\| + \|y_n - y_m\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Buradan $(x_n + y_n)$ dizisinin (X, d) uzayında bir Cauchy dizisi olduğu görülür. O halde Lemma 4.1.2 den dolayı $(x_n + y_n)$ dizisi $(X, \|\cdot\|)$ uzayında bir Cauchy dizisidir.

4.1.7. Tanım X normlu lineer uzayında $d(x, y) = \|x - y\|$ metriğine göre verilen her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına **tam lineer uzay** adı verilir.

4.1.8. Tanım x_i ve y_i, $(i = 1,2, \dots, n)$ reel ya da kompleks sayılar ve $1 < p < \infty$ olsun. p ve q sayıları için $(1/p) + (1/q) = 1$ şartı sağlansın.

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^q\right)^{1/q}$$

eşitsizliğine **Hölder Eşitsizliği** adı verilir. $(1/p) + (1/q) = 1$ eşitliğinde $p = 2$ yazılırsa $q = 2$ olur. Bu durumda Hölder eşitsizliği

$$\left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2\right)^{1/2}$$

şeklinde yazılır ve **Cauchy-Schwarz** eşitsizliği adı verilir.

4.1.3. Lemma $(X, \|\cdot\|)$ normlu bir uzay olsun. Bu durumda $x, y, x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ için

$i)$ $|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$

$ii)$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

eşitsizlikleri sağlanır.

İspat.

$i)$

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$$
$$\Longrightarrow \|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$$

ve

$$\|y\| = \|y - x + x\| \leq \|y - x\| + \|x\|$$
$$\Longrightarrow \|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$$

dır.

$$\|y - x\| = \|-(x - y)\| = |-1|\|x - y\| = \|x - y\|$$

olduğuna dikkat edilirse son iki eşitsizlikten (i) nin doğruluğu görülür.

$ii)$

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

doğruluğu normlu uzaylarda her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ aksiyomundan yararlanılıp tümevarım yöntemiyle ispatlanır.

$$\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$$

$n = 2$ için

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

doğruluğu şu şekilde gösterilir:

$$\|x_1 + x_2\|^2 = (x_1 + x_2,\ x_1 + x_2) = (x_1, x_1) + (x_1, x_2) + (x_2, x_1) + (x_2, x_2)$$

$$= \|x_1\|^2 + (x_1, x_2) + \overline{(x_1, x_2)} + \|x_2\|^2$$

$$= \|x_1\|^2 + 2Re\ (x_1, x_2) + \|x_2\|^2$$

daima

$$\leq \|x_1\|^2 + 2\ |(x_1, x_2)| + \|x_2\|^2$$

dır.

Hölder eşitsizliği

$$\leq \|x_1\|^2 + 2\ \|x_1\|\|x_2\| + \|x_2\|^2 = (\|x_1\| + \|x_2\|)^2$$

karekök alınırsa

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\|$$

elde edilir.

$n = m - 1$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{m-1} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{m-1} \|x_k\|$$

doğru olsun.

$n = m$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} x_k\right\| = \left\|\sum_{k=1}^{m-1} x_k + x_m\right\| = \|y + x_m\|\ , \qquad \left(\sum_{k=1}^{m-1} x_k = y\right)$$

yukarıdaki $n = 2$ için yapılan ispat da $\|y + x_m\| \leq \|y\| + \|x_m\|$ olduğu gösterildi.

$n = m - 1$ için

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} x_k\right\| \leq \left\|\sum_{k=1}^{m-1} x_k\right\| + \|x_m\| = \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|$$

kabul olduğundan

$$\left\|\sum_{k=1}^{m} x_k\right\| \leq \sum_{k=1}^{m} \|x_k\|$$

elde edilir.

4.2. Banach Uzayları

Banach uzayları fonksiyonel analizde incelenen temel analiz yapılardan biridir. Fonksiyonel analizde araştırılan sonsuz boyutlu fonksiyon uzaylarının önemli bir kısmı Banach uzayı örnekleridir.

4.2.1. Tanım $(X, \|.\|)$ bir normlu lineer uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya **normlu tam uzay** veya **Banach uzayı** denir.

4.2.2. Tanım X bir K cismi üzerinde bir lineer vektör uzayı ve τ da X kümesi üzerinde bir topoloji olsun.

Eğer her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in K$ için

$$\oplus : X \times X \to X,$$
$$(x,y) \to x \oplus y$$
$$\odot : K \, x \, X \to X$$
$$(\lambda, x) \to \lambda \odot x$$

şeklinde tanımlanan vektörel toplama ve skalerle çarpma işlemleri τ topolojisine göre sürekli ise (X, τ, K) uzayına bir topolojik vektör uzayı denir.

4.2.1. Teorem Her normlu uzay bir topolojik vektör uzayıdır [Şuhubi, 2001].

Bir vektör uzayı ve üzerinde bir metrik tanımlandığında önemli metrik uzaylar elde edilmektedir. Elde edilen uzay bir normlu uzaydır. Norm vektör uzayı üzerinde bir topoloji oluşturduğundan, Banach uzayı bir topolojik vektör uzayı örneğini verir [Çakar, 2007].

***Örnek* 1** $x = \{x_m\} \in \ell_q$ ve $1 \leq q < \infty$ olmak üzere

$$\|x\|_q = \left(\sum_{m=1}^{\infty} |x_m|^q \right)^{1/q}$$

şeklinde tanımlı norma göre ℓ_q bir Banach uzayıdır.

$1 \leq q < \infty$ ve $\{x_m\}$, ℓ_q uzayı içinde bir Cauchy dizisi olsun. $\forall j$ için

$$|x_m(j) - x_k(j)|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_m(j) - x_k(j)|^q,$$

$$|x_m(j) - x_k(j)| \leq \|x_m - x_k\|_q$$

olur. Böylece $j = 1,2, \dots$ için $\{x_m(j)\}$ skalerleri bir Cauchy dizisidir. Dolayısıyla $x(j) = \lim_{m \to \infty} x_m(j)$, $\mathbb{F}$ içindedir. $m, k \geq m_0$ için

$$\|x_m - x_k\|_q < \varepsilon$$

olsun. Dolayısıyla $\forall N \geq 1$ için ve $m, k \geq m_0$ için

$$\sum_{j=1}^{N} |x_m(j) - x_k(j)|^q \leq \sum_{j=1}^{\infty} |x_m(j) - x_k(j)|^q < \varepsilon^q$$

dır. $m,$ N yi sabit tutarak ve $k \to \infty$ limitini alarak $m \geq m_0$ ve $N \geq 1$ için

$$\sum_{j=1}^{N} |x_m(j) - x(j)|^q \leq \varepsilon^q$$

elde edilir. m sabit ve $N \to \infty$ limiti alınmak üzere $m \geq m_0$ için

$$\sum_{j=1}^{\infty} |x_m(j) - x(j)|^q \leq \varepsilon^q \tag{4.2}$$

dır. Dolayısıyla (4.2) den $x_m - x \in \ell_q$ ve buradan $x = x_m - (x_m - x) \in \ell_q$ olur. Ayrıca yine (4.2) den $m \geq m_0$ olmak üzere

$$\|x_m - x\|_q < \varepsilon$$

dır. ℓ_q içinde $x_m \to x$ dır. Sonuç olarak ℓ_q tamdır.

***Örnek* 2** $K = R$ veya $K = C$ ve $r \geq 0$ bir tam sayı olmak üzere $C^r([\alpha, \beta]; K)$ vektör uzayı

$$\|f\|_{C^{(r)}[\alpha,\beta]} = \sum_{j=0}^{r} \left\|f^{(j)}\right\|_{C[\alpha,\beta]}, \qquad (f^{(0)}(t) = f(t))$$

normuna göre bir Banach uzayıdır. Gerçekten (f_n), $C^{(r)}[\alpha, \beta]$ uzayında bir Cauchy dizisi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_\varepsilon \epsilon N$ $\ni$ $\forall m, n > n_\varepsilon$ için

$$\|f_n - f_m\|_{C^{(r)}[\alpha,\beta]} < \varepsilon$$

ve buradan $\forall_j = 0,1,2, \dots, r$ olmak üzere

$$\left\|f_n^{(j)} - f_m^{(j)}\right\|_{C[\alpha,\beta]} < \varepsilon \quad (\forall_{n,m} > n_\varepsilon)$$

yazabiliriz. Dolayısıyla $r+1$ sayıda $(f_n(t)), (f_n^{(1)}(t)), \dots, (f_n^{(r)}(t))$ fonksiyon dizileri $C([\alpha,\beta];\ K)$ uzayında birer Cauchy dizileridir. $C([\alpha,\beta];\ K)$ vektör uzayı tam olduğundan $(f_n(t))$ dizisi $[\alpha,\beta]$ üzerinde bir $f(t) \in C([\alpha,\beta];K)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar. $(f_n^{(1)}(t)), \dots, (f_n^{(r)}(t))$ dizileri $[\alpha,\beta]$ üzerinde düzgün yakınsadığından, $f(t)$ limit fonksiyonu $[\alpha,\beta]$ üzerinde r. merteden sürekli türevlenebilir ve $\forall_j = 0,1,\dots,r$ için $(f_n^{(j)}(t))$ dizisi $n \to \infty$ iken $f^j(t)$ fonksiyonuna $[\alpha,\beta]$ üzerinde düzgün yakınsar. Her $j = 0,1,\dots,r$ için

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C^{(r)}[\alpha,\beta]} = 0$$

olup, $C^{(r)}([\alpha,\beta];K)$ tamdır.

4.2.3. Tanım V, F skaler cismi üzerinde vektör uzayı olsun. Bir

$$K : V \to F$$

fonksiyonu her $\alpha,\beta \in F$ ve $x,y \in V$ için

$$K(\alpha x + \beta y) = \alpha K(x) + \beta K(y)$$

özelliğini sağlarsa K ya bir **lineer fonksiyonel** denir.

4.2.4. Tanım K bir vektör uzayı olsun. $q : K \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlarsa q ya K üzerinde bir **altlineer fonksiyonel** denir.

$i)$ $\forall\alpha > 0$ ve her $\eta \in K$ için $q(\alpha\eta) = \alpha q(\eta)$;

$ii)$ $\forall\eta,\mu \in K$ için $q(\eta+\mu) \le q(\eta) + q(\mu)$.

Her norm, bir altlineer fonksiyoneldir. Bir reel vektör uzayı üzerindeki her lineer fonksiyonel bir altlineer fonksiyoneldir.

4.2.5. Tanım $\mathcal{H}$, $\mathbb{F}$ üzerinde bir normlu vektör uzayı olsun. $B(\mathcal{H},\mathbb{F})$ uzayına $\mathcal{H}$ nin **dual uzayı** adı verilir ve $\mathcal{H}'$ ile gösterilir.

4.2.2. Teorem δ bir reel vektör uzayı ve q, δ üzerinde bir altlineer fonksiyonel olarak verilsin. β, δ nın bir altuzayı ve g_0, β üzerinde $\forall y \in$ β için $g_0(y) \le q(y)$ yi sağlayan bir lineer fonksiyonel olsun. O zaman δ nın tamamı üzerinde bir lineer g fonksiyoneli vardır öyle ki g nin β ya kısıtlanışı g_0 dır ve $\forall x \in \delta$ için $g(x) \le q(x)$

dir. Yani g_0 lineer fonksiyoneli δ üzerinde lineer bir fonksiyonele genişletilebilir ve bu genişleme yine q ile sınırlıdır [Soykan, 2012].

Hahn – Banach teoremi, lineer fonksiyonellerde bir genişletme teoremi niteliğindedir. Sınırlı lineer operatörlerle ilişkili en önemli teoremlerden biridir.

4.2.3. Teorem (Hahn – Banach Teoremi) $\mathcal{H}$ bir normlu vektör uzayı ve Y, $\mathcal{H}$ nin bir alt uzayı olsun. g_0, Y üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. Bu durumda, $\|g\| = \|g_0\|$ ve Y ye kısıtlanışı g_0 olacak şekilde $\mathcal{H}$ nin tamamı üzerinde sınırlı lineer bir g fonksiyoneli vardır. Yani her $x \in Y$ için $g(x) = g_0(x)$ ve $\|g\| = \|g_0\|$ olacak şekilde bir $g \in B(\mathcal{H}, \mathbb{F}) = \mathcal{H}'$ vardır [Soykan, 2012, s.192].

İspat. g_0 fonksiyonelinin, g_0 ile aynı norma sahip olacak şekilde $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı lineer bir fonksiyonele genişletilebileceğini göstereceğiz. Bunu önce bir reel normlu uzay için gösterecek ve bunun yardımıyla bir kompleks normlu uzay için ispatlayacağız.

$\mathcal{H}$ bir reel normlu uzay olsun. $\forall x \in \mathcal{H}$ için $p(x) = \|g_0\|\|x\|$ olsun. O zaman p, $\mathcal{H}$ üzerinde altlineer bir fonksiyoneldir ve $\forall y \in Y$ için $g_0(y) \leq p(y)$ dir. Teorem 4.2.2. den $\mathcal{H}$ üzerinde lineer bir g fonksiyoneli vardır öyleki g nin Y ye kısıtlanışı g_0 dır ve her $x \in \mathcal{H}$ için $g(x) \leq \|g_0\| \, \|x\|$ dir. Aslında her $x \in \mathcal{H}$ için

$$-g(x) = g(-x) \leq \|g_0\|\|-x\| = \|g_0\|\|x\|$$

olduğundan $|g(x)| \leq \|g_0\|\|x\|$ elde edilir. Böylece g sınırlıdır ve $\|g\| \leq \|g_0\|$ dır.

$\|g\| = sup\{\, |g(x)| : \, x \in \mathcal{H}, \|x\| \ \leq 1\} \geq sup\{\, |g(y)| : y \in Y, \ \|y\| \ \leq 1\} = \|g_0\|$ olduğundan $\|g\| \geq \|g_0\|$ elde edilir. Böylece $\|g\| = \|g_0\|$ bulunur yani; g_0 ve g lineer fonksiyonelleri aynı norma sahiptir.

Şimdi $\mathcal{H}$ nin bir kompleks normlu uzay olduğun kabul edelim. u_0, g_0 ın reel kısmı olsun. Hemen üstte reel normlu uzaylar için verilen argümanla, $\mathcal{H}$ üzerinde sınırlı reel lineer bir u fonksiyoneli vardır öyle ki u nın Y ‘ye kısıtlanışı u_0 dır. (yani her $y \in Y$ için $u(y) = u_0(y)$ dır) ve $\|u\| = \|u_0\|$ dır. Reel parçası u olan $\mathcal{H}$ üzerinde tek bir biçimde tanımlı olan kompleks lineer fonksiyonel g olsun. O zaman g nin Y ye kısıtlanışı g_0 olan Y üzerindeki tek bir biçimde tanımlı olan kompleks lineer fonksiyoneldir. Son olarak, u nun sınırlılığı g nin sınırlılığını verir ve $\|g\| = \|u\| = \|u_0\| = \|g_0\|$ elde edilir.

Banach uzayı ile ilgili çok önemli sonuçlar ve uygulamalar söz konusudur. Örneğin *X bir* kompleks Banach uzayı ve *Y* de *X* in reel bir alt uzayı olduğunda genel olarak Hahn - Banach teoremi sağlanmaktadır [Musayev, 2000].

4.2.4. Teorem X ve Y herhangi iki Banach uzayı ve $A : D(A) \to Y$ $(D(A) \subset X)$ sınırlı lineer bir operatör olmak üzere A operatörünün kapalı olması için gerekli ve yeterli şart $D(A)$ nın kapalı olmasıdır.

4.3. İç Çarpım Uzayları

4.3.1. Tanım $M = R$ (veya $\mathbb{C}$) olmak üzere X bir vektör uzayı olsun. $(.,.) : X \times X \to M$ dönüşümü aşağıdaki özelliklere sahip ise bu dönüşüm X üzerinde bir iç çarpım, $(X, (.,.))$ ikilisine de **iç çarpım uzayı** denir.

$i)$ $\forall a \in X$ için $(a, a) \geq 0$ ve $(a, a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

$ii)$ $\forall a, b \in X$ için $(a, b) = \overline{(b, a)}$,

$iii)$ $\forall a, b \in X$ ve $t \in M$ için $(ta, b) = t(a, b)$,

$iv)$ $\forall a, b, c \in X$ için $(a + b, c) = (a, c) + (b, c)$.

$M = R$ halinde $(a, b) = (b, a)$. (i) ve (iv) ifadelerinden $\forall a, b, c \in X$ ve $\forall t, n \in M$ için

$a)$ $(ta + nb, c) = t(a, c) + n(b, c)$,

$b)$ $(a, tb) = \bar{t}(a, b) = t(a, b)$,

$c)$ $(a, tb + nc) = \bar{t}(a, b) + \bar{n}(a, c)$

eşitliklerinin geçerli olduğu kolayca gösterilebilir. Burada " – " kompleks eşleniği ifade etmektedir.

