T.C

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

BÜŞRA FİDAN

OCAK

KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Büşra FİDAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2019

Büşra FİDAN tarafından hazırlanan "Kosimplektik Manifoldun Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/ OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………...

Başkan: Prof. Dr. Mehmet ATÇEKEN
Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Tevfik ŞAHİN
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum …………………

Tez Savunma Tarihi: 22/01/2019

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………………

Doç. Dr. Meryem EVECEN
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

(imza)

Büşra FİDAN

…/…/…

KOSİMPLEKTİK MANİFOLDUN KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

(Yüksek Lisans Tezi)

Büşra FİDAN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Bu tezde, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldların geometrisi çalışıldı. Birinci bölümde literatür özeti, konunun güncelliği ve tez konusuyla ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgiler verildi. İkinci bölümde çalışmamız için gerekli olan bazı temel tanım ve teoremlere yer verildi. Üçüncü bölümde, kontak metrik manifoldlar hakkında bilgi verilerek, kosimplektik manifoldlar tanıtıldı. Dördüncü bölüm tezin orijinal bölümü olup, bu bölümde kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldları ve kosimplektik uzay formların kontak pseudo-slant altmanifoldları çalışıldı. Geometriye katkı yapacağını düşündüğümüz bazı sonuçlar elde edildi. Son olarak beşinci bölümde, problemimizden ortaya çıkan sonuç ve öneriler verildi.

Sayfa Adedi : **72**
Anahtar Kelimeler : **Kosimplektik manifold, Slant altmanifold, Kontak pseudo-slant altmanifold.**
Danışman : **Dr. Öğr. Üyesi Süleyman DİRİK**

ON THE GEOMETRY OF CONTACT PSEUDO-SLANT SUBMANIFOLDS IN A COSIMPLECTIC MANIFOLD

(M.Sc. Thesis)

Büşra FİDAN

AMASYA

UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

January 2019

ABSTRACT

In this thesis, the geometry of contact pseudo-slant submanifolds in a cosimplectic manifold is studied. In the first chapter, the literature survey, up to dateness of the subject and information about the thesis subject are given. In second chapter, some neccessary definitions and theorems our study are given. In the third chapter, informations about contact metric manifolds are given and cosimplectic manifolds are defined. Fourth chapter, as the original section part of the thesis, in this chapter, contact pseudo-slant submanifolds of cosimplectic manifold and contact pseudo-slant submanifolds cosimplectic space form of are studied. Some results that we think to contribute to geometry are obtained . Finally, in fifth chapter, the resultings and suggestions obtained from our problem are given.

Page Number : **72**

Key Words : **Cosimplectic manifold, Slant manifold, Contact pseudo-slant submanifold.**

Superviser : **Asst. Prof. Süleyman DİRİK**

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, çalışmalarım boyunca destekleyen; yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğretim Üyesi Süleyman DİRİK'e teşekkürü bir borç bilirim. Aynı zamanda tez dönemi boyunca benden desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen çok sevdiğim annem, babam ve kardeşlerime teşekkür ederim. Ayrıca, ihtiyaç duyduğumuz her an güleryüzleri ve tüm yardımsever tavırlarıyla destek olan enstitü personellerimize teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\bar{\nabla}$	Levi-Civita konneksiyonu
$\bar{\nabla}_Y$	Y ye göre kovaryant türev operatörü
$\chi(\bar{M})$	Vektör alanlarının cümlesi
$T_p\bar{M}$	p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi
$T_p^*\bar{M}$	p noktasındaki kotanjant vektörlerinin cümlesi
M	Altmanifold
λ	Sabit
$f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$	Her mertebede diferensiyellenebilir fonksiyon
TM	M altmanifoldun tanjant demeti
$T^\perp M$	M altmanifoldun bütün normal vektörlerinin demeti
D	Distribüsyon
D_θ	θ açılı slant distribüsyon
$D^\perp$	Anti-invaryant distribüsyon
(U,ϕ)	Harita
$\{U_\alpha\}$	$\bar{M}$ nin bir açık örtüsü
$\{(\phi_\alpha,U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$	Atlas (Koordinat komşuluğu)
$\vec{V}_p$	p noktasındaki tanjant vektör
$\chi(M)$	Vektör alanlarının cümlesi
$\chi^\perp(M)$	Kotanjant vektör alanlarının cümlesi
V	Reel sayılar cisminde tanımlı vektör uzayı
V^*	V ’nin dual uzayı