***Örnek* 1** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$(\alpha, \beta) = 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2)$$

bir iç çarpım tanımlar. Gerçekten iç çarpım aksiyomları kontrol edilmek üzere:

$i)$ $(\alpha, \alpha) = 2(\alpha_1^2 + \alpha_2^2) \geq 0$ olduğu görülür.

$ii)$ $(0,0) = 0$ dır ve eğer $(\alpha, \alpha) = 0$ ise o zaman $a_1 = a_2 = 0$ ve böylece $a = 0$ olur.

$iii)$ $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$, $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, $\delta = (\delta_1, \delta_2)$, $t \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
(\alpha + \beta, \delta) &= 2\big((\alpha_1 + \beta_1)\, \delta_1 + (\alpha_2 + \beta_2)\, \delta_2\big) \\
&= 2(\alpha_1\, \delta_1 + \alpha_2\, \delta_2 + \beta_1\, \delta_1 + \beta_2\, \delta_2) \\
&= (\alpha, \delta) + (\beta, \delta)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(t\alpha, \beta) &= 2(t\alpha_1\beta_1 + t\alpha_2\beta_2) \\
&= t2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) \\
&= t(\alpha, \beta).
\end{aligned}
$$

veya direkt olarak $t, r \in \mathbb{R}$ için

$$t\alpha + r\beta = (t\alpha_1 + r\beta_1, t\alpha_2 + r\beta_2)$$

ve

$$
\begin{aligned}
(t\alpha + r\beta, \delta) &= \big((t\alpha_1 + r\beta_1, t\alpha_2 + r\beta_2), (\delta_1, \delta_2)\big) \\
&= 2\big((t\alpha_1 + r\beta_1)\, \delta_1 + (t\alpha_2 + r\beta_2)\, \delta_2\big) \\
&= t(2(\alpha_1\, \delta_1 + \alpha_2\, \delta_2)) + r(2(\beta_1\, \delta_1 + \beta_2\, \delta_2)) \\
&= t\big((\alpha_1, \alpha_2), (\delta_1, \delta_2)\big) + r\big((\beta_1, \beta_2), (\delta_1, \delta_2)\big) \\
&= t(\alpha, \delta) + r(\beta, \delta)
\end{aligned}
$$

bulunur.

$iv)$ $(\alpha, \beta) = 2(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) = 2(\beta_1\alpha_1 + \beta_2\alpha_2) = (\beta, \alpha)$

olur ve $\mathbb{R}^2$ üzerinde bir iç çarpım tanımlar.

***Örnek* 2** $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$ ve $\beta = (\beta_1, \beta_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere $\mathbb{R}^2$ üzerinde

$$(\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$$

bir iç çarpım tanımlar.

$i)$ $(\alpha, \alpha) = \alpha_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 \geq 0$

$ii)$ $(0,0) = 0$ dır ve eğer $(\alpha, \alpha) = 0$ ise o zaman bu durumda

$$\alpha_1^2 + (\alpha_1 + \alpha_2)^2 = 0$$

ve buradan $\alpha_1 = \alpha_1 + \alpha_2 = 0$ yani $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ve böylece $\alpha = 0$ olduğu görülür.

$iii)$ $(\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$ ile tanımlıdır.

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2), \quad \beta = (\beta_1, \beta_2), \quad \delta = (\delta_1, \delta_2), \quad t, r \in \mathbb{R}$$

olmak üzere

$$t\alpha + r\beta = (t\alpha_1 + r\beta_1, t\alpha_2 + r\beta_2)$$

ve

$$\begin{aligned}(t\alpha + r\beta, \delta) &= \big((t\alpha_1 + r\beta_1, t\alpha_2 + r\beta_2), (\delta_1, \delta_2)\big)\\
&= (t\alpha_1 + r\beta_1)\delta_1 + \big((t\alpha_1 + r\beta_1) + (t\alpha_2 + r\beta_2)\big)(\delta_1 + \delta_2)\\
&= t\alpha_1\delta_1 + t\big((\alpha_1 + \alpha_2)(\delta_1 + \delta_2)\big) + r\beta_1\delta_1 + r\big((\beta_1 + \beta_2)(\delta_1 + \delta_2)\big)\\
&= t\big((\alpha_1, \alpha_2), (\delta_1, \delta_2)\big) + r\big((\beta_1, \beta_2), (\delta_1, \delta_2)\big)\\
&= t(\alpha, \delta) + r(\beta, \delta)\end{aligned}$$

bulunur.

$iv)$ $\quad (\alpha, \beta) = \alpha_1\beta_1 + (\alpha_1 + \alpha_2)(\beta_1 + \beta_2)$

$$= \beta_1\alpha_1 + (\beta_1 + \beta_2)(\alpha_1 + \alpha_2) = (\beta, \alpha).$$

4.3.1. Teorem

Bir $(X, \|.\|)$ normlu uzayda $\|.\|$ normunun bir iç çarpım belirtebilmesi için gerekli ve yeterli şart her $\zeta, \eta \in X$ için;

$\|\zeta + \eta\|^2 + \|\zeta - \eta\|^2 = 2(\|\zeta\|^2 + \|\eta\|^2)$ (Paralel kenar kanunu)

olmasıdır.

İspat. $(\Longrightarrow)$ açıktır.

$(\Longleftarrow)$ $(\zeta, \eta) \coloneqq \frac{1}{4}(\|\zeta + \eta\|^2 - \|\zeta - \eta\|^2)$ dır. (ζ, η) bir iç çarpım belirtir ve $(\zeta, \zeta) = \|\zeta\|^2$ olur [Kolmogorov, 1957].

Not: Teorem 4.3.1. den diyebiliriz ki, eğer bir norm paralel kenar kanunu sağlamıyorsa bu norm iç çarpım normu değildir. Buradan, her normlu uzay bir Öklid uzayı (iç çarpım uzayı) değildir sonucu çıkar.

4.3.1. Önerme $\big(X, (.\,,.)\big)$ bir iç çarpım uzayı üzerindeki $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ normu her $x, y \in X$ için

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{4.3}$$

$$(x, y) = \frac{1}{4}\{\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 + i\|x + iy\|^2 - i\|x - iy\|^2\} \tag{4.4}$$

eşitlikleri geçerlidir.

***Örnek* 3** $1 \leq q < \infty$ ve $q \neq 2$ olmak üzere $(R^n, \|\cdot\|_q)$ normlu uzayı iç çarpım uzayı değildir. Gerçekten

$$a = (1,1,0,0, \dots ,0), \qquad b = (1,-1,0,0, \dots ,0) \in R^n$$

Vektörleri için

$$a + b = (2,0,0,0 \dots ,0), \qquad a - b = (0,2,0,0, \dots ,0),$$

$$\|a\|_q = \|b\|_q = 2^{1/q}, \qquad \|a + b\|_q = \|a - b\|_q = 2$$

olduğundan bu vektörler için (4.3) eşitliği sağlanmaz. O halde Teorem 4.3.1'e göre $1 \leq q < \infty$ ve $q \neq 2$ durumunda $(R^n, \|\cdot\|_q)$ normlu uzayı bir iç çarpım uzayı değildir.

4.4. Hilbert Uzayları

4.4.1. Tanım Bir $\big(X, (.,.)\big)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = (x, x)^{1/2}$ normuna göre tam ise, yani $\big(X, (.,.)\big)$ içinde bulunan her Cauchy dizisi yakınsak ise, bu iç çarpım uzayına Hilbert uzayı denir [Naimark, 1968].

Verilen bir iç çarpım uzayı iç çarpımın indirgediği metriğe göre bir tam metrik uzaydır. Hilbert uzayı; sayılabilir sayıda, ortonormal sistemin bulunduğu tam iç çarpım uzayı olarak da ifade edilir.

4.4.2. Tanım Bir X iç çarpım uzayının, μ ve ζ gibi iki elemanı verildiğinde

$$(\mu, \zeta) = 0$$

ise μ elemanı ζ elemanına diktir denir.

***Örnek* 1** $\mathbb{R}^n$ Uzayı, $\mu = (\mu_j) = (\mu_1, \dots, \mu_n)$ ve $\zeta = (\zeta_j) = (\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ olmak üzere,

$$(\mu, \zeta) = \mu_1\zeta_1 + \cdots + \mu_n\zeta_n \tag{4.5}$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre, bir Hilbert uzayıdır. Gerçekten (4.5) eşitliğinden

$$\|\mu\| = (\mu, \mu)^{1/2} = (\mu_1^2 + \cdots + \mu_n^2)^{1/2}$$

ve buradan da,

$$d(\mu,\zeta) = \|\mu-\zeta\| = (\mu-\zeta,\mu-\zeta)^{1/2} = [(\mu_1-\zeta_1)^2+\cdots+(\mu_n-\zeta_n)^2]^{1/2}$$

ile tanımlanan Euclid metriğini elde ederiz. Bu metriğe göre, $\mathbb{R}^n$ uzayı tamdır.

$n = 3$ olması halinde, (4.5) formülü $\mu = (\mu_1,\mu_2,\mu_3)$ ve $\zeta = (\zeta_1,\zeta_2,\zeta_3)$ nın bilinen

$$(\mu,\zeta) = \mu.\zeta = \mu_1\zeta_1+\mu_2\zeta_2+\mu_3\zeta_3$$

skaler çarpımını verir ve

$$(\mu,\zeta) = \mu.\zeta = 0$$

dikliği, elemanter diklik kavramıyla uyuşur.

***Örnek* 2** $\mathbb{F}$ skalerler cismi üzerinde l_2 uzayında bir x vektörünün normu

$$\| x \|_2 = \left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^2\right)^{1/2} < \infty$$

şeklinde verilmektedir. Bu normun paralelkenar kuralını sağladığı kolayca görülür. Buradan

$$(x,y) = \frac{1}{4}[\| x+y \|^2 - \| x-y \|^2 + i \| x+iy \|^2 - i \| x-iy \|^2]$$

ile iç çarpım

$$(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\bar{y}_i$$

şeklinde belirlenir. Her $x,y \in l_2$ için Schwarz eşitsizliği nedeniyle $|(x,y)| \leq \|x\|_2\|y\|_2 < \infty$ olur. l_2 bir Banach uzayı olduğuna göre bu iç çarpımla donatıldığında bir Hilbert uzayına dönüşür [Şuhubi, 2001, s. 464].

4.4.1. Teorem H bir iç çarpım uzayı olsun. Her $\delta \in H$ vektörü için $\| \delta \| = \sqrt{(\delta,\delta)}$ fonksiyonu H üzerinde bir doğal normdur.

İspat.

Her δ vektörü için $\| \delta \| \geq 0$ ve $\| \delta \| = 0 \Leftrightarrow \delta = 0$ olduğu tanımdan hemen görülür. $\alpha \in \mathbb{C}$ alırsak $\| \alpha\delta \| = \sqrt{(\alpha\delta, \alpha\delta)} = \sqrt{|\alpha|^2(\delta,\delta)} = |\alpha| \, \| \delta \|$ çıkar.

$$\| \delta + \eta \|^2 = (\delta + \eta, \delta + \eta) = (\delta,\delta) + (\delta,\eta) + \overline{(\delta,\eta)} + (\eta,\eta)$$

$$= \| \delta \|^2 + \| \eta \|^2 + 2\Re\,(\delta,\eta)$$

yazabiliriz. $\Re\,(\delta,\eta) \leq |\Re\,(\delta,\eta)| \leq |(\delta,\eta)|$ olduğu için Schwarz eşitsizliğine göre de $\Re\,(\delta,\eta) \leq \| \delta \| \| \eta \|$ bulunur. Dolayısıyla

$$\| \delta + \eta \|^2 \leq \| \delta \|^2 + \| \eta \|^2 + 2 \| \delta \| \| \eta \| = (\| \delta \| + \| \eta \|)^2$$

veya

$$\| \delta + \eta \| \leq \| \delta \| + \| \eta \|$$

üçgen eşitsizliği elde edilir [Şuhubi, 2001].

***Örnek* 3** *Bir X* ölçüm uzayı üzerinde $L_2(X)$ Lebesgue uzayında bir $\delta \in L_2(X)$ vektörünün normu $\| \delta \|_2 = (\int_x |\delta(x)|^2 \, d\mu)^{1/2} < \infty$ ile tanımlanır ve bu uzay tamdır. $\delta, \eta \in L_2(X)$ için

$$\| \delta \mp \eta \|_2^2 = \int_x \left[|\delta(x)|^2 + |\eta(x)|^2 \mp \left[\delta(x)\overline{\eta(x)} + \overline{\delta(x)}\eta(x) \right] \right] d\mu$$

yazabildiğimizden $L_2(X)$ uzayına ait normun paralelkenar kuralını sağladığı hemen görülür. Ayrıca

$$i \, \| \delta \mp i\eta \|_2^2 = \int_x \left[i|\delta(x)|^2 + i|\eta(x)|^2 \mp \left[\delta(x)\overline{\eta(x)} - \overline{\delta(x)}\eta(x) \right] \right] d\mu$$

olduğundan

$$(\delta,\eta) = \frac{1}{4}\left[\| \delta + \eta \|^2 - \| \delta - \eta \|^2 + i \, \| \delta + i\eta \|^2 - i \, \| \delta - i\eta \|^2 \right]$$

bağıntısı iç çarpımı

$$(\delta, \eta) = \int_x \delta(x)\overline{\eta(x)}d\mu$$

şeklinde belirler. $|(\delta, \eta)| \leq \| \delta \|_2 \| \eta \|_2 < \infty$ olduğu Hölder, ya da Schwarz eşitsizliğinden çıkar. Doğal olarak reel değerli fonksiyonlar göz önüne alındığında kompleks eşlenik söz konusu olmaz. $L_2(X)$ uzayının bir Hilbert uzayı olduğu açıktır. $L_p(X),\ p \neq 2$ uzaylarının normu paralelkenar kuralını sağlamadığından dolayı bu uzaylar $\|.\|_p$ normunu bir doğal norm kabul edebilen bir iç çarpımla donatılamaz [Şuhubi, 2001, s. 464].

İç çarpım ve Hilbert uzayları teorisinin, genel normlu uzaylar ve Banach uzayları teorisinden daha zengin olduğunu belirtebiliriz [Çakar, 2007].

Hilbert uzaylarının en önemli özelliklerinden birisi, bu uzaya ait herhangi bir eleman, sayılabilir sayıdaki ortonormal fonksiyonların ağırlıklı bir toplamı olarak yazılabilir. Hilbert uzayı sonsuz boyutlu ve sayılabilir bir uzaydır [Ramsay, 1982].

Örnek 4

$$(.,.) :\ l_2 \times l_2 \to K,\ \ (\mu, \xi) \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k \overline{\xi_k}$$

dönüşümü $l_2(\mathbb{C})$ üzerinde bir iç çarpımdır ve bu iç çarpıma göre $l_2(\mathbb{C})$ bir Hilbert uzayı belirtir.

Bir iç çarpım uzayı, üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış bir X vektör uzayı belirtir. Bir Hilbert uzayı ise, üzerindeki iç çarpımla tanımlanmış metriğe göre, tam olan bir iç çarpım uzayıdır. Dolayısıyla burada sözü edilen iç çarpım, $\mathrm{X} \times \mathrm{X}$ den X in bir $\Bbbk$ skaler cismi içine yapılan bir dönüşümdür. Yani X in her a ve b vektör çifti için a ve b nin vektörel çarpımı olarak adlandırılan, (a, b) ile gösterilen ve her a, b ve c vektörleri ve de m skaleri için aşağıdaki özellikleri gerçekleyen skalerle eşlenmektedir:

$i)\ (a+b,c) = (a,c) + (b,c)$

$ii)\ (ma,b) = m(a,b)$

$iii)\ (a,b) = \overline{(b,a)}$

$iv)\ (a,a) \geq 0$

$(a,a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$

İç çarpım uzayları birer normlu uzay ve Hilbert uzayları ise birer Banach uzayı belirtir.

4.4.3. Tanım X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subseteq X$ olsun. D deki her bir elemana Y de bir tek eleman karşılık getiren kurala D den Y ye bir **dönüşüm** denir. X ve Y den en az biri vektör uzayı ise bu dönüşüme genellikle operatör denir. Eğer A, D den Y ye bir operatör ise

$$A: D \subseteq X \longrightarrow Y$$

yazılır.

4.4.4. Tanım H Hilbert uzayının $D \subseteq H$ lineer alt uzayı ve bir $A : D \subseteq H \rightarrow H$ dönüşümü verilsin. Eğer her $a_1, a_2 \in \mathbb{C}$ ve her $x_1, x_2 \in D$ için

$$A(a_1x_1 + a_2x_2) = a_1Ax_1 + a_2Ax_2$$

eşitliği sağlanıyorsa A dönüşümü lineer operatör ve D ye ise A operatörünün **tanım bölgesi (kümesi)** denir ve $D(A)$ ile gösterilir. A operatörünün **değer kümesi** de $Im(A)$ veya $R(A)$ sembolleriyle ifade edilir [Naimark, 1968].

4.4.5. Tanım H Hilbert uzayını belirtmek üzere, $A: D(A) \rightarrow H$ lineer bir operatör ve $\overline{D(A)} = H$ olmak üzere her $f, g \in D(A)$ için,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği geçerli olursa A operatörüne **simetrik operatör** denir.

4.4.6. Tanım H Hilbert uzayında tanım kümesi $D(A)$ olmak üzere bir A lineer operatörü için $f, g \in D(A)$ olmak üzere,

$$(Af, g) = (f, Ag)$$

eşitliği geçerli olursa A operatörüne **Hermityen operatör** denir.

4.4.7. Tanım H Hilbert uzayı olmak üzere bu uzayda dönüşüm yapan L lineer operatörü için L nin tanım kümesi $D(L)$, H uzayında yoğun olmak üzere $\eta \in D(L)$ için,

$$(L\eta, g) = (\eta, L^* g)$$

eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L nin **adjoint (eşlenik) operatörü** denir. Bu eşitliği sağlayan $\eta \in H$ vektörler kümesine L^* $\imath n$ tanım kümesi denir ve $D(L^*)$ ile gösterilir [Naimark, 1968].

4.4.8. Tanım Eğer $L = L^*$ olmak üzere L operatörüne **self adjoint (kendine eş) operatör** denir [Kreyszing, 1989].

4.4.9. Tanım H Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan L lineer operatörünün tanım bölgesi $D(L)$ olmak üzere, $Lg = \lambda g$ eşitliğini sağlayan $g \neq 0$, $g \in D(L)$ vektörü varsa λ sayısına L **operatörünün öz değeri** ve g vektörüne de **öz vektörü** denir [Kostyuchenko ve Sargsyan, 1979].

4.4.2. Teorem $\mathrm{C}[\mathrm{a}, \mathrm{b}]$ uzayı, bir iç çarpım uzayı değildir, sonuç olarak bir Hilbert uzayı da değildir.

İspat.

$$\|\zeta + \eta\|^2 + \|\zeta - \eta\|^2 = 2(\|\zeta\|^2 + \|\eta\|^2)$$

paralelkenar eşitliğini sağlamaması nedeniyle, $\|\zeta\| = \max_{k \in J} |\zeta(k)|$, $(J = [a, b])$ ile tanımlanan normun, bir iç çarpımdan bulunamayacağını göstermemiz gerekmektedir. Gerçekten, $\zeta(k) = 1$ ve $\eta(k) = (k - a) / (b - a)$ alırsak, $\|\zeta\| = 1$, $\|\eta\| = 1$ ve

$$\zeta(k) + \eta(k) = 1 + \frac{k - a}{b - a}$$

$$\zeta(k) - \eta(k) = 1 - \frac{k - a}{b - a}$$

elde ederiz. Buna göre,

$$\|\zeta + \eta\| = 2, \ \ \|\zeta - \eta\| = 1 \text{ ve}$$

$$\|\zeta + \eta\|^2 + \|\zeta - \eta\|^2 = 5$$

fakat,

$$2(\|\zeta\|^2 + \|\eta\|^2) = 4$$

bulunur ki, bu da ispatımızı tamamlamaktadır [Çakar, 2007].

4.4.3. Teorem Bir Hilbert uzayı bir Banach uzayıdır [Kolmogorov, 1957].

Örnek 5 $C[a,b]$ sürekli fonksiyonlar uzayındaki her $\zeta(x)$ ve $\eta(x)$ fonksiyonu için bir iç çarpımı

$$(\zeta,\eta)=\int_a^b \zeta(x)\overline{\eta(x)}dx$$

şeklinde tanımlayabiliriz. $\|\zeta\|_2=\left(\int_a^b |\zeta(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$ normuyla tam olmadığını bildiğimize göre bu uzayın bir Hilbert uzayı olamayacağı açıktır. Ancak Hilbert uzayı olduğunu bildiğimiz $L_2(a,b)$ Lebesgue uzayının yoğun bir alt uzayı olduğu gösterilebilir.

4.4.4. Teorem $L_2(a,b)$ ile tanımlanan uzay bir Hilbert uzayıdır. $L_2(a,b)$ uzayı, bu uzayda verilen her $\zeta(x)$ ve $\eta(x)$ fonksiyonu için

$$(\xi,\eta)=\sum_{j=1}^{\infty}\xi_j\bar{\eta}_j$$

ile tanımlanan iç çarpıma göre bir **Hilbert uzayıdır** [Naimark,1968].

ℓ_2 Uzayı Hilbert uzaylarının ilk örneği olarak gösterilir. İlk kez, D. Hilbert (1912) tarafından integral denklemlere ilişkin bir araştırmasında tanımlanmış ve araştırılmıştır. Bununla birlikte, Hilbert uzayının aksiyomatik tanımı, daha sonraları, J. Von Neumann (1927) tarafından kuantum mekaniğinin matematiksel temellerine ilişkin bir çalışmasında yer verilmiştir.

4.4.10. Tanım ℓ_p Uzayı, $p\neq 2$ olmak üzere bir iç çarpım uzayı değildir, dolayısıyla bir Hilbert uzayı da olamaz. Buna göre $p\neq 2$ olmak üzere ℓ_p dizi uzayı, Hilbert uzayı değildir fakat bir Banach uzayıdır [Çakar, 2007].

4.4.11. Tanım Verilmiş $[a,b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $f(x)$ fonksiyonu için $|f(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta integrallenebilir ise $f(x)$

fonksiyonuna $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ **aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon** denir. $a \leq t \leq b$ olmak üzere

$$L_2(a,b) = \left\{x(t) : \int_a^b |x(t)|^2 \, dt < \infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzayda iç çarpım

$$\big(f(x), g(x)\big) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

şeklinde gösterilir. Bu iç çarpım uzayı bir Hilbert uzayıdır [Kreyzing, 1989].

$L_p -$ fonksiyonları, $L_2 -$ uzayını genelleştirmektedir. Kare integrallenebilirlik yerine, f ölçülebilir fonksiyonunun L_P uzayında mevcut olması için $p -$ integrallenebilir olması gereklidir. Bir X ölçüm uzayında yer alan bir f fonksiyonunun L_P – normu

$$\|f\|_{L_p} = (\int_X |f|^p)^{1/p},$$

şeklinde verilir. L_P - fonksiyonları verilen bu integralin yakınsadığı fonksiyonlardır. $p \neq 2$ olmak üzere L_P - fonksiyonlarının uzayı Hilbert uzayı değildir fakat bir Banach uzayıdır. R^n öklidyen uzayında veya diğer durumlarda, L_P - uzayı L_P normunun kullanılmasıyla elde edilen kompakt destekli sürekli fonksiyonların tamlanışıdır.

4.5. İnterpolasyon Uzayları

4.5.1. Tanım X ve Y Banach uzayları olmak üzere $J : X \to Y$ dönüşümü, bire – bir ve cebirsel işlemleri koruyor ise X, Y ye **gömülmüştür** denir. J operatörüne ise **gömülme operatörü** denir. Bu durumda $J(X)$ ile X aynı uzaylar olarak kabul edilir ve $X \subset Y$ olarak gösterilir [Kreyszig, 1989].

Eğer $J : X \to Y$ gömülme operatörü sürekli ise $X \subset Y$ gömülmesine **sürekli gömülme** denir [Triebel, 1978].

4.5.2. Tanım Bir topolojik uzaya ait farklı iki elemanın ayrık komşulukları mevcut ise bu uzaya **Hausdorff uzayı** adı verilir.

4.5.3. Tanım K ($K = \mathbb{R}\ veya\ K = \mathbb{C}$) üzerinde, E_0 ve E_1 Banach uzayları verilsin. Burada $\mathrm{E}_{0,}$ $\mathrm{E}_1 \subset Z$ gömülmeleri sürekli olacak şekilde bir Z Hausdorff topolojik vektör uzayı varsa $(\mathrm{E}_{0,}\mathrm{E}_1)$ çiftine bir **interpolasyon çifti** adı verilir.

4.5.1. Lemma $(\mathrm{E}_{0,}\mathrm{E}_1)$, Banach uzayların bir interpolasyon çifti olmak üzere $E_0 \cap \mathrm{E}_1$ kümesi

$$\|x\|_{\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{E}_1} = \max\left(\|x\|_{\mathrm{E}_{0,}}\|x\|_{\mathrm{E}_1}\right), \qquad x \in E_0 \cap \mathrm{E}_1$$

normuyla birlikte ve $E_0 + \mathrm{E}_1$ kümesi de

$$\|x\|_{\mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_1} = \inf_{x \in E_0 + \mathrm{E}_1,\ x_0 \in \mathrm{E}_0,\ x_1 \in \mathrm{E}_1} \left(\|x_0\|_{E_0} + \|x_1\|_{\mathrm{E}_1}\right)$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır.

4.5.4. Tanım $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ ve $(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1)$ Banach uzayların bir interpolasyon çifti ve E , Y Banach uzayları olsun.

$i)$ Eğer $\mathrm{E}_0 \cap \mathrm{E}_1 \subset X \subset \mathrm{E}_0 + \mathrm{E}_1$ gömülmeleri sürekli ise X e $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ e göre **ara (intermediate) uzay** denir.

$ii)$ X ve Y sırasıyla $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ ve $(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1)$ e göre birer ara uzayı iseler, X ve Y uzaylarına $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ ve $(\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1)$' e göre **interpolasyon uzayları** adı verilir.

$iii)$ $X = Y$ ve $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1) = (\mathrm{Y}_0, \mathrm{Y}_1)$ eşitliği için önceki şartlar sağlanırsa X uzayına $(\mathrm{E}_0, \mathrm{E}_1)$ interpolasyon çiftine göre bir **interpolasyon uzayı** denir.

4.5.5. Tanım ($\boldsymbol{K - metot}$) $E_0 + E_1$ uzayında her $t \in (0, \infty)$ için $K(t, u)$ ile göstereceğimiz $(0, \infty)$ üzerinde sürekli olan fonksiyoneli,

$$K(t,u) = \inf\left\{ \|u_0\|_{E_0} + t\|u_1\|_{E_1} : u = u_0 + u_1 \right\}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada $K(t,u)$ için

$$\min\{1, t\}\|u\|_{E_0+E_1} \le K(t,u) \le \max\{1, t\}\|u\|_{E_0+E_1}$$

eşitsizliği geçerlidir. Her $0 < \theta < 1$, $1 \le p < \infty$ sayıları ve (E_0, E_1) interpolasyon çifti için $E_0 + E_1$ uzayıda

$$\|u\|_{(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p}} = \left(\int_0^\infty t^{-\theta p-1} K^p(t,u)dt\right)^{\frac{1}{p}}$$

normuyla birlikte bir normlu uzay olup, bu uzay $(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p}$ ile gösterilir. Bu uzaya $(E_0,\ E_1)$ interpolasyon çifti için $\boldsymbol{K}-$ **metot ile tanımlanmış interpolasyon uzayı denir.**

4.5.2. Lemma $(E_0,\ E_1)$ interpolasyon çifti verilsin. $0<\theta<1$ ve $1\le p\le\infty$ sayıları için,

$\boldsymbol{i})$ $(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p} = (E_1\,,\,E_0)_{1-\theta,p}$,

$\boldsymbol{ii})$ $\|u\|_{(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p}} \le C\,\|u\|_{E_0}^{1-\theta}\,\|u\|_{E_1}^{\theta}$, $u\in E_0\cap E_1$,

$\boldsymbol{iii})$ $(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p}$ uzayında $E_0\cap E_1$ yoğundur.

$\boldsymbol{iv})$ $E_0=E_1$ ise $(E_0\,,\,E_1)_{\theta,p} = E_0 = E_1$ dır [Yakubov, 1999].

4.5.1. Teorem $(\mathrm{E}_0,\ \mathrm{E}_1)$ ve $(\mathrm{Y}_0,\ \mathrm{Y}_1)$ birer interpolasyon çifti olsun. Eğer, $T\in L(\mathrm{E}_0,\ \mathrm{E}_1)\cap L(\mathrm{Y}_0,\ \mathrm{Y}_1)$ ise bu durumda, her $\theta\in(0,1)$ ve $p\in[1,\infty)$ için, $T\in L\big((\mathrm{E}_0,\mathrm{Y}_0)_{\theta,p}, L(\mathrm{E}_1,\mathrm{Y}_1)_{\theta,p}\big)\cap L((E_0,\mathrm{Y}_0)_{\theta}, L(\mathrm{E}_1,\mathrm{Y}_1)_{\theta})$ dır. Ayrıca,

$$\|T\|_{L((E_0,\mathrm{Y}_0)_{\theta,p},L(\mathrm{E}_1,\mathrm{Y}_1)_{\theta,p})} \le \big(\|T\|_{L(\mathrm{E}_0,\mathrm{Y}_0)}\big)^{1-\theta}\big(\|T\|_{L(\mathrm{E}_1,\mathrm{Y}_1)}\big)^{\theta}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu teoremin önemli bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

4.5.1. Sonuç $(\mathrm{E}_0,\ \mathrm{E}_1)$ bir interpolasyon çifti olsun. $0<\theta<1\ ve\ 1\le p<\infty$ için

$$\|y\|_{(\mathrm{E}_0,\,\mathrm{E}_1)_{\theta,p}} \le c(\theta,p)\|y\|_{E_0}^{1-\theta}\|y\|_{E_1}^{\theta}\,, \qquad \forall y\in \mathrm{E}_0\cap\,\mathrm{E}_1$$

olacak şekilde $c(\theta,p)$ sayısı vardır.

4.6. Zayıf Türevler ve Sobolev Uzayları

4.6.1. Tanım $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere $f: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun.

$$\overline{\{x \epsilon \Omega \mid f(x) \neq 0\}}$$

kümesine f nin **supportu (desteği)** denir ve $\operatorname{supp} f$ şeklinde gösterilir. Eğer f nin support kümesi Ω da kompakt ise bu fonksiyona supportu kompakt olan fonksiyon denir.

4.6.2. Tanım Ω da supportu kompakt olan ve her mertebeden türevlenebilen fonksiyonlara **test fonksiyonu** denir ve Ω da ki test fonksiyonlarının uzayı $\mathcal{D}(\Omega)$ ile gösterilir. Buna göre $\mathcal{D}(\Omega)$ uzayı

$$C_0^\infty(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) \mid \operatorname{supp}(f)\ kompakt\}$$

şeklinde yazılabilir.

4.6.3. Tanım Bir $G \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kapanışı $\bar{G}$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olmak üzere $\bar{G} \subset \Omega$ ve $\bar{G}$ kümesi $\mathbb{R}^n$ in kompakt bir alt kümesi ise bu durum $G \subset\subset \Omega$ şeklinde gösterilir. f, G de tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonunun desteği $supp\ f = \overline{\{x \in G: f(x) \neq 0\}}$ şeklinde tanımlanır. Eğer $supp\ f \subset\subset \Omega$ ise f fonksiyonu **Ω da kompakt desteğe sahiptir** denir.

4.6.1. Lemma $1 \leq p < \infty$ için $D(\Omega)$ test fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ da yoğundur. Yani, $\overline{(D(\Omega))} = L^p(\Omega)$ dir.

4.6.4. Tanım $\mathcal{D}(\Omega)$ üzerinde tanımlanan sürekli lineer fonksiyonellerin uzayına $\mathcal{D}(\Omega)$ uzayının dual uzayı denir ve

$$\mathcal{D}'(\Omega) = \{f \mid f: \mathcal{D}(\Omega) \to \mathcal{F},\ \text{sürekli ve lineer}\}$$

şeklinde gösterilir. $\mathcal{D}'(\Omega)$ dual uzayının elemanlarına da **distribution** veya **genelleştirilmiş fonksiyon** adı verilir.

4.6.5. Tanım Ω, $\mathbb{R}^n$'de bir bölge ve $1 \leq p < \infty$ olmak üzere, Ω bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde p. kuvveti integrallenebilen **Ω bölgesindeki bütün ölçülebilir fonksiyonlar uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$** ile gösterilir. Bu uzay $p = 1$ için $L^1_{loc}(\Omega)$ şeklinde gösterilen lokal integrallenebilir fonksiyonlar sınıfını gösterir.