$C^{\infty}(\bar{M},\mathbb{R})$	$\bar{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların cümlesi
$[,]$	Lie operatörü
$X(f)$	f fonksiyonunun X e göre yöne göre türevi
f_*	f fonksiyonunun türev dönüşümü
$\bar{M}$	Diferensiyellenebilir manifoldlar
T	Torsiyon tensörü
$\bar{R}$	Riemann eğrilik tensörü
Q	Ricci operatörü
S	(2,0) tipinde Ricci tensörü
ρ	Skaler eğrilik fonksiyonu
$K(\pi)$	π düzleminin kesit eğriliği
σ	İkinci temel form
∇_{σ}	Üçüncü temel form
H	Ortalama eğrilik vektörü
A	Şekil operatörü
J	Kompleks yapı
N_J	Hemen hemen komplek yapının Nijenhuis tensörü
φ	Tensör alanı
ξ	Vektör alanı
η	1-form (ξ nin duali)
g	Riemann metriği
(φ,ξ,η)	Hemen hemen kontak yapı
(φ,ξ,η,g)	Hemen hemen kontak metrik yapı
$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$	(2n+1)-boyutlu, hemen hemen kontak metrik manifold
$\oplus$	Direkt toplam
$\otimes$	Tensör çarpımı

Φ	Temel 2-form
N_{φ}	Hemen hemen kontak metrik manifoldunun Nijenhuis tensörü
TX	$X \in \chi(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
NX	$X \in \chi(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
tV	$V \in \chi^{\perp}(M)$ için altmanifoldun teğet bileşeni
nV	$V \in \chi^{\perp}(M)$ için altmanifoldun normal bileşeni
$\bar{R}$	$\bar{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü
R	M nin Riemann eğrilik tensörü
θ_D	D distribüsyonunun slant açısı
ω_1	Anti-invaryant distribüsyon üzerindeki projeksiyon
ω_2	Slant distribüsyon üzerindeki projeksiyon
$\bar{M}(c)$	Kosimplektik uzay form
$\mathbb{R}$	Reel sayılar cismi

Kısaltmalar	**Açıklama**
A.Ü.	Amasya Üniversitesi

1.GİRİŞ

Geometri ; uzayı, uzaydaki nokta, eğri, düzlem ve cisimlerin özelliklerini inceleyen bir matematik dalıdır. Matematiğin önemli anabilimdallarından olan geometri, geçmişten günümüze matematiğin diğer anabilim dallarıyla da etkileşerek gelmiştir. Geometri de kendi içinde dallara ayrılmaktadır. Öklid geometrisi ve Öklid dışındaki geometriler olan örneğin; metriğe göre adlandırılanlar, Eliptik geometri, hiperbolik geometri gibi çoğaltılabilir.

Gauss, geometrik yapıların üzerine calculus kavramlarını uygulayıp; diferensiyel geometri temellerini inşa etmiştir. Riemann, Gauss'un fikirlerini faaliyete geçirerek manifold kavramını oluşturmuştur. Manifold, genel bir geometrik uzay olup; Öklid uzayı ile bağdaştırılabilir. Örneğin; doğru bir boyutlu manifold iken, düzlem iki boyutlu bir manifolddur denebilir. Daha genel bir ifade ile n boyutlu bir manifoldun her noktasının, n boyutlu Öklid uzayına homeomorf komşuluğundan bahsedebiliriz.