4.6.6. Tanım Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanmış ve Ω da her $u \subset \Omega$ için $u \in L^1(U)$ şeklinde bir u fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir ve $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ yazılır. Her $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna karşılık gelen burada bir $T_u = D'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonu vardır ve

$$T_u(\psi) = \int_\Omega u(x)\psi(x)dx, \qquad \psi(x) \in D(\Omega)$$

şeklinde tanımlanır. Açık bir şekilde, böyle tanımlanmış bir T_u genelleştirilmiş fonksiyonu, $D(\Omega)$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir.

4.6.1. Teorem Eğer $1 \leq p < \infty$ ise herhangi bir Ω bölgesi için $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$ dir [Adams, 1975].

Her $1 \leq p < \infty$ için

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \tag{4.6}$$

dir.

4.6.7. Tanım $L^1_{loc}(\Omega)$ uzayındaki fonksiyonlara karşılık gelen distribüsyonlara **düzenli distribüsyonlar (genelleştirilmiş fonksiyon)** denir.

4.6.8. Tanım Ω, $\mathbb{R}^n$ de bir bölge olsun. Negatif olmayan herhangi m tamsayısı için Ω bölgesinde $|\alpha| \leq m$ mertebesine kadar tüm $D^\alpha f$ kısmi türevleri sürekli olan fonksiyonlardan oluşan vektör uzayı $C^m(\Omega)$ ile gösterilir.

$$C(\Omega) = C^0(\Omega) \text{ ve } C^\infty(\Omega) = \bigcap_{m=0}^{\infty} C^m(\Omega)$$

olmak üzere $C^0(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ alt uzayları sırasıyla Ω bölgesinde kompakt desteğe sahip olan $C(\Omega)$ ve $C^\infty(\Omega)$ uzaylarındaki tüm fonksiyonlardan oluşur. $C^\infty(\Omega)$ uzayının elemanlarına test fonksiyonu veya düzgün (smooth) fonksiyon denir. $C^\infty(\Omega)$ uzayının Ω bölgesindeki kompakt desteğe sahip fonksiyonlarından oluşan uzay ise $C_0^\infty(\Omega)$ ile gösterilir.

4.6.9. Tanım $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ ve α çoklu - indisi verilsin. Her $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega v\varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u D^\alpha \varphi dx$$

eşitliği sağlanıyorsa, $v \in L^p_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna u fonksiyonunun $\alpha.$ *zayıf türevi* denir.

4.6.10. Tanım $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu takdirde, her $\mu \in C_c^\infty(\Omega)$ (kompakt destekli sürekli fonksiyon uzayı) için

$$\int_\Omega g(x) \cdot \mu(x) dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega f(x) \mu^{(\alpha)}(x) dx$$

şartını sağlayacak şekilde bir $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu var ise bu fonksiyona f nin **zayıf türevi (genelleştirilmiş türevi)** denir ve $D^\alpha f = g$ şeklinde gösterilir.

Örnek 1 $n = 1,\ \Omega = [-1,1]$ ve $f(x) = 1 - |x|$ olsun. Bu durumda $D^1 f$ zayıf türevi vardır ve

$$g := \begin{cases} 1, & x < 0 \\ -1, & x > 0 \end{cases}$$

olarak bulunur. Bunu göstermek için, $[-1,1]$ aralığını f nin düzgün olduğu iki aralığa bölünür ve kısmi integrasyon kullanılır ise:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\mu'(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)\mu'(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)\mu'(x)dx$$

$$= f\mu \Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0} (+1)\mu(x)dx + f\mu \Big|_0^1 - \int_0^1 (-1)\mu(x)dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\mu(x)dx + f(0-)\mu(0-) - f(0+)\mu(0+)$$

$$= -\int_{-1}^{1} g(x)\mu(x)dx$$

dir. Çünkü f, 0 da süreklidir [Büyük, 2015].

4.6.11. Tanım $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ve $1 \leq p \leq \infty$ olsun. $L_p(\Omega)$ uzayında alınan ve $k-$yıncı mertebeden kısmi türevlere sahip fonksiyonların

$$W_p^k(\Omega) = \{u \in L_p(\Omega) \mid D^\alpha u \in L_p(\Omega), \quad |\alpha| \leq k\}$$

uzayına **Sobolev uzayı** denir.

Burada,

$i)$ $u : \Omega \to \mathbb{R}$ lokal integrallenebilen fonksiyon,

$ii)$ α bir multi - indeks olup $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$,

$iii)$ $D^\alpha u = \partial^\alpha u = \partial^{\alpha_1}\partial^{\alpha_2} \ldots \partial^{\alpha_n} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial {x_1}^{\alpha_1} \partial {x_2}^{\alpha_2} \ldots \partial {x_n}^{\alpha_n}}$

şeklinde tanımlıdır.

$iv)$ $D^\alpha u$, u nun $\alpha - y$ıncı mertebeden genelleştirilmiş türevidir.

$v)$ $W_p^k(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W_p^k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_p(\Omega)}^p\right)^{1/p}, \qquad 1 \leq p < \infty \ , \qquad p = \infty$$

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq k} \|D^\alpha u\|_{L_\infty(\Omega)}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

$vi)$ $p = 2$ için $W_2^k(\Omega)$ uzayı

$$(u,u) = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L_p(\Omega)}^2 \right)^{1/2}$$

iç çarpımına göre bir hilbert uzayıdır.

$vii)$

$$W_p^o(\Omega) = L_p(\Omega)$$

dır.

4.6.12. Tanım $C_c^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W_p^k(\Omega)$ normuna göre kapanışı $\overline{W}_p^k(\Omega) = \overline{\boldsymbol{C_c^{\infty}}(\Omega)}$ ile gösterilir. $C_c^{\infty}(\Omega)$ uzayı genellikle Ω nın $\partial\Omega$ sınırında $k-1$ inci mertebeye kadar türevleri sıfır olan $W_p^k(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

4.6.2. Teorem $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $W_p^k(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi ise $C_c^{\infty}(\mathbb{R}^n)$ uzayı $\overline{W}_p^k(\mathbb{R}^n)$ uzayında yoğundur. Ayrıca Ω düzgün bir bölge ise $C^{\infty}(\overline{\Omega})$ uzayı $W_p^k(\Omega)$ uzayında yoğundur.

4.6.3. Teorem $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayı bir Banach uzayıdır.

İspat. $\{u_t\} \subset W_p^k(\Omega)$ bir Cauchy dizisi olsun. Buna göre $\forall \varepsilon > 0$ için $\ell, j \geq N\ (\varepsilon)$ olduğunda $\| u_\ell - u_j \|_{k,p} < \varepsilon$ olacak şekilde bir N pozitif tamsayısı vardır. $0 \leq |r| \leq k$ olması şartı ile $\| D^r u \|_p \leq \| u \|_{k,p}$ eşitsizliği geçerli olduğundan $\ell, j \geq N$ için $\| D^r u_\ell - D^r u_j \|_p < \varepsilon$ buluruz. Dolayısıyla $\{D^r u_\ell\} \subset L_p(\Omega)$, $0 \leq |r| \leq k$ dizileri de Cauchy dizisi olur. Buna göre $L_p(\Omega)$ nın tamlığı nedeniyle $\lim_{\ell \to \infty} u_\ell = u \subset L_p(\Omega)$ ve $\lim_{\ell \to \infty} D^r u_\ell = u_r \in L_p(\Omega)$, $1 \leq |r| \leq k$ bulunur.

$L_p(\Omega) \subset L_1(\Omega)$ olduğundan u_ℓ fonksiyonları $\mathfrak{D}(\Omega)'$ uzayında T_{u_ℓ} düzenli distribüsyonlar dizisini belirler. Herhangi bir $\emptyset \in \mathfrak{D}(\Omega)$ fonksiyonu için Hölder eşitsizliğinden yararlanarak

$$\left|T_{u_\ell}(\emptyset) - T_u(\emptyset)\right| \leq \int_{\Omega} |u_\ell(x) - u(x)||\emptyset(x)| d\mu \leq \| \emptyset \|_q \| u_\ell - u \|_p$$

yazabiliriz. $q = p/(p-1)$ dir. Dolayısıyla her $\emptyset \in \mathfrak{D}(\Omega)$ için $\ell \to \infty$ alınırsa

$T_{u_\ell}(\emptyset) \to T_u(\emptyset)$ ve de benzer şekilde $T_{D^r u_\ell}(\emptyset) \to T_{u_r}(\emptyset)$ bulunur.

$$T_{u_r}(\emptyset) = \lim_{\ell\to\infty} T_{D^r u_\ell}(\emptyset) = \lim_{\ell\to\infty} (-1)^{|r|} T_{u_\ell}(D^r\emptyset) = (-1)^{|r|} T_u(D^r\emptyset)$$

veya her $\emptyset \in \mathfrak{D}(\Omega)$ için $T_{u_r}(\emptyset) = D^r T_u(\emptyset)$ olduğundan $T_{u_r} = D^r T_u$ çıkar. Buna göre de distribüsyon anlamında $u_r = D^r u$ elde ederiz. Yani $0 \le |r| \le k$ için $D^r u \in L_p(\Omega)$ ve bu sonuca göre de $u \in W_p^k(\Omega)$ çıkar. $\lim_{\ell\to\infty} \| u_\ell - u \|_{k,p} = 0$ olacağından $W_p^k(\Omega)$ uzayında da $\{u_\ell\}$ dizisinin uzayın bir u vektörüne yakınsadığı anlaşılır. Buna göre $W_p^k(\Omega)$ tamdır [Şuhubi, 2001, s. 400].

4.6.4. Teorem Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölge, $p < n$ ve p^*, p nin Sobolev eşleniği yani, $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ olsun.

$i)$ $u \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ ise $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L_{p^*}(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(p,n)$ vardır.

$ii)$ $u \in W_p^1(\Omega)$ ve $1 \le q \le p^*$ ise $u \in L^q(\Omega)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} \le C\|\nabla u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(p,n,\Omega)$ vardır.

4.6.5. Teorem Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölge ve $n < p < \infty$ olsun.

$i)$ $u \in W_p^1(\mathbb{R}^n)$ ise $u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \le C\|\nabla u\|_{L^P(\mathbb{R}^n)}$$

olacak şekilde $C = C(p,n)$ vardır.

$ii)$ $u \in W_p^1(\Omega)$ ve 1$\leq q \leq p^*$ ise $u \in L_q(\Omega)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C\|u\|_{W_p^1(\Omega)}$$

olacak şekilde $C = C(p, \Omega)$ vardır.

$iii)$ $kp > n$ iken $u \in W_p^{k+r}(\Omega)$ ise $u \in C^r(\overline{\Omega})$ olur.

Sobolev uzayı, l mertebeye kadar tüm türevleri p mertebeden integrallenebilen fonksiyonlardan oluşur. İlk gömme teoremleri Sobolev tarafından ispatlanmıştır. Gömme teoremlerini ispat ederken Sobolev, yüksek mertebeli türevlerin yardımı ile fonksiyonları integral ile ifade yöntemini kullanmıştır.

4.6.6. Teorem $v \in W_p^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ ise $\varphi v = v|_{\partial\Omega}$ olacak şekilde

$$\varphi: W_p^1(\Omega) \to W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

üzerine sınırlı lineer dönüşümü vardır.

Sobolev ve ilgili eşitsizlikler matematik ve fizik dallarında, özellikle kuantum alan teorisinde oldukça önemli bir uygulama alanı olmuştur. Son zamanlarda ise genelleştirilmiş Sobolev eşitsizlikleri üzerine yapılmış çalışmalar göze çarpmaktadır. Bunlar arasında Lions, Pacella, Tricarico tarafından çeşitli fonksiyon sınıfları için geliştirilen bazı Sobolev eşitsizlikleri sayılabilir [Lions ve ark., 1988].

5. BAZI LİNEER OPERATÖRLER

5.1. Kompakt Operatörler, Kompakt Gömülmeler

Bu bölümde operatör kavramıyla lineer operatör, $K-$ vektör uzayı ($K \in \mathbb{R}\, veya\, K \in \mathbb{C}$) ve $B(X)$, X uzayından kendisine sınırlı operatörler uzayı olarak kastedilecektir.

5.1.1. Tanım X sonsuz boyutlu banach uzayı olmak üzere T, X normlu uzayında tanımlı lineer bir dönüşüm olsun. X uzayına ait sınırlı herhangi bir x_n dizisi için Tx_n dizisinin yakınsak bir alt dizisi mevcutsa bu durumda T dönüşümüne **kompakttır** olarak ifade edilir. X normlu uzayından Y normlu uzayına kompakt operatörlerin ailesi $K(X,Y)$ ile ifade edilmektedir. Kompakt operatörlere ait bazı bilgiler şu şekildedir

X, Y, Z normlu uzaylar olmak üzere,

$T \in K(X,Y)$ ise T sınırlıdır ve dolayısıyla $K(X,Y) \subseteq B(X,Y)$ elde edilir.

$P, T \in K(X,Y)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ise $\alpha P + \beta T$ kompakt operatörüdür.

$P \in B(X,Y)$ ve $T \in B(X,Y)$ operatörlerinden en az biri kompakt operatör olarak verilirse $TP \in B(X,Y)$ operatörü de kompakt operatördür.

5.1.2. Tanım X Banach uzayı olmak üzere $E \subset X$ kümesi verilsin. E kümesi içindeki her dizinin E de yakınsak bir alt dizisi varsa E ye X de **ön kompakt küme** denir [Triebel, 1978].

5.1.3. Tanım E içindeki her dizinin E de bir limit noktası mevcutsa E kümesine X de **kompakt küme** denir.

***Örnek* 1** $a = \{a(n)\} \in \ell^2$ ve $n = 1,2,\ldots$ için

$$S(a)(n) = \frac{1}{n}\{a(1) + a(2) + \cdots + a(n)\}$$

olmak üzere

$$S(\{a_n\}) = \{S(a)(n)\} = \left\{\frac{a(1)}{1}, \frac{a(1)+a(2)}{2}, \frac{a(1)+a(2)+a(3)}{3}, \cdots\right\}$$

olsun. c_{00}, sadece sonlu sayıda sıfırdan farklı terimlere sahip dizileri içeren ℓ^∞ nin lineer (vektör) alt uzayı olsun. Bu durumda

$i)$ $S: \ell^2 \to \ell^2$ sınırlı lineer bir operatördür ve $\|S\| \leq 4$ tür.

$ii)$ S Kompakt değildir.

Çözüm

$a = \{a(n)\} \in \ell^2$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a(n)|^2 < \infty$$

dır.

$i)$ $a = \{a(n)\} \in \ell^2$ için $S(a) \in \ell^2$ ve $\|Sa\|_2 \leq 4\|a\|_2$ olduğunu göstereceğiz. Bunun için $a = \{a(n)\} \in \ell^2$ için $|a| = \{|a(n)|\}$ gösterimini kullanacağız. $a = \{a(n)\} \in c_{00}$ ve $b(n) = \frac{|a(1)|+\cdots+|a(n)|}{n}$ olmak üzere

$$b = \{b(n)\} = \left\{\frac{|a(1)|}{1}, \frac{|a(1)+a(2)|}{2}, \frac{|a(1)+a(2)+a(3)|}{3}, \cdots\right\}$$

olsun. Bu durumda $b = \{b(n)\} = S(|a|)$ ve

$$nb(n) = |a(1)| + \cdots + |a(n)|$$

olur. Bu nedenle $b(0) = 0$ olmak üzere $n = 1,2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} &n^2\big(b(n)\big)^2 - (n-1)^2\big(b(n-1)\big)^2 \\ &= \{nb(n) - (n-1)b(n-1)\} \cdot \{nb(n) + (n-1)b(n-1)\} \\ &\leq |a(n)| 2nb(n) \end{aligned}$$

bulunur. Buna göre

$$n\big(b(n)\big)^2 - \frac{(n-1)^2}{n}\big(b(n-1)\big)^2 \leq 2|a(n)|b(n)$$

ve

$$\sum_{n=1}^{N} n\big(b(n)\big)^2 - \sum_{n=2}^{N} \frac{(n-1)^2}{n}\big(b(n-1)\big)^2 \leq 2\sum_{n=1}^{N} |a(n)|b(n)$$

dir. Böylece toplamlar için Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum_{n=1}^{N-1}\big(b(n)\big)^2\left(n-\frac{n^2}{n+1}\right)+N\big(b(N)\big)^2 \le 2\left(\sum_{n=1}^{N}|a(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{n=1}^{N}|b(n)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \qquad (5.1)$$

bulunur.

$a \in c_{00}$ olduğundan her $j > m$ ve $a(j) = 0$ olacak şekilde m vardır. Bu nedenle her $n > m$ için t, n den bağımsız olmak üzere

$$b(n) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}|a(j)| = \frac{1}{n}t$$

dir. Bu

$$\sum_{n=1}^{\infty}|b(n)|^2 < \infty$$

ve $N \to \infty$ için $N\big(b(N)\big)^2 \to 0$ olduğunu gösterir. (5.1) içinde $N \to \infty$ alındığında

$$n-\frac{n^2}{n+1} = \frac{n}{n+1} \ge \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\big(b(n)\big)^2 \le \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}\,\big(b(n)\big)^2$$

$$\le 2\|a\|_2\left(\sum_{n=1}^{\infty}\big(b(n)\big)^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

bulunur. Buradan $\|b\|_2 \le 4\|a\|_2$ elde edilir. Böylece her $a \in c_{00}$ için $S(|a|) \in \ell^2$ dir ve

$$\|S|(a)|\|_2 \le 4\|a\|_2, \qquad a \in c_{00} \qquad (5.2)$$

dir.

Şimdi $a = \{a(n)\} \in \ell^2$ ve

$$a_m = \sum_{j=1}^{m} a(j)e_j = (a(1), \dots, a(m), 0,0, \dots)$$

ve

$$b_m = S(|a_m|), \quad b = S(|a|)$$

olsun. Bu durumda $a_m \in c_{00}$ dir.

$$\|a_m\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{m} |a(j)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|a\|_2$$

ve (5.2) den

$$\|b_m\|_2 = \|S(|a_m|)\|_2 \leq 4\|a_m\|_2 \leq 4\|a\|_2 \tag{5.3}$$

olur.

Her $m \geq j$ için $a_m(j) = a(j)$ olduğundan $m > k$ için

$$b_m(k) = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} |a_m(j)| = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{k} |a(j)| = b(k)$$

olur. Bu nedenle eğer $m > N$ ise (5.3) den

$$\sum_{k=1}^{N} \big(b(k)\big)^2 = \sum_{i=1}^{N} \big(b_m(k)\big)^2 \leq \|b_m\|_2^2 \leq 16\|a\|_2^2$$

bulunur. Bu herhangi bir N için doğrudur. Bu nedenle $b \in \ell^2$ dir ve

$$\sum_{k=1}^{\infty} \big(b(k)\big)^2 \leq 16\|a\|_2^2$$

$$|S(a)(n)| \leq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} |a(j)| = b(n)$$

olduğundan $S(a) \in \ell^2$ ve $\|Sa\|_2 \leq 4\|a\|_2$ olduğunu görürüz. Buna göre

$$\|S\| \leq 4 \tag{5.4}$$

tür. Açıkça S lineerdir. Dolayısıyla $S \in B(\ell^2)$ dir.

$ii)$ S nın kompakt olmadığını göstermek için, $n = 1,2, \ldots$

$$a_n(j) = \begin{cases} \sqrt{(j+1)} - \sqrt{j} & , \quad 4^n \leq j < 4^{n+1} \\ 0 & , \quad j < 4^n, \qquad j \geq 4^{n+1} \end{cases}$$

olsun.

$$\left(\sqrt{(j+1)} + \sqrt{j}\right)^2 = j + 1 + 2\sqrt{(j+1)j} + j > 4j$$

olduğundan

$$\left(\sqrt{(j+1)} - \sqrt{j}\right)^2 = \frac{1}{\left(\sqrt{(j+1)} + \sqrt{j}\right)^2} < \frac{1}{4j} < \frac{1}{4}\ln\left(1 - \frac{1}{j}\right)^{-1}$$

bulunur. Bu durumda

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n(j)\right)^2 = \sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}\left(\sqrt{(j+1)}-\sqrt{j}\right)^2$$
$$< \frac{1}{4}\sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}\ln\left(\frac{j}{j-1}\right)$$
$$= \frac{1}{4}\ln\left(\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}\right)$$

bulunur.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{4}\ln\left(\frac{4^{n+1}-1}{4^n-1}\right) = \frac{1}{4}\ln 4$$

dir. Dolayısıyla her n için $a_n \in \ell^2$ dir ve $\{\|a_n\|\}$ sınırlıdır.

$b_n = S(a_n)$ olsun. Eğer $k \geq 4^{n+1}$ ise bu durumda

$$kb_n(k) = \sum_{j=1}^{k} a_n(j) = \sum_{j=4^n}^{4^{n+1}-1}\left(\sqrt{(j+1)}-\sqrt{j}\right) = \sqrt{4^{n+1}-}\sqrt{4^n}$$

ve

$$b_n(k) = (2^{n+1}-2^n)/k = 2^n/k$$

olur. $n > m$ olsun. O zaman

$$\|b_n - b_m\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty}|b_n(k)-b_m(k)|^2 \geq \sum_{k=4^{n+1}}^{\infty}\left|\frac{2^n}{k}-\frac{2^m}{k}\right|^2$$

dir. Bu nedenle

$$\|b_n - b_m\|_2^2 \geq (2^n - 2^m)^2\sum_{k=4^{n+1}}^{\infty}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)$$
$$= (2^n - 2^m)^2\frac{1}{4^{n+1}} \geq (\frac{1}{4})^2$$

bulunur. Bu $\{b_n\}$ nin hiçbir alt dizisinin yakınsak olmadığını gösterir. Dolayısıyla $\{a_n\}$, ℓ^2 içinde sınırlı bir dizi olmasına rağmen $\{S(a_n)\}$ yakınsak hiçbir alt diziye sahip değildir. Bu nedenle S kompakt değildir

5.1.1. Teorem Bir $E \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin kompakt olabilmesi için gerek ve yeter şart E kümesinin sınırlı ve de kapalı olmasıdır. Verilen teorem Heine - Borel Teoremi olarak adlandırılır.

5.1.2. Teorem Her lineer A operatörünün sürekli olması için gerek ve yeter şart sınırlı olmasıdır [Naimark, 1968].

5.1.4. Tanım X , Y Banach uzayları ve $A : X \to Y$ operatörü verilsin. Eğer A operatörü X uzayının her sınırlı kümesini Y uzayının bir ön kompakt kümesine çeviriyorsa A operatörüne **kompakt lineer operatör (tamamen sürekli lineer operatör)** denir [Musayev, 2000].

5.1.5. Tanım X ve Y Banach uzayları olsun ve $J : X \to Y$ dönüşümü, bire – bir ve cebirsel işlemleri koruyor ise $X,\ Y$ ye **gömülmüştür** denir. J operatörüne ise **gömülme operatörü** denir. Bu durumda $J(X)$ ile X aynı uzaylar olarak kabul edilir ve $X \subset Y$ olarak gösterilir [Kreyszig, 1989].

$i)$ Eğer $J : X \to Y$ gömülme operatörü sürekli ise $X \subset Y$ gömülmesine **sürekli gömülme** denir [Triebel, 1978].
$ii)$ Eğer $J : X \to Y$ gömülme operatörü kompakt ise $X \subset Y$ gömülmesine **kompakt gömülme** denir [Triebel, 1978].
$iii)$ Eğer $J(X)$ görüntü kümesi, Y de her yerde yoğun ise $X \subset Y$ gömülmesi de **her yerde yoğundur** denir [Triebel, 1978].

5.1.1. Lemma Aşağıda verilen şartlar sağlansın.

$i)$ X ve Y birer Banach uzayıdırlar ve X yansımalıdır.
$ii)$ $X \subset Y$ gömülmesi her yerde yoğun ve süreklidir.
$iii)$ $B : X \to Y$ Operatörü kompakttır.

O halde $\forall \varepsilon > 0$ için öyle $C(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir ki bütün $u \in X$ için,

$$\|Bu\|_Y \leq \varepsilon \|u\|_X + C(\varepsilon)\|u\|_Y$$

eşitsizliği sağlanır [Yakubov, 1994].

5.1.6. Tanım U bir kompleks Banach uzayı ve $L : U \to U$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $(\lambda - I)^{-1}: U \to U$ bir sınırlı lineer operatörü varsa bu durumda $\lambda \epsilon \mathbb{C}$ nin

L operatörünün rezolventine ait olduğu söylenir. Bu küme $\rho(L)$ ile gösterilir ve $(\lambda - I)^{-1}$ operatörü **rezolvent operatör** olarak adlandırılır.

5.1.7. Tanım X ve Y fonksiyon uzayları olmak üzere $L : X \to Y$ dönüşümüne operatör denir. Her $f \geq 0$ fonksiyonu için $L(f) \geq 0$ ise L operatörüne **pozitif operatör** denir [Kreyzing, 1989].

5.2. Fredholm Operatörü

Sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin Fredholm operatörü ile ilgili S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un çok sayıda çalışması ve kitapları bulunmaktadır [Yakubov, 1999].

Bir operatörün Fredholm operatörü olma özellikleri araştırılırken genellikle $S. G.$ Krein, H. Triebel, I. Titeux ve Ya. Yakubov'un çalışmaları göz önüne alınmıştır.

5.2.1. Tanım M ve N birer Banach uzayları olsun. $D(A)$ tanım kümesi, $R(A)$ değer kümesi, $N',$ N nin eşlenik uzayı ve $D(A) \subset M$ olmak üzere $A : M \to N$ operatörü verilsin.

$$Au = 0$$

homojen denkleminin çözümlerinin kümesi**, $\boldsymbol{A}$ operatörünün çekirdeği** olarak adlandırılır ve $Ker\ (A)$ ile gösterilir. O halde,

$$Ker\ (A) \coloneqq \{u | u \in D(A),\quad Au = 0\}$$

dır. $R(A)$ üzerinde N den 0 a eşit gelen fonksiyonların kümesi ise **$\boldsymbol{A}$ operatörünün eş çekirdeği** olarak adlandırılır ve $Coker(A)$ ile gösterilir. Bu nedenle,

$$Coker\ (A) \coloneqq \{v' \mid v' \epsilon F',\ \langle Au, v' \rangle = 0,\ u \epsilon D(A)\}$$

dır. Bu tanımlamalardan sonra, eğer M den N ye bir A operatörü,

$i)$ $R(A),$ N de kapalıdır,

$ii)$ $Ker\ (A)$ ve $Coker\ (A)$ sırasıyla M ve N' nün sonlu boyutlu alt uzaylarıdır,

$iii)$ $dim(Ker\ (A)) = dim(Coker\ (A))$

şartlarını sağlarsa bu A operatörüne **Fredholm Operatörü** denir.

5.3. İzomorfizm

5.3.1. Tanım M cismi üzerinde X ve Y lineer uzayları ve $D(T) = X$, R$(T) = Y$ olan X den Y ye sürekli lineer bir T operatörü verilsin. Bu operatörün tersi olan T^{-1} operatörü var ve de sürekli ise X ve Y ye izomorfik denir. T ye ise X ve Y arasında izomorfik dönüşüm veya **izomorfizm** denir.

5.3.2. Tanım (X, ρ) ve (Y, σ) birer metrik uzay olarak verilsin ve $\forall x, y \in X$ çifti için $D(T) = X,\ R(T) = Y$ ve

$$\|u - v\|_X = \|Tu - Tv\|_Y$$

olacak şekilde T lineer operatörü mevcutsa $X,\ Y$ ye **izometrik olarak izomorfik** denir. İzometrik olarak izomorfik iki uzay izometriktir. İzomorfizm, X den Y ye yapıyı koruyan birebir ve de üzerine bir dönüşümdür. Uzayların cinslerine göre izomorfizmler özel adlar alabilir.

X ve Y aynı cisim üzerinde iki lineer uzay olması durumunda X den Y ye bir T izomorfizmi $x, y \in X$ için

$$T(x + y) = T(x) + T(y)$$
$$T(ax) = aT(x)$$

şartlarını sağlayan birebir ve üzerine bir dönüşümdür.

5.3.3. Tanım X ve Y uzayları arasında bir izomorfizm varsa bu uzaylara izomorfik uzaylar denir ve $X \cong Y$ ile gösterilir.

6. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

6.1. Sınır Değer Problemi

6.1.1. Tanım $a_1, a_2, \dots, a_n$ $(a_n \neq 0)$ sabit reel sayılar olmak üzere bir $[a, b]$ aralığında tanımlı

$$l(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \qquad (6.1)$$

sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada, y fonksiyonu $[a, b]$ aralığında $n-$yinci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen bir fonksiyondur. $y_1, y_2, \dots, y_n$ fonksiyonları

$$l(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $c_1, c_2, \dots, c_n$ keyfi sabitler olmak üzere genel çözümün $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$ şeklinde yazıldığını biliyoruz.
Bu y fonksiyonu ve $(n-1)$ inci mertebeye kadar türevlerinin $a \leq x \leq b$ aralığının sınır noktalarında ki değerleri

$$y(a), y'(a), \dots, y^{(n-1)}(a); \quad y(b), y'(b), \dots, y^{(n-1)}(b)$$

olmak üzere bu ifadelerin lineer bileşimlerinden oluşan

$$\begin{aligned}
V_1(y) &= \alpha_{11} y(a) + \cdots + \alpha_{1n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{11} y(b) + \cdots + \beta_{1n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
V_2(y) &= \alpha_{21} y(a) + \cdots + \alpha_{2n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{21} y(b) + \cdots + \beta_{2n} y^{(n-1)}(b) = 0 \qquad (6.1) \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
V_m(y) &= \alpha_{m1} y(a) + \cdots + \alpha_{mn} y^{(n-1)}(a) + \beta_{m1} y(b) + \cdots + \beta_{mn} y^{(n-1)}(b) = 0
\end{aligned}$$

sistemini göz önüne alalım ve bu sistemi daha sade olarak

$$V_k(y) = 0, \quad k = 1,2, \dots, m$$

şeklinde gösterelim. Bu sisteme

$$l(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

denkleminin **sınır şartları** denir.

6.1.2. Tanım

$$l(y) = a_n y^{(n)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$$

homojen denklemi ile bu denkleme ait

$$V_k(y) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m$$

sınır şartları birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{cases} l(y) = 0 \\ V_k(y) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

şeklinde ifade edilen bir probleme de ***homojen sınır değer problemi*** adı verilir.

6.1.3. Tanım $g(x)$, $[a,b]$ kapalı aralığında sürekli bir fonksiyon ve g_k sabit sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} l(y) = g(x) \\ V_k(y) = g_k, \quad k = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

sistemine ***homojen olmayan sınır değer problemi*** denir. Homojen sınır değer probleminin daima bir $y = 0$ çözümü vardır. Bu çözüme problemin **aşikâr (trivial) çözümü** denir. Problemin sıfırdan farklı çözümlerine de **aşikâr olmayan çözümleri** adı verilir [Kandemir, 2015].

Genel çözümü

$$V_k(y) = 0, \quad k = 1,2,\ldots,m$$

sınır şartlarında yerine yazılırsa, $c_1, c_2, \ldots, c_n$ bulunması gereken sabitler olmak üzere m - tane denklemden oluşan

$$\begin{gathered} c_1V_1(y_1) + c_2V_1(y_2) + \cdots + c_nV_1(y_n) = 0 \\ c_1V_2(y_1) + c_2V_2(y_2) + \cdots + c_nV_2(y_n) = 0 \\ \vdots \\ c_1V_m(y_1) + c_2V_m(y_2) + \cdots + c_nV_m(y_n) = 0 \end{gathered}$$

homojen denklem sistemi elde edilir. Bu sisteminin katsayılar matrisinin

$$V = \begin{bmatrix} V_1(y_1) & V_1(y_2) & \dots & V_1(y_n) \\ V_2(y_1) & V_2(y_2) & \dots & V_2(y_n) \\ . & . & & . \\ . & . & \dots & . \\ . & . & & . \\ V_m(y_1) & V_m(y_2) & \dots & V_m(y_n) \end{bmatrix}$$

olduğu görülmektedir.

6.1.4. Tanım V matrisinin rankına

$$\begin{cases} l(y) = 0 \\ V_k(y) = 0, \quad k = 1,2,\dots,m \end{cases} \tag{6.2}$$

sınır değer probleminin rankı adı verilir [Naimark,1967].

6.1.5. Tanım $rank\ V = r$ ve $I(y)$ diferensiyel ifadesinin mertebesi n olmak üzere;

$i)$ (6.2) sınır değer probleminin $(n - r)$ tane lineer bağımsız çözümü vardır. Yani çözüm uzayının boyutu $(n - r)$ dir.

$ii)$ (6.2) sınır değer probleminin aşikâr olmayan (sıfırdan farklı) çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ $(n - r > 0)$ olmasıdır.

$iii)$ $m < n$ ise (6.2) sınır değer probleminin daima aşikâr olmayan çözümü vardır. O halde denklem sayısının bilinmeyen sayısından az olması durumunda problem daima aşikâr olmayan çözümlere sahiptir.

$iv)$ $m > n$ ise (6.2) sınır değer probleminin aşikâr olmayan çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ olmasıdır.