Uzayın sınırsız üç boyutlu manifold olması dış dünya algımızda kullandığımız bir kabuldür. Bu kabulümüzle gerçek algının alanının her yönü sağlanır ve bulunmak istenen nesnelerin olası uzayları kurulur ve bu kabul sürekli olarak uygulamalarla doğrulanır. Yapılan uygulamalar, uzayın sınırsız oluşunu deneysel bir kesinliğe ulaştırsa da uzayın sonsuzluğu buradan iddia edilemez. Böylece, Riemann dış dünyayı kavrayışımızı 3-boyutlu öklidyen geometri ile sınırlandırmıştır.

İnvaryant ve anti-ivaryant altmanifoldların bir genellemesi olan slant altmanifoldların geometrisi 1990 dan beri yoğun bir şekilde çalışılmaktadır. Bir hemen hemen Hermityen manifoldun slant altmanifoldları B. Y. Chen tarafından ortaya atılmıştır (Chen, 1990). Daha sonra $\mathbb{C}^2$ ve $\mathbb{C}^4$ kompleks manifoldların slant altmanifoldları örnekleri B.Y. Chen ve Y. Tazawa tarafından verilmiştir (Chen ve Tazawa, 1990). İlk olarak, hemen hemen kontak metrik manifoldun slant altmanifoldlarını tanımlayan ve inceleyen yazar A. Lotta'dır (Lotta, 1996). Lotta aynı zamanda K-Kontak manifoldların 3-boyutlu slant altmanifoldlarının geometrisi üzerine bir çok çalışma yapmıştır (Lotta, 1998). Daha Sonra, L. Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifoldun slant altmanifoldlarını calışmışlar ve çok sayıda enteresan sonuç elde etmişlerdir (Cabrerizo, Carriazo, Fernandez ve Fernandez, 2000(a); Cabrerizo ve diğerleri, 2000(b)). M. Khan ve arkadaşları 2007 ve 2011 de pseudo-slant altmanifoldlar ile ilgili çalışmışlar literatüre kazandırmışlardır. Son zamanlarda S. Dirik "Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine'' doktora tezi çalışmasıyla bu alana katkı sağlamıştır. Takip eden yıllarda M. Atçeken, S. Dirik ve Ü. Yıldırım' ın literatürde bu konuyla ilgili bir çok bilimsel çalışması mevcuttur.

Bu bilgiler ışığında, (φ,ξ,η,g) kontak metrik yapısıyla verilen (2n+1)-boyutlu $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifold ve bu manifold üzerindeki $\bar{\nabla}$ Levi-civita konneksiyonu olmak üzere, eğer her $X,Y\in\chi(\bar{M})$ için

$$(\bar{\nabla}_X\varphi)Y=0$$

şartını sağlıyorsa $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, ya *Kosimplektik manifold* adı verilir (Goldberg ve Yano,1969).

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, nın bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin slant altmanifold olması durumunda en önemli karakterizasyon φ nin M üzerine indirgenmiş olan T tensörünün

$$T^2=-\lambda(I-\eta\otimes\xi)$$

eşitliğini sağlayacak şekilde bir $\lambda=\cos^2\theta\in[0,1]$ sabitinin olmasıdır (Cabrerizo ve diğerleri, 2000(a)).

Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin bir altmanifoldu M olmak üzere

i) $TM=D^{\perp}\oplus D_\theta$, $\xi\in\Gamma(D_\theta)$

ii) $D^{\perp}$ distribüsyonu, anti-invaryant distribüsyon yani,

$\varphi D^{\perp}\subset(T^{\perp}M)$

iii) M -üzerinde D_θ, θ slant açılı slant distribüsyon olmak üzere D_θ ile $\varphi(D_\theta)$ arasındaki sabit slant açı $\theta\neq\dfrac{\pi}{2}$ dir.