$v)$ $m = n$ olması halinde problemin sıfırdan farklı bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart $det\ V = 0$ olmasıdır.

Eğer $det\ V \neq 0$ ise sistemin sadece aşikâr çözümü vardır. Çünkü $det\ V \neq 0$ ise V matrisinin V^{-1} tersi vardır ve bu nedenle $VY = 0$ denkleminden $Y = 0$ çözümü elde edilir.

Buna göre $m = n$ olması halinde (6.2) sınır değer probleminin ya aşikâr çözümü vardır. Ya da sonsuz sayıda aşikâr olmayan çözümü vardır.

***Örnek* 1**

$$y'' + y' - 2y = 0,$$
$$V_1(y) = y(0) = 0$$
$$V_2(y) = y'(1) = 0$$

sınır değer probleminin çözümünü bulalım.

$$y'' + y' - 2y = 0$$

denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = e^{-2x} \text{ ve } y_2 = e^x$$

olduğundan genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

ve türevi

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' = -2c_1 e^{-2x} + c_2 e^x$$

şeklinde bulunur ve sınır şartlarında yerine yazarsak

$$c_1 + c_2 = 0$$
$$-2c_1 e^{-2} + c_2 e = 0$$

olacağından c_1 ve c_2 sabitlerine göre

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2e^{-2} & e \end{vmatrix} = e + 2e^{-2} \neq 0$$

olduğu için sınır değer probleminin sadece $y = 0$ aşikâr çözümü vardır.

***Örnek* 2**

$$y'' + 4y = 0,$$
$$V_1(y) = y'(0) = 0$$
$$V_2(y) = y'(\pi) = 0$$

sınır değer probleminin çözümünü inceleyelim. $y'' + 4y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1 = cos2x \text{ ve } y_2 = sin2x$$

olduğundan genel çözümü

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 = c_1 cos2x + c_2 sin2x$$

ve türevi

$$y' = c_1 y_1' + c_2 y_2' \; = -2c_1 sin2x + 2c_2 cos2x$$

şeklinde bulunur. Genel çözüm ve türev fonksiyonlarını

$$V_1\,(y) = y'\;(0) = 0$$

$$V_2\,(y) = y'\;(\pi) = 0$$

sınır şartlarında yerine yazarsak

$$c_1 V_1(y_1) + c_2 V_1(y_2) = 0$$

$$c_1 V_2(y_1) + c_2 V_2(y_2) = 0$$

sistemi bulunur. Bu sistemin birinci denklemine göre

$$-2c_1 sin0 + 2c_2 cos0 = 0$$

olduğundan $c_2 = 0$ dır. Bu sistemin ikinci denklemine göre ise

$$-2c_1 sin2\pi + 2c_2 cos2\pi = c_1 0 = 0$$

olacağından c_1 ne olursa olsun bu denklem sağlanır. Buna göre verilen problemin

$$y = c_1 cos2x$$

şeklinde sonsuz sayıda aşikâr olmayan çözümü vardır. Diğer taraftan

$$c_1 0 = 0$$

$$c_2 = 0$$

sisteminin katsayılar determinantı için

$$V = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

olması sistemin sıfırdan farklı bir çözüme sahip olduğunu gösterir.

6.1.6. Tanım Eğer $l = l^*$ ise $l(y)$ diferensiyel ifadesine **kendine eşlenik ifade** adı verilir.

6.1.7. Tanım Eğer sınır şartları, eşlenik sınır şartlarına eş değer ise bu sınır şartlarına **kendine eşlenik (self adjoint) sınır şartları** denir.

6.1.8. Tanım

$$l(y) = 0, \qquad a \leq x \leq b$$
$$U_k(y) = 0, \quad k = 1,2, \dots, m$$

sınır değer probleminde verilen $l(y) = 0$ denkleminin eşleniği $l^*(\varphi) = 0$ denklemi ve yine sınır değer probleminde verilen $U_k(y) = 0,\ k = 1,2, \dots, m$ sınır şartlarının eşleniği $V_k(\varphi) = 0,\ k = 1,2, \dots, 2n - 2m$ sınır değer problemine (1) sınır değer probleminin **eşlenik sınır değer problemi** denir.

6.2. Sınır Değer Probleminin Ürettiği Diferensiyel Operatör

6.2.1. Tanım X ve Y normlu lineer uzaylar ve $a, \beta \in \mathbb{R}$ $(veya\ \mathbb{C})$ olmak üzere her $x, y \in X$ için

$$A : X \to Y$$

fonksiyonu

$$A(ax + \beta y) = aA(x) + \beta A(y)$$

şartını sağlıyorsa A ya lineer dönüşüm veya **lineer operatör** adı verilir [Kandemir, 2015, s. 546].

6.2.1 Teorem X ve Y normlu lineer uzaylar ve

$$A: X \to Y$$

bir lineer operatör olmak üzere aşağıdakiler denktir.

$i)$ A süreklidir,

$ii)$ A sınırlıdır.

6.2.2. Tanım

$$l(y) = 0,\ a \le x \le b$$

$$U_k(y) = 0, \quad k = 1,2,\dots,m$$

sınır değer problemi verilsin. Bu sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatör L ve

$$l^*(\varphi) = 0$$
$$V_k(\varphi) = 0, \quad k = 1,2,\dots,2n-2m$$

sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatör L^* olsun. L^* operatörüne L operatörünün **eşlenik diferensiyel operatörü** denir. Eşlenik diferensiyel operatör tanımına göre L^* operatörünün eşleniği de L operatörüdür.

Bir diferensiyel ifade farklı sınır şartları altında farklı diferensiyel operatör üretir. $L(y)$ diferensiyel ifadesinin ürettiği en geniş lineer diferensiyel operatör sınır şartlarının olmadığı durumdur. O halde bu operatör L_1 ile gösterilen ve

$$L_1: C^n[a,b] \to C^n[a,b],\ D(L_1) = C^n[a,b], \qquad L_1 y = l(y)$$

şeklinde tanımlanan operatördür. $L(y)$ diferensiyel ifadesinin ürettiği en dar lineer diferensiyel operatör sınır ifadelerinin hepsinin sıfır olduğu yani

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots = y^{(n-1)}(b) = 0$$

durumda ürettiği operatördür. O halde bu operatör de L_0 ile gösterilen ve

$$L_0: C^n[a,b] \to C^n[a,b] + \mathbb{C}^m,$$

$$D(L_0) = \{y \in C^n[a,b] \mid y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = \cdots$$
$$= y^{(n-1)}(b) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan bir operatördür. Buna göre

$$\begin{cases} l(y) = 0, & a \le x \le b \\ U_k(y) = 0, & k = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

sınır değer probleminin ürettiği diğer tüm diferensiyel operatörler L_0 ve L_1 operatörleri arasındadır yani $L_0 \subset L \subset L_1$ olmaktadır.

6.2.3. Tanım $(X, \|.\|_X)$ ve $(X, \|.\|_Y)$ normlu lineer uzaylar ve $A: X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Eğer her $x \in X$ için

$$\| Ax \|_Y \leq \text{K} \| x \|_X$$

olacak şekilde bir K>0 sayısı varsa A ya **sınırlı operatör** denir [Kandemir, 2015, s. 546].

6.2.4. Tanım Eğer $L^* = L$ ise L operatörüne **kendine eşlenik diferensiyel operatör** adı verilir.

6.2.2. Teorem L operatörünün kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart bu operatörü üreten sınır değer probleminde ki diferensiyel ifadenin ve sınır şartlarının kendine eşlenik olmasıdır.

6.2.5. Tanım $(X, \|.\|_X)$ ve $(X, \|.\|_Y)$ normlu lineer uzaylar ve $A: X \to Y$ lineer bir operatör olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $\| x - x_0 \| < \delta$ olduğunda $\| Ax - Ax_0 \| < \delta$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa A operatörüne x_0 noktasında süreklidir denir. X ve Y normlu lineer uzaylar olmak üzere X ve Y ye tanımlanan bütün sürekli lineer operatörlerin kümesi $B(X, Y)$ şeklinde gösterilir [Kandemir, 2015 s. 546].

6.2.3. Teorem Kendine eşlenik lineer diferensiyel operatörün **bütün öz değerleri reeldir.**

İspat: $Ly = \lambda y$ olsun. L Operatörü kendine eşlenik ise

$$(Ly, \varphi) = (y, L\varphi)$$

olduğunu biliyoruz. $y = \varphi$ için bu eşitlik

$$(Ly, y) = (y, Ly)$$

$$(\lambda y, y) = (y, \lambda y)$$

$$\lambda(y, y) = \bar{\lambda}(y, y)$$

$$(\lambda - \bar{\lambda})(y, y) = 0$$

şeklini alır. $(y. y) > 0$ olduğundan $\lambda = \bar{\lambda}$ olur. Ayrıca

$$(Ly, y) = (y, Ly) = \overline{(Ly, y)}$$

olup (Ly, y) bir reel sayıdır ve

$$(Ly, y) = (\lambda y, y) = \lambda(y, y)$$

olduğundan

$$\lambda = \frac{(Ly, y)}{(y, y)}$$

sayısı da bir reel sayıdır.

6.2.4. Teorem Kendine eşlenik lineer diferensiyel operatörün farklı öz değerlerine karşılık gelen **özfonksiyonlar ortogonaldır.**

İspat. L kendine eşlenik bir operatör λ ve μ farklı iki öz değeri ve bu öz değerlere karşılık gelen öz fonksiyonlar sırasıyla y ve φ olsun. $Ly = \lambda y$ ve $L\varphi = \mu\varphi$ olup

$(Ly,\varphi) = (y, L\varphi)$ eşitliği

$$(\lambda y, \varphi) = (y, \mu\varphi)$$

$$\lambda(y, \varphi) = \bar{\mu}(y, \varphi)$$

$$(\lambda - \bar{\mu})(y, \varphi) = 0$$

şeklini alır. $\lambda \neq \mu = \bar{\mu}$ olduğundan $(y, \varphi) = 0$ olduğu görülür.

Lineer operatörler için süreklilik ve sınırlılık kavramları birbirlerinin yerine kullanılabilir.

7. SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ

7.1. Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi

Adi diferensiyel denklemler için sınır değer probleminin klasik teorisinde genellikle sürekli katsayılı ve sınır şartlarında sadece tanım aralığının uç noktalarında sınır değer ifadeleri içeren problemler ele alınır. Ancak, bu bölümde süreksiz katsayılı adi diferensiyel denklemler için tanım aralığının süreksizlik noktası olan bir iç noktasında sınır değer ifadeleri bulunduran problemler göz önüne alınmaktadır.

Klasik sınır değer problemlerine ait literatürde oldukça fazla çalışma bulunmaktadır [Titchmars, 1962; Fulton, 1977; Hinton, 1979].

Sürekli problemlerin spektral özellikleri, koersitivlik, izomorfizm ve Fredholm olma şartları özellikle S. Yakubov, Ya. Yakubov'un çalışmalarında görülmektedir. Ayrıca V. B. Shakmurov, B. A. Aliev gibi yazarlarında bu konular üzerinde çalışmalar yaptığı görülmektedir [Shakmurov, 2013 ve Aliev, 2006].

Süreksiz katsayılı diferensiyel denklemler için bazı sınır değer problemleri M. L. Rasulov ve A. A. Shkalikov gibi yazarlar tarafından incelenmiştir [Rasulov, 1967 ve Shkalikov, 1983].

Ancak son yıllarda yoğun bir şekilde O. Sh. Mukhtarov ve arkadaşları tarafından süreksiz Sturm – Liouville problemleri ve Eliptik operatör bulunduran problemler çalışılmış ve diferensiyel operatöre ait farklı özellikler elde edilmiştir.

7.2. Yardımcı Tanımlar Ve Teoremler

Bu bölümde bazı tanımlar, teoremler ve kullanacağımız yardımcı sonuçlar verilmiştir.

7.2.1. Tanım (Direkt Toplam) $W_p^m(-1,0) + W_p^m(0,1)$ banach uzayı ve $m \geq 0$ bir tamsayı, $p > 1$ bir reel sayı olmak üzere $W_p^m(-1,0)$ ve $W_p^m(0,1)$ uzaylarının direkt toplamı

$$W_p^m(-1,0) + W_p^m(0,1) = \left\{ u = \begin{cases} u_1(x), & x \in (-1,0) \\ u_2(x), & x \in (0,1) \end{cases} \middle| \; u_1 \in W_p^m(-1,0)\,, \right.$$

$$\left. u_2 \in W_p^m(0,1)\,,\; \|u\| = \|u_1\|_{W_p^m(-1,0)} + \|u_2\|_{W_p^m(0,1)} \right\}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

7.2.2. Tanım H_1, H_2 Hilbert uzayları verilsin. Bir Hilbert uzayında ki $\|(u,v)\|_{H_1 \oplus H_2} := (\|u\|_{H_1}^2 + \|v\|_{H_2}^2)^{\frac{1}{2}}$ normuna göre

$$H_1 \oplus H_2 := \{(u,v) \mid u \in H_1, v \in H_2\},$$

H_1 ve H_2 Hilbert uzaylarının direkt toplamı olarak adlandırılır.

7.2.1. Teorem H_1, H_2 Hilbert uzayları ve $D(A)$ bölgesinde $A: H_1 \to H_2$ kapalı lineer operatörü verilsin. $D(A) \subset R(B)$ ve $R(B)$ üzerinde bire-bir $B : H_2 \to H_1$ sınırlı operatör olsun.

$AB : H_1 \to H_2$ operatörünün $D(AB) = \{x \in H_2 : Bx \in D(A)\}$ bölgesinde bir Fredholm operatörü olduğunu kabul edelim. Buna göre $A : H_1 \to H_2$ operatörü bir Fredholmdur ve $ind\, A = ind\, AB$ [Skubachevskii, 1997, Teorem A 1.].

7.2.2. Teorem Bir sınırlı bölgede $Q \subset \mathbb{R}^n$ ve $k > s \geq 0$ verilsin. Bu durumda $W^k(Q) \to W^s(Q)$ şeklinde tanımlanan dönüşüm bir kompakt operatördür.

7.2.1. Lemma H_1, H_2 Hilbert uzaylar ve L, $L_0 : H_1 \to H_2$ lineer sınırlı operatörleri verilsin. L_0 operatörü herhangi $0 \leq \tau \leq 1$ için ${L_0}^{-1} : H_2 \to H_1$ sınırlı ters operatörüne sahip olduğunu ve $L_\tau = L_0 + \tau(L - L_0)$, $C_1, C_2 > 0$ olmak üzere

$$C_1\|L_\tau u\|_{H_2} \leq \|u\|_{H_1} \leq C_2\|L_\tau u\|_{H_2}, \qquad u \in H_1 ,$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda L operatörü, bir $L^{-1} : H_2 \to H_1$ sınırlı ters operatöre sahiptir.

7.2.2. Lemma Aşağıdaki şartlar sağlansın.

$i)$ Bir E Banach uzayından, bir G banach uzayına kompakt gömülme olsun;

$ii)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için E Banach uzayından, F banach uzayına bir B operatörü sınırlıdır ve

$$\|Bu\|_F \leq \varepsilon\|u\|_E + C(\varepsilon)\|u\|_G , \qquad u \in E$$

eşitsizliği geçerlidir. Buna göre B operatörü E den F ye kompakttır.

7.2.3. Teorem Bir E banach uzayında bir pozitif A operatörü verilsin.

$i)$ Eğer $\alpha > 0$ ise A^α , $D(A^\alpha)$ dan E' ye, $D(A^{\alpha+\mu})$ dan $D(A^\alpha)$ ya ve $(E, D(A^m))_{\frac{\mu+\alpha}{m},p}$ den $(E, D(A^m))_{\frac{\mu}{m},p}$ ye bir izomorfizmdir. Burada $\mu > 0$, $1 \leq p \leq \infty$ ve $\alpha + \mu < m$, $m = 1,2, \dots$ dır.

$ii)$ $0 < \alpha < \beta < \infty$ ise $1 \leq p < \infty$ ve $0 < \theta < 1$ için

$$(E, D(A^m))_{\theta,p} = (E, D(A^\beta))_{\frac{\alpha}{m}\theta,p}$$

eşitliği geçerlidir.

7.2.4. Teorem Her $a \in A_0 \cap A_1$ için,

$$\|\alpha\|_{[A_0\,,\,A_1]\theta} \leq c_\theta\|\alpha\|_{A_0}^{1-\theta}\|\alpha\|_{A_1}^{\theta}$$

olacak şekilde $0 < \theta < 1$ aralığında bir pozitif c_θ sayısı vardır.