Yukarıdaki şartları sağlayan iki ortogonal distribüsyon $D^{\perp}$ ve D_θ varsa M ye $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *kontak pseudo-slant altmanifoldu* adı verilir (Khan ve Khan, 2007).

Yukarıdaki çalışmalar doğrultusunda, bu tezde hemen hemen kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldları verilerek kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldları çalışıldı. Burada integrallenebilirlik durumları tartışıldı ve ayrıca D_θ-total geodezik, $D^\perp$-geodezik ve mixed geodeziklik kavramları verilerek, kontak pseudo-slant çarpım tanımlandı ve bununla ilgili bazı karakterizasyonlar verildi. Son olarak, kosimplektik uzay formlarında kontak pseudo-slant altmanifoldları çalışıldı. Kosimplektik uzay formlarında Ricci tensörü verilerek skaler eğriliği hesaplanmış ve aynı zamanda kosimplektik uzay formların total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldunun η-Einstein olduğu görüldü. Sonuçları destekleyen hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^9$ da 5-boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifold örneği kuruldu.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, iki kısımdan oluşmuştur. Birinci kısımda manifoldlar, ikinci kısımda altmanifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

2.1. Manifoldlar

2.1.1. Tanım

X, bir Hausdorff uzayı olması durumunda herhangi bir $U \subset X$ açık cümlesinden $V \subset \mathbb{R}^n$ bölgesine tanımlanan

$$\phi : U \rightarrow V \subset \mathbb{R}^n$$

ϕ homeomorfizmine X te tanımlanan *n-boyutlu koordinat sistemi* veya *harita*, U açık cümlesine de, bu haritasının *koordinat komşuluğu* denir. Bu harita (U, ϕ) şeklinde ifade edilir. Eğer, $y \in U$ ise

$$\phi(y) = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$$

dir. Burada $y_1, ..., y_n$ reel sayılarına (U, ϕ) haritasının koordinatlarıdır.

2.1.2. Tanım

$\bar{M}$, bir Hausdorff uzay olsun. $\bar{M}$ 'nin her noktasının E^n e veya E^n in bir U açık alt cümlesine homeomorf olan bir koordinat komşuluğu veya koordinat bölgesi varsa, $\bar{M}$ ye *n-boyutlu topolojik manifold* adı verilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.3. Tanım

$\mathbb{R}^n$ uzayının bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı reel değerli bir fonksiyon f olsun. Eğer f fonksiyonunun k. mertebeden kısmi türevleri var ve $k \leq r$ olmak üzere sürekli ise f ye r. mertebeden *diferensiyellenebilir fonksiyon* denir ve bu $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir. Eğer her $r \in Z^+$ için $f \in C^r(U, \mathbb{R})$ ise f ye *diferensiyellenebilir fonksiyon* denir ve $f \in C^\infty(U, \mathbb{R})$ ile gösterilir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.4. Tanım

$\bar{M}$, bir topolojik manifold ve $\bar{M}$ nin bir açık örtüsü $\{U_\alpha\}$ olsun. U_α açık cümlelerinin α indislerinin cümlesi A olmak üzere $\{U_\alpha\}$ açık örtüsü için $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ yazılır. E^n de U_α ya bir ψ_α homeomorfizmi altında homeomorf olan açık cümle W_α olsun. Bu durumda $M \subset \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ olacak şekilde meydana gelen (ψ_α, U_α) haritalarının $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ koleksiyonuna bir *atlas* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.5. Tanım

n-boyutlu $\bar{M}$, bir topolojik manifold ve $S = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_\alpha$ da $\bar{M}$ 'nin bir atlası olsun. $r \geq 1$ olması durumunda, eğer S atlası $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere her $\alpha, \beta \in A$ için

$$\phi_{\alpha\beta} = \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$\phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

fonksiyonları C^r -*sınıfında* iseler S ye C^r -*sınıfındandır* denir. Burada tanımlanan $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları ikişer ikişer homeomorfizmaların bileşkesi olduğundan birer homeomorfizmadır. Böylece $\phi_{\alpha\beta}$ ve $\phi_{\beta\alpha}$ fonksiyonları C^r sınıfından diferensiyellenebilir olduğundan S atlasına C^r -*sınıfından diferensiyellenebilirdir* denir.

Eğer S atlası $\bar{M}$ de C^r -sınıfından ise S ye $\bar{M}$ de bir C^r -*sınıfından diferensiyellenebilir yapı* denir.

Eğer bir $\bar{M}$ manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa $\bar{M}$ manifolduna r. mertebeden *diferensiyellenebilir manifold* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.6. Tanım

$\bar{M}$ ve $\bar{N}$ birer manifold olsun. $\phi : \bar{M} \to \bar{N}$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin bu dönüşümün tersi var ve aynı zamanda tersi de diferensiyellenebilirse bu dönüşüme bir *diffeomorfizma* denir. $\bar{M}$ den $\bar{N}$ ye bir diffeomorfizma varsa $\bar{M}$ ve $\bar{N}$ ye de *diffeomorfiktirler* denir.

2.1.7. Tanım

$f : E^n \to \mathbb{R}$ diferensiyellenebilir fonksiyon ve $\vec{V}_p \in T_p E^n$ olsun. Bu halde $\vec{V}_p = \overrightarrow{PQ}$ olmak üzere

$$\vec{V}_p\left[f \right] = \frac{d}{dt}(f(P_1 + t(Q_1 - P_1)),..., f(P_n + t(Q_n - P_n)))_{t=0}$$

şeklinde yazılan reel sayıya f *nin* $\vec{V}_p$ *vektörü yönündeki türevi* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.8. Tanım

$\bar{M}$, bir topolojik manifold ve $p \in \bar{M}$ olsun. $\bar{M}$ nin p noktasının bir komşuluğu U olmak üzere

$$C^\infty(U,\mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : U \xrightarrow{dif-bilir} \mathbb{R} \right\}$$

cümlesini ele alalım. Bu cümlede her $f, g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

i) Lineerlik
$V_p(af + bg) = aV_p(f) + bV_p(g)$

ii) Leibnitz
$V_p(g.f) = V_p(g).f(p) + g(p)V_p(f)$

özelliklerini sağlayan V_p fonksiyonuna $\bar{M}$ 'nin p noktasında tanımlanan *tanjant vektörü* denir. $\bar{M}$ manifoldunun p noktasında tanımlanan tanjant vektörlerinin cümlesini $T_p\bar{M}$ ile gösterilir (O' Neill, 1983).

Buna göre

$$T_p\bar{M} = \left\{ V_p \mid V_p : C^\infty(\bar{M},\mathbb{R}) \xrightarrow[leibnitz]{lineer} \mathbb{R} \right\}$$

dir. Bu cümlede iç işlem

$$\oplus : T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \to T_p\bar{M}$$

ve $f \in C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R})$ için

$$(V_p + W_p)[f] = V_p[f] + W_p[f]$$

şeklinde tanımlanır. Böylece $(T_p\bar{M}, \oplus)$ ikilisi bir abel grup olur. Bu cümlede dış işlem de

$$\odot : \mathbb{R} \times T_p\bar{M} \to T_p\bar{M}$$
$$\left(\lambda, V_p\right) \to \lambda \odot V_p : C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$$

ve $f \in C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R})$ için

$$(\lambda \odot V_p)\left[f\right] = \lambda V_p[f]$$

şeklinde tanımlanır. Bu işlemler birlikte $T_p\bar{M}$, reel sayılar cismi üzerinde tanımlanan bir vektör uzayı oluşturur. Bu uzaya $\bar{M}$ nin p-noktasında tanımlanan *tanjant uzayı* denir (Hacısalihoğlu, 1980).