7.3. Süreksiz Katsayılı ve Geçiş Şartlı Problem İfadesi

Bu kısımda

$$L(D)u := -p(x)u''(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x\epsilon[-1,0) \cup (0,1] \tag{7.1}$$

$$L_k u = a_k u(-1) + \beta_k u(-0) + \delta_k u(+0) + \gamma_k u(1) + (B_{k1}u)(-1) + (B_{k2}u)(-0) + (C_{k1}u)(+0) + (C_{k2}u)(1) = g_k \ , \ k = 1, 2, 3, 4 \tag{7.2}$$

problemini göz önüne alacağız. Burada a_k, β_k, δ_k, γ_k, g_k kompleks sayılar

$x \, \epsilon \, [-1,0)$ için $p(x) \coloneqq p_1$, $f(x) := f_1(x)$

$x \, \epsilon \, (0,1]$ için $p(x) \coloneqq p_2$, $f(x) := f_2(x)$

olup p_1 ve p_2 reel değerli fonksiyonlar, $f \, \epsilon \, L_2(-1, 1)$ kompleks reel değerli fonksiyon ve x_k herhangi bir iç noktadır.

A, B_{kv} , C_{kv} $(k = 1, 2, 3, 4 ; \ v = 1, 2)$ için aşağıdaki şartlar sağlansın:

Şart 1

$B_{kv} : L_2(-1, 1) \to L_2(-1, 1)$, $C_{kv} : L_2(-1, 1) \to L_2(-1, 1)$
lineer sınırlı operatörlerdir ve Herhangi $u_v \in W^m(-1, 0, 1)$,
$(u = u_1 + u_2; \ m = 0, 2)$ için $\sigma > 0$ vardır.

$$\|B_{kv}u_v\|_{W^m(-1,0,1)} \leq \varepsilon \|u_v\|_{W^m(-1+\sigma,-\sigma) + W^m(\sigma,1-\sigma)},$$

$$\|C_{kv}u_v\|_{W^m(-1,0,1)} \leq \varepsilon \|u_v\|_{W^m(-1+\sigma,-\sigma) + W^m(\sigma,1-\sigma)},$$

$$k = 1, 2, 3, 4, \qquad v = 1, 2. \tag{7.3}$$

Şart 2

$i)$ E ve F banach uzayları için $E \subset F$ gömülmesi kompakttır.

$ii)$ Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için ve tüm $x_v \in [\, 0, 1 \,]$ için aşağıdaki eşitsizlikler sağlansın:

$$\|(B_{kv}u_v)(x_v)\|_F \;\leq\; \varepsilon\,\|u_v(x_v)\|_E \;+\; C(\varepsilon)\|u_v(x_v)\|_F,$$

$$\|(C_{kv}u_v)(x_v)\|_E \;\leq\; \varepsilon\,\|u_v(x_v)\|_E \;+\; C(\varepsilon)\|u_v(x_v)\|_F,$$

$$k = 1,2,3,4, \;\; v = 1,2.$$

Gösterim:

$i)$ $G_{\varepsilon,l} := \{\lambda \in \mathbb{C} |\; |\arg\lambda\;| \geq \varepsilon,\;\; |\lambda| \geq l\}$,
$ii)$ $\phi_k u := a_k u(-1) + \beta_k u(-0) + \delta_k u(+0) + \gamma_k u(1)$,
$iii)$ $L_0(D)u := \; -p(x)u''(x)$.

$W^2(-1,0,1)$ ve $L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ H hilbert uzaylarında λ ya bağlı olarak aşağıdaki normları göz önüne alacağız.

$$\sum_{j=1}^{2}\|u_j\|_{W^m(-1,0,1)} \;\leq\; \left(\sum_{j=1}^{2}\left(\|u_j\|^2_{W^m(-1,0,1)} + |\,\lambda|^2\|u_j\|^2_{L_2(-1,1)}\right)\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\sum_{j=1}^{2}\|h\|_{L_2(-1,1)\times\mathbb{C}^4} \;\leq\; \left(\sum_{j=1}^{2}\|f_j\|^2_{L_2(-1,1)} + |\,\lambda|^{\frac{3}{2}}\sum_{j=1}^{4}|g_j|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$h := \;(f_v\,, g_1, g_2, g_3, g_4), \quad\;\; v = 1,2.$$

7.4. Sınır Değer Probleminin Çözümü Ve Spektrumu

$\mathbb{L}, \mathbb{L}_0, \widetilde{\mathbb{L}} :\; W^2(-1,0,1) \rightarrow L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ sınırlı lineer operatörler ve

$$\mathbb{L}u := (L(D)u, L_1\,, L_2\,, L_3\,, L_4),$$

$$\mathbb{L}_0 u := (L_0(D)u \;-\lambda u\,, \phi_1\,, \phi_2\,, \phi_3\,, \phi_4),$$

$$\widetilde{\mathbb{L}}u := \;\mathbb{L}_0 u + t\,(\,\mathbb{L} - \mathbb{L}_0)u, \;\; 0 \leq t \leq 1$$

diferensiyel denklemlerini göz önüne alalım.

7.4.1. Lemma **(**1) şartının sağlandığını kabul edelim.

$$c_1 \sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{\mathbb{L}}u_j\|_{L_2(-1,1)\times\mathbb{C}^4} \leq \sum_{j=1}^{2} \|u_j\|_{W^2(-1,0,1)} \leq c_2 \sum_{j=1}^{2} \|\widetilde{\mathbb{L}}u_j\|_{L_2(-1,1)\times\mathbb{C}^4} \tag{7.4}$$

burada c_1, c_2 sabitleri $\lambda,\ t,$ ve u ya bağlı değildir.

İspat. $\widetilde{\mathbb{L}}u = h$ olmak üzere

$$\mathbb{L}_0 u = h + Tu, \tag{7.5}$$

operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$Tu \quad := (T_1u\,, T_2u\,, T_3u\,, T_4u\,, T_5u\,) = (-tAu,$$

$$-t[(B_{11}u)(-1) + (B_{12}u)(-0) + (C_{11}u)(+0) + (C_{12}u)(1)],$$

$$-t[(B_{21}u)(-1) + (B_{22}u)(-0) + (C_{21}u)(+0) + (C_{22}u)(1)],$$

$$-t[(B_{31}u)(-1) + (B_{32}u)(-0) + (C_{31}u)(+0) + (C_{32}u)(1)],$$

$$-t[(B_{41}u)(-1) + (B_{42}u)(-0) + (C_{41}u)(+0) + (C_{42}u)(1)]\,),$$

$$h = \ (f_v\,, g_1\,, g_2\,, g_3\,, g_4\,),\ v = 1,2.$$

Şimdi, (Triebel,1978, Teorem 2, formül: 2.4.2./16) den $0 \leq s \leq k,\ 1 < p < \infty$ olmak üzere

$$W_p^s(-1,0,1) = (\,L_p(-1,1)\,, W_p^k(-1,0\,,1)\,)_{\frac{s}{k},p}$$

eşitliği bulunur. Dolayısıyla Teorem 7.2.4. den

$$\|u\|_{W^k(-1,0,1)} \leq C\|u\|_{L_2(-1,1)}^{1-\frac{s}{k}} \|u\|_{W^k(-1,0,1)}^{\frac{s}{k}}$$

olduğu görülür. Young eşitsizliği kullanılarak

$$|\lambda|^{k-s}\|u\|_{W^s(-1,0,1)} \leq C\ (|\lambda|^k\|u\|_{L_2(-1,1)})^{1-\frac{s}{k}}\|u\|_{W^k(-1,0,1)}^{\frac{s}{k}}$$

$$\leq C\left(|\lambda|^k\|u\|_{L_2(-1,1)} + \|u\|_{W^k(-1,0,1)}\right), \quad \lambda \in \mathbb{C} \tag{7.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz. Ayrıca, (Krein,1982, 1. Bölüm, 1. Kısım) dan

$$|\lambda|^{\frac{1}{2}}\|u\|_{L_2(-1,1)} \leq C\left(|\lambda|\|u\|_{L_2(-1,1)} + \|u\|_{W^1(-1,0,1)}\right), \quad \lambda \epsilon \mathbb{C} \tag{7.7}$$

eşitsizliğini elde ederiz. (Skubachevskii, 1984) kaynağında ki Teorem C.7 yardımıyla $\lambda \epsilon G_{\varepsilon,l}$ için $l_0 = l_0(\varepsilon) > 1$ olacak şekilde bir l_0 sayısı vardır ve (7.5) probleminin u çözümü için

$$\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{W^2(-1,0,1)} \leq c_1 \|h + Tu\|_{L_2(-1,1)\times\mathbb{C}^4} \tag{7.8}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şart 1 ve (7.6) göz önüne alınırsa,

$$\sum_{j=1}^{2}|\lambda|^{\frac{3}{4}}\left|tC_k u_j\right| \leq c_3 |\lambda|^{\frac{3}{4}} \sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{L_2(-1,1)} \leq c_3 |\lambda|^{-\frac{1}{4}}\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{W^2(-1,0,1)},$$

$$k = 1, 2, 3, 4 \tag{7.9}$$

eşitsizliği bulunur. (7.3), (7.6) ve (7.7) eşitsizliklerinden aşağıdaki eşitsizliği yazarız:

$$\sum_{j=1}^{2}|\lambda|^{\frac{3}{4}}\left|t\left[B_{k1}u_j(-1) + C_{k1}u_j(+0)\right]\right|$$

$$\leq c_4|\lambda|^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\left[B_{k1}u_j(-1) + C_{k1}u_j(+0)\right]\right\|_{W^1(-1,0,1)}\right.$$

$$\left.+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2}\left\|\left[B_{k1}u_j(-1) + C_{k1}u_j(+0)\right]\right\|_{L_2(-1,1)}\right)$$

$$\leq c_5\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\left[B_{k1}u_j(-1) + C_{k1}u_j(+0)\right]\right\|_{W^2(-1,0,1)}\right.$$

$$+|\lambda|\sum_{j=1}^{2}\left\|\left[B_{k1}u_j(-1)+C_{k1}u_j(+0)\right]\right\|_{L_2(-1,1)}\Bigg)$$

$$\leq c_5\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j(-1)+u_j(+0)\right\|_{W^2(-1+\sigma,-\sigma)\dotplus W^2(\sigma,1-\sigma)}\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j(-1)+u_j(+0)\right\|_{L_2(-1+\sigma,-\sigma)\dotplus L_2(\sigma,1-\sigma)}\right),$$

$$k=1,2,3,4. \qquad (7.10)$$

$$\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in[\![-1+\sigma,-\sigma]\!]\cup[\sigma,1-\sigma]\\ 0, & x\in\left[-1,-1+\frac{\sigma}{2}\right]\cup\left[-\frac{\sigma}{2},\frac{\sigma}{2}\right]\cup\left[1-\frac{\sigma}{2},1\right]\end{cases}$$

olacak şekilde her $x\in[-1,1]$ için $0\leq\xi(x)\leq 1$ ve $\xi(x)\in C^{\infty}[\![-1,1]\!]$ şeklinde belirlenen bir $\xi(x)$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$B_{k1}u(-1)$ ve $C_{k1}u_j(+0)$ için (7.10) ve (7.6) eşitsizliklerinden

$$\sum_{j=1}^{2}|\lambda|^{\frac{3}{4}}\left|t\left[B_{k1}u_j(-1)+C_{k1}u_j(+0)\right]\right|$$

$$\leq c_6\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j(-1)+u_j(+0)\right\|_{W^2(-1+\sigma,-\sigma)\dotplus W^2(\sigma,1-\sigma)}$$

$$\leq c_6\sum_{j=1}^{2}\left\|\xi\left(u_j(-1)+u_j(+0)\right)\right\|_{W^2(-1,0,1)}$$

$$\leq c_7\sum_{j=1}^{2}\left\|(L_0j-\lambda\mathrm{I})\xi\left(u_j(-1)+u_j(+0)\right)\right\|_{L_2(-1,1)}$$

$$\leq c_8\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|(L_0j-\lambda\mathrm{I})\left(u_j(-1)+u_j(+0)\right)\right\|_{L_2(-1,1)}\right.$$

$$+\sum_{J=1}^{2}\left\|\left(u_j(-1)+u_j(+0)\right)\right\|_{W^1(-1,0,1)}\Bigg)$$

$$\leq c_9\left(\sum_{J=1}^{2}\left\|(L_0 j-\lambda \mathrm{I})\left(u_j(-1)+u_j(+0)\right)\right\|_{L_2(-1,1)}\right.$$

$$\left.+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\sum_{J=1}^{2}\left\|u_j(-1)+u_j(+0)\right\|_{W^2(-1,0,1)}\right)$$

(7.11)

elde edilir ve $B_{k2}u(-0)$ ve $C_{k2}u(1)$ için, benzer şekilde

$$\sum_{j=1}^{2}|\lambda|^{\frac{3}{4}}\left|t\left[B_{k2}u_j(-0)+C_{k2}u_j(1)\right]\right|$$

$$\leq c_9\left(\sum_{j=1}^{2}\left\|\left(L_{0j}-\lambda \mathrm{I}\right)\left(\mathrm{u_j}(-1)+\mathrm{u_j}(+0)\right)\right\|_{L_2(-1,1)}\right)$$

$$+|\lambda|^{\frac{1}{2}}\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j(-1)+u_j(+0)\right\|_{W^2(-1,0,1)}\Bigg)$$

(7.12)

bulunur. (7.8) ve (7.12) eşitsizliklerinden

$$\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{W^2(-1,0,1)} \leq c_{10}\sum_{j=1}^{2}\left\|\tilde{L}u_j\right\|_{L_2(-1,1)x\mathbb{C}^4}+C(\lambda)\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{W^2(-1,0,1)}$$

olduğu görülür. Böylece $l_1 > l_0$ seçersek, $C(l_1) < \frac{1}{2}$ için

$$\sum_{j=1}^{2}\left\|u_j\right\|_{W^2(-1,0,1)} \leq C\sum_{j=1}^{2}\left\|\tilde{L}u_j\right\|_{L_2(-1,1)x\mathbb{C}^4}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (7.4) eşitsizliğinin sağ tarafının doğru olduğu görülür. Aynı şekilde sol tarafı ise şart (1) ve (7.9) – (7.11) eşitsizliklerinden elde edilir.

7.4.1. Teorem (1) şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$i)$ Herhangi $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in G_{\varepsilon,l_1}$ için l_1 vardır. $\mathbb{L}(\lambda)$ operatörünün bir sınırlı tersi $\mathbb{L}^{-1}(\lambda) : L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4 \to W^2(-1,0,1)$ vardır.

$ii)$ Her $\lambda \epsilon \mathbb{C}$ için $ind\, \mathbb{L}(\lambda) = 0$ ve $\mathbb{L}(\lambda) : W^2(-1,0,1) \to L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ bir Fredholm operatördür.

İspat.

$i)$ Lemma 7.2.1 den dolayı, Lemma 7.4.1 ve (Krein, 1982, bölüm 1) $\lambda \in G_{\varepsilon,l_1}$ için $\mathbb{L}(\lambda)$ nın bir sınırlı tersi vardır.

$ii)$ I, $L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ de birim operatör olmak üzere $\lambda \in G_{\varepsilon,l_1}$ ve $\lambda \epsilon \mathbb{C}$ için $\mathbb{L}(\lambda)\mathbb{L}^{-1}(\mu) = I + (\mathbb{L}(\lambda) - \mathbb{L}(\mu))\mathbb{L}^{-1}(\mu)$ eşitliğini elde ederiz. Şart 1 göz önüne alınırsa $\mathbb{L}(\lambda) - \mathbb{L}(\mu) : W^1(-1,0,1) \longrightarrow L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ operatörü sınırlıdır. $W^2(-1,0,1)$ den $W^1(-1,0,1)$ ye kompakt gömülmesi ve teorem 7.2.2 den dolayı $(\mathbb{L}(\lambda) - \mathbb{L}(\mu))\mathbb{L}^{-1}(\mu) : L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4 \longrightarrow L_2(-1,1) \times \mathbb{C}^4$ operatörü kompakttır. Böylece $I + (\mathbb{L}(\lambda) - \mathbb{L}(\mu))\mathbb{L}^{-1}(\mu)$ operatörü bir Fredholm operatördür ve $\operatorname{ind}\left[\mathrm{I} + \left(\mathbb{L}(\lambda) - \mathbb{L}(\mu)\right)\mathbb{L}^{-1}(\mu)\right] = 0$. Böylece $\mathbb{L}(\lambda)\mathbb{L}^{-1}(\mu)$ bir Fredholm operatördür. $\mathbb{L}(\lambda)$ operatörü $\mathbb{L}^{-1}(\lambda)$ sınırlı ters operatörüne sahip olduğundan bir Fredholm operatördür. O halde teorem 7.2.1. den,

$$\operatorname{ind}\left(\mathbb{L}(\lambda)\mathbb{L}^{-1}(\mu)\right) = \operatorname{ind}\left(\mathbb{L}(\lambda)\right) = 0$$

olduğu görülür.

7.5. Homojen Sınır Şartları İçin Diferensiyel Operatör

Aşağıdaki sınır değer problemini

$L_{01}(D)u := -p(x)u''(x) = f(x), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1]$

$$L_k u \; = \; a_k u(-1) + \beta_k u(-0) + \delta_k u(+0) + \gamma_k u(1)$$
$$+(B_{k1}u)(-1) + (B_{k2}u)(-0) + (C_{k1}u)(+0) + (C_{k2}u)(1) = 0,$$
$$k = 1,2,3,4$$

ve sınırlı olmayan $\mathcal{L} : \; L_2(-1,1) \; \to \; L_2(-1,1)$ operatörünü göz önüne alalım. Burada

$$\mathcal{L}u \;\; := \;\; L_{01}(D)u,$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) := \; W^2(-1,0,1) = \; \{u \in \; W^2(-1,0,1) \mid L_k u = 0 \, , \; k = 1,2,3,4 \; \}$$

şeklinde verilmektedir.

7.5.1. Teorem (1) Şartının sağlandığını kabul edelim. Bu durumda

$i)$ $\mathcal{L}$ bir Fredholm operatördür ve $\mathrm{ind}\mathcal{L} = 0$,

$ii)$ $\lambda \notin \sigma(\mathcal{L})$ için $R(\lambda, \mathcal{L}) : \; L_2(-1,1) \; \to \; L_2(-1,1)$ rezolventi bir kompakt operatördür,

$iii)$ $\sigma(\mathcal{L})$ spektrumu ayrıktır,

$iv)$ Her $0 < \varepsilon < \pi$ için, $\sigma(\mathcal{L})$ spektrumunun belki sonlu tanesi hariç diğer bütün noktaları $|\arg \lambda| < \varepsilon$ ile tanımlı kompleks düzlemin bir sektörüne aittir.

İspat.

$i)$ Teorem (7.2.1) den elde edilebilir.

$ii)$ Teorem (7.4.1) den

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} : \; L_2(-1,1) \to W^2(-1,0,1)$$

olan sınırlı bir operatör vardır. Bu nedenle $W^2(-1,0,1)$ nin $L_2(-1,1)$ içine olan gömülmesinin kompakt olmasından dolayı

$$(\mathcal{L} - \lambda I)^{-1} : \; L_2(-1,1) \to L_2(-1,1)$$

operatörü kompakttır.

$iii)$ (Kato, 1966, Teorem 6.29) dan $R(\lambda, \mathcal{L})$ kompakt olduğundan $\sigma(\mathcal{L})$ spektrumu sonlu yığılma noktası hariç tamamen cebirsel katı sonlu olan izole öz değerlerden oluşur.

$iv)$ (Dunford, 1963, bölüm 15, kısım 6) ve (iii) den her $\lambda > 0$ için $\sigma(\mathcal{L})$ spektrumunun, bu noktaların belki sonlu tanesi hariç, diğer tüm noktaları $|arg\lambda| < \varepsilon$ sektörüne aittir.

8. MATERYAL VE METOT

Bu tez çalışmasında kaynaklar kısmında bulunan aşağıdaki materyal ve metotlardan yararlanılmıştır. Fonksiyonel analizden ve reel analizden bazı temel tanımlara ve teoremlere yer verilmiştir. Süreksiz katsayılı sınır değer probleminin çözümü ile ilgili tanım ve teoremleri içermektedir. Adi diferensiyel denklemler için sınır değer probleminin klasik teorisi genellikle sürekli katsayılı ve sınır şartlarında sadece tanım aralığının uç noktalarındaki değerlerini içeren problemler ele alınır. Sürekli katsayılı problemler için tavsiye edilen materyal ve metotları, incelediğimiz süreksiz katsayılı problemlere uygulayabilmek için bazı yöntemler daha da geliştirilmiştir. Sınır şartlarına geçiş şartlarının da eklendiği durumda temel çözüm sisteminin seçilmesi ve probleme uygun Hilbert uzayının inşası yapılmıştır. (Walter, 1973; Fulton, 1977; Mukhtarov ve ark., 2004).

9. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde göz önüne alınan problemin, modern teknolojiler ve fizik temelli olan teorik ve pratik uygulama alanlarının yeteri kadar geniş olduğu söylenebilir. Tezde uyguladığımız yöntemlerle daha yüksek mertebeden diferensiyel denklemler ve daha farklı sınır şartlarının oluşturulması (iç noktalı ve fonksiyonel şartlar gibi) yoluyla farklı sınır değer problemleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

Adams, R.A., “Sobolev spaces”, ***Academic Press***, New York, (1975).

Altınışık, N., “Sınır Şartlarında Öz değer Parametre Bulunduran Süreksiz Katsayılı Sınır Değer Problemi”, Doktora Tezi, ***Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Samsun, (1998).

Aliev B. A., Yakubov Ya., “Elliptic-differential operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions”, ***Advances in Differential Equations***, Vol. 11, Num. 10, 1081-1110 (2006).

Aydemir, K., “Soyut Lineer Operatörle Etkilenmiş Bir Süreksiz Sturm-Liouville Probleminin Özdeğerleri”, Yüksek Lisans Tezi, ***Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Tokat, (2010).

Birkhoff, G. D., “Boundary Value and Expantion Problems of Ordinary Linear Differential Equations”, ***Trans. Amer. Math. Soc.***, Vol. 9, pp. 373 – 395 (1908).

Borg, G., “Eine umkehrung der Sturm-Liouvilleschen Eigenwertaufgabe”, ***Acta Math***, 78, 1-96 (1946).

Büyük, A., “Geçiş Şartlı Bir Sınır Değer Problemine Ait Diferensiyel Operatörün Fredholm ve İzomorfizmi”, Yüksek Lisans Tezi, ***Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Amasya, (2015).

Çakar, Ö., “Fonksiyonel Analize Giriş I”, ***Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları***, Ankara (2007).

Dunford, N., Schwartz, J. T., “Linear Operators II, Spectral Theory”, ***Interscience***, New York, (1963).

Lions, P. L., Pacella, F. and Tricarico, M., “Best Constans İn Sobolev İnequalities for Functions Vanishing on Some Part of the Boundary and Related Questions”, ***Ind. Univ. Math. J.***, Vol. 37, 301-324 (1988).

Fulton, C.T., “Two – point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions”, ***Proc. Roy. Soc. Edinburgh***, 77A, p.293-308 (1977).

Hilbert, D., Nordheim, L., and Von Neumann, J., “Über die Grundlagen der Quantenmechanik”, ***Mathematische Annalen 98***, pp. 1-30, (Reprinted in von Neumann [1961a].) (1927).

Hinton, D. B., “An Expansion Theorem for Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in The Boundary Condition”, ***Quart. J. Math. Oxford***, vol. 30, No: 2, 33-42 (1979).

Kadakal, M., “Sınır Şartlarının Birinde Öz değer Parametresi Bulunduran Regüler Sınır Değer-Geçiş Problemi”, Doktora Tezi, ***Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü***, Samsun, (2000).

Kandemir M. and Mukhtarov O. Sh., Yakubov Ya., “Irregular Boundary Value Problems with Discontinuous Coefficients and The Eigenvalue Parameter”, ***Mediterranean Journal of Mathematics***, 6, 317-338 (2009).

Kandemir M., “Diferensiyel Denklemler”, ***Pegem Akademi Yayıncılık***, Ankara, (2015).

Kandemir, M., Mukhtarov, O., Yakubov, Y., “Irregular boundary value problems with discontinuous coefficients and the eigenvalue parameter” ***Mediterranean Journal of Mathematics,*** 6, 317-338. SCI Expanded, (2009).

Kandemir, M., Yakubov, Y., “Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions, and a linear spectral parameter”, ***Israel Journal of Mathematics,*** 180, 255-270. SCI (2010).

Kandemir, M., “Nonlocal boundary value problems with transmission conditions”, ***Gulf j. of math.*** vol. 3, issue 1, 1-17 (2015).

Kato, T., “Perturbation Theory for Linear Operators”, ***Springer – Verlag***, Berlin – Heidelberg, New York, (1966).

Kolmogorov, A.N. and Fomin, S.V., “Functional Analysis”, ***Graylock Pres, N.Y.***, (1957).

Kostyuchenko, A. G. and Sargsyan, I. S., “Distribution of Eigenvalues”, ***Nauka, Moskow,*** Russian, (1979).

Krein, S. G., “Lineer Equations in Banach Spaces”, Birkhauser, (1982).

Kreyszig, E., “Introductory Functional Analysis with Applications”, ***John Wiley & Sons, Inc***., New York, (1989).

Lang, “Undergraduate Analysis”, ***Springer – Verlag***, New York (1983).

Likov A. V., Mikhailov Yu. A., “The Theory of Heat and Mass Transfer”, ***Qosenergaizdat***, Russian, (1963).

Mclaughlin, J. R., “Analytical Methods for Recovering Coefficients in Differential Equations From Spectral Data”, ***SIAM rev***. 28, 53-72 (1986).

Musayev, B., “Fonksiyonel Analiz”, ***Dumlupınar Ünv. Balcı Yayın***, Kütahya, (2000).

Mukhtarov, O. Sh., Olğar, H., Aydemir, K., “Resolvent Operator and Spectrum of New Type Boundary Value Problems”, ***Filomat***, 29:7 , 1671-1680 (2015).

Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., “New type Sturm-Liouville problems in associated Hilbert spaces, Journal of Function Spaces and Applications”, vol., Article ID 606815 (2014).

Mukhtarov, O. Sh., “Geçiş Şartları Bulunduran ve Esas Kısmı Kendine Eşlenik Olan Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotiği” ***Dep. V VİNİTİ 03.06.88***, 4400-B.88, 235, Moskova (1988).

Mukhtarov O. Sh. and Demir H., “Coerciveness of the discontinuous initial-boundary value problem for parabolic equations”, ***Israel J. Math.*** V. 114. P. 239–252 (1999).

Mukhtarov O. Sh., Kandemir M., Kuruoğlu N., “Distribution of eigenvalues for the discontinuous boundary value problem with functional manypoint conditions”, ***Israel J. Math.*** V. 129. P. 143–156 (2002).

Mukhtarov, O. Sh., Kandemir**,** M., “Asymptotic behavior of eigenvalues for the discontinuous boundary-value problem with functional- transmission conditions” *Acta Mathematica Scientia,* 22 B (3), 335-345. SCI Expanded, (2002).

Mukhtarov, O. Sh. and Yakubov S., “Problems for Ordinary Differential Equations with Transmission Conditions”, ***Applicable Analysis***, 81, 1033-1064 (2002).

Mukhtarov, O.Sh., Kadakal M., Muhtarov, F.S., “On Discontinuous Sturm-Liouville Problems with Transmission Conditions”, ***J. Math. Kyoto Univ.***, Vol. 44, Number 4, 779-798 (2004).

Naimark, M. N., “Linear Differential Operators”, ***Ungar***, New York, (1967).

Naimark, M.A. "Linear Differential Operators", ***Frederick Ungar Publ. Co.***, New York, 144 s. (1968).

Natanson, I. P., “Theory of Functions of a Real Variable”, 2nd ed., Gostejizdat, Moskow, (1957).

Papkovich P. F., “Two Problems of Bend Theory of Thin Elastic Plates”, ***PMM***, 5(3), 359-374 (1941).

Pivovarchik, V.N., “Direct and Inverse Problem for a Damped String” ***J. Operator Theory,*** 42, 180-220 (1999).

Poisson, M., “Surla Maniere D’ Experimer Les Fonctions Par Des Series Se Quanties Periodiques, Et Sur L’ Usage De Cette Trnsformation Dans La Resdution De Differents Problems”, ***18eme cahier tome XI de l’ecole politechnique de Paris***, (1820).

Ramsay, J.O., “When The Data Are Functions” Psychometrica, 47(4), 379-396 (1982).

Rasulov, M. L., “Methods of Contour İntegration”, ***Nort Holland Publishing Company***, Amsterdam, (1967).

Russakovskiy, E. M., “Sınır Şartları Polinom Biçiminde Özdeğer Parametresi İçeren Sınr Değer Probleminin Operatör Yorumu”, Funk. Analizi eko priloj. 9 No:4, 91-92 (Rusca) (1975).

Schneider, A., “A Note on Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions”, ***Math. Z. 136***, 163-167 (1974).

Shakhmurov V. B., “Linear And Nonlinear Abstract Elliptic Equations With VMO Coefficients And Applications”, ***Fixed Point Theory and Applications***, V. 2013, no 6., (2013).

Shkalikov, A. A., “Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations with a Parameter in Boundary Conditions”, ***Trudy., Sem., Imeny***, I.G.Petrovsgo, 9, 190-229 (1983).

Skubachevskii A. L., “Nonlocal Elliptic Problems With A Parameter”, ***Math. Sb. 49***, 197-206 (1984).

Skubachevskii A. L., “Elliptic Functional Differential Equations and Applications, ***Birkhasuer Verlag***, Basel, (1997).

Soykan, Y., “Foksiyonel Analiz”, ***Nobel Akademi Yayınları***, Ankara, (2012).

Şuhubi, E. S, Fonksiyonel Analiz, ***İTÜ Vakfı Yayınları***, İstanbul, (2001).

Tamarkin, J. D., “Some General Problems of The Theory of Ordinary Linear Differantial Equations and Expansions of an Arbitrary Function in Series of Fundamental Functions”, ***Math. Z. 27***, 1 – 54 (1928).

Titeux, I. and Yakubov, Ya., “Completeness of Root Functions for Thermal Conduction in a Strip With Piecewise Continuous Coefficients”, Math, ***Models and Methods in Applied Sciences***, 7, No. **7**, 1035-1050 (1997).

Titchmars, E.C., “Eigen Functions Expansion Associated with Second Order Differential Equations I”, ***second edn. Oxford Univ. press***, London, (1962).

Triebel, H., “Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators”, ***Nort-Holland Publishing Company,*** Amsterdam, New York, Oxford, (1978).

Walter, J., “Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions”, ***Math. Z. 133***, 301-312 (1973).

Yakubov, S., “A Nonlocal Boundary Value Problem for Elliptic Differential-Operator Equations and Applications”, ***Integral Equations and Operator Theory***, 35, 485-506 (1999).

Yakubov, S., Yakubov Ya., “Differential-Operator Equation Ordinary and Partial Differential Equation”, ***Chapman and Hall/CRC Boca Raton***, London New York Washington, D. C, (1999).

Yakubov, Ya., “Irregular Boundary Value Problems For Ordinary Differential Equations”, ***Analysis 18***, 359-402 (1998).

Yakubov, S., “Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators”, ***Longman, Scientific***, Technical, (1994).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, adı	:	AŞIK, Tuğba
Uyruğu	:	T.C.
Doğum tarihi ve yeri	:	16.06.1988 - Amasya
Medeni hali	:	Evli
Telefon	:	0506 531 04 91
E – posta	:	matematik.ogretmeni@hotmail.com

Eğitim Derece		**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet Tarihi**
Yüksek Lisans	:	Amasya Üniversitesi / Matematik Anabilim Dalı	2016
Lisans	:	Cumhuriyet Üniversitesi / Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği	2012
Lise	:	Amasya Anadolu Lisesi	2006

Yabancı Dili : İngilizce

Yayınlar :

1. M. Kandemir**,** T. Aşık (Dağıstan), "Süreksiz Katsayılı, Spektral Parametreli ve Geçiş Şartlı Sınır Değer Problemi", ***13. Matematik sempozyumu*** (Matder-Karabük Ünv. 15-17 Mayıs 2014).

2. T. Aşık, M. Kandemir, Süreksiz Katsayılı Ve Geçiş Şartlı Lokal Olmayan Sınır Değer Problemi", ***14. Matematik sempozyumu*** (Matder - Niğde Ünv. 14-16 Mayıs 2015).

3. M. Kandemir. T. Aşık, “Isomorphism and Coerciveness of Fourth Order Discontinuous Boundary Value Problems with Transmission Conditions.” ***International Conference on Mathematics and Mathematics Education***, (Fırat University, Elazığ, 12-14 May 2016).

Proje	:	
1. Proje Başlığı	:	“Geçiş şartlı ve süreksiz katsayılı sınır değer Probleminin özdeğerleri ve özvektörlerinin dağılımı” (BAP, 02.10.2015).
Proje Yürütücüsü	:	Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR
Proje Ekibi	:	1. Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU
		2. Tuğba AŞIK
		3. Ahmet BÜYÜK

İlgi Alanları	:	Matematikle ilgili gelişmeleri takip etmek.
Hobiler	:	Bilgisayar teknolojileri ve kitap okumak.