2.1.9. Tanım

Reel sayılar cismi üzerinde verilen r tane vektör uzayı $V_1, V_2, V_3, ..., V_r$ olsun.

$$f : V_1 \times V_2 \times V_3, ..., V_r \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $1 \le i \le r$ olmak üzere $u_i, v_i \in V_i$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için

$$f(u_1, ..., u_{i-1}, av_i + bu_i, v_{i+1}, ..., v_r) = af(v_1, ..., v_{i-1}, v_i, ..., v_r) + bf(v_1, ..., v_{i-1}, u_i, ..., v_r)$$

şartını sağlıyorsa f fonksiyonuna *r-lineer fonksiyon* denir (Hacısalihoğlu, 1983).

2.1.10. Tanım

$\bar{M}$, bir n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold ve $p \in \bar{M}$ noktasında tanımlanan tanjant uzay da $T_p\bar{M}$ olsun. $T_p\bar{M}$ nin dual uzayına $\bar{M}$ nin p noktasındaki *kotanjant uzayı* denir. $\bar{M}$ nin p noktasındaki kotanjant uzayı $T_p^*\bar{M}$ ile gösterilir. Buna göre

$$T_p^*\bar{M} = \left\{ \omega_p \mid \omega_p : T_p\bar{M} \xrightarrow{lineer} \mathbb{R} \right\}$$

dir. $T_p^*\bar{M}$ uzayının herbir elemanına da $\bar{M}$ nin p noktasındaki *kotanjant vektörü* denir (O' Neill, 1983).

2.1.11. Tanım

Reel sayılar cismi üzerinde tamımlanan bir vektör uzayı V 'nin duali uzayı V^* olmak üzere

$$L(V^r, V^{s^*}; \mathbb{R}) = \left\{ f \mid f : V^r \times V^{s^*} \xrightarrow{(r+s)-lineer} \mathbb{R} \right\}$$

uzayında iç ve dış işlemler sırasıyla

$$(f \oplus g)(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) = f(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) + g(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s)$$

ve

$$(\lambda f)(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s) = \lambda f(\alpha_1,...,\alpha_r,\beta_1,...,\beta_s)$$

şeklinde tanımlanır. Bu uzaya r. mertebeden *kovaryant* s. mertebeden *kontravaryant tensör uzayı* adı verilir. Uzayın her bir elemanına da *(r,s)-tipinde bir tensör* denir (Boothby, 1986).

2.1.12. Tanım

$\bar{M}$, diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki fonksiyonların cümlesi $C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$ olsun. Her $f,g \in C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$ ve $a,b \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$X : C^\infty(\bar{M},\mathbb{R}) \to C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$$

dönüşümü

i) $X(ag+bf) = aX(g) + bX(f)$

ii) $X(gf) = X(g)f + gX(f)$

özelliklerini sağlıyorsa X'e $\bar{M}$ -üzerinde bir *vektör alanı* denir ve $\bar{M}$ üzerindeki vektör alanlarının cümlesi $\chi(\bar{M})$ ile gösterilir (Boothby, 1986).

Buna göre bir manifold üzerinde bir vektör alanı, manifoldun her bir noktasına bir tanjant uzayı karşılık getirir.

2.1.13. Tanım

$\bar{M}$, bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki vektör alanları cümlesi $\chi(\bar{M})$ olmak üzere $X,Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned}[,]: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\rightarrow \chi(\bar{M}) \\ (Y,X) &\rightarrow [Y,X]\end{aligned}$$

dönüşümü

i) 2-lineer, yani her $a,b \in \mathbb{R}$ için $X,Y,Z \in \chi(\bar{M})$ için

$[aY+bX,Z]=a[Y,Z]+b[X,Z]$

ii) Anti-simetrik yani her $X,Y \in \chi(\bar{M})$ için

$[Y,X]=-[X,Y]$

iii) Her $X,Y,Z \in \chi(\bar{M})$ için

$[[Y,X],Z]+[[Z,Y],X]+[[X,Z],Y]=0$

özellikleri sağlanıyorsa $[,]$ ye $\bar{M}$ -üzerinde bir *Lie operatörü* denir (Boothby, 1986).

Örnek

$\bar{M}$, diferensiyellenebilir manifold olsun her $X,Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned}[,]: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\rightarrow \chi(\bar{M}) \\ (X,Y) &\rightarrow [X,Y]\end{aligned}$$

dönüşümü her $f \in C^{\infty}(\bar{M},\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[Y,X]f = Y(X(f)) - X(Y(f)) \qquad (2.1)$$

şeklinde tanımlanıyor. Burada $[,]$, $\chi(\bar{M})$ üzerinde bir Lie operatörü ve $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanına göre yöne göre türevidir.

$\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold, her $X,Y,Z \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere $f \in C^{\infty}(\bar{M},\mathbb{R})$ fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie operatörü

i) $[Y,X](f+g)=[Y,X](f)+[Y,X](g)$

ii) $[Y,X](\lambda f)=\lambda[Y,X]f$

iii) $[Y,X](f.g)=g[Y,X](f)+f[Y,X](g)$

özelliklerini sağlar (Yano, 1984).

2.1.14. Teorem

$\bar{M}$, bir diferensiyellenebilir manifold olsun. O halde her $X,Y \in \chi(\bar{M})$ ve $f \in C^{\infty}(\bar{M},\mathbb{R})$ için

$$[fX,gY]=(fg)[X,Y]+fX(g)Y-gY(f)X \tag{2.2}$$

dir (Yano, 1984).

2.1.15. Tanım

m-boyutlu $\bar{M}$ ve n-boyutlu $\bar{N}$ diferensiyellenebilir manifoldları verilsin. $f:\bar{M}\to\bar{N}$ fonksiyonu p noktasında diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{*p} &: T_p\bar{M} \to T_{f(p)}\bar{N} \\ &V_p \to f_*|_p(V_p)=(\vec{V_p}[f_1]|_{f(p)},...,\vec{V_p}[f_n]|_{f(p)}) \end{aligned}$$

şeklinde verilen f_* dönüşümüne f 'nin *türev dönüşümü* denir. Eğer $g \in C(\bar{M},\mathbb{R})$, $f(p)$ nin komşuluğunda diferensiyellenebilir bir fonksiyon ise

$$(f_*(V_p))g=V_p(g\circ f)$$

şeklinde verilir (Yano, 1984).

2.1.16. Teorem

$\bar{M}$ ve $\bar{N}$ diferensiyellenebilir manifoldlar ve $f:\bar{M}\to\bar{N}$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. O halde f_* türev dönüşümü lineerdir ve $\bar{M}$ de seçilen eğriden bağımsızdır (Yano, 1984).

2.1.17. Tanım

$\bar{M}$, diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanlarının cümlesi $\chi(\bar{M})$ ve $\bar{M}$ den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$ olsun. Her $X,Y,Z\in\chi(\bar{M})$ ve $a,b\in\mathbb{R}$ için

$$g:\chi(\bar{M})\times\chi(\bar{M})\to C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$$

dönüşümü

i) Simetrik
$g(Y,X)=g(X,Y),$

ii) Pozitif tanımlı
$Y\neq 0$ için $g(Y,Y)\geq 0$ ve $g(Y,Y)=0\Leftrightarrow Y=0,$

iii) Bilineer
$g(aX+bY,Z)=ag(X,Z)+bg(Y,Z)$

şartlarını sağlıyorsa g ye $\bar{M}$ üzerinde bir *Riemann metriği* veya *(2,0)-mertebeli metrik tensör* ve $(\bar{M},g)$ ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir (O'Neill, 1983).

2.1.18. Tanım

$\bar{M}$, diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki C^∞ vektör alanları cümlesi $\chi(\bar{M})$ olmak üzere

$$\bar{\nabla}:\chi(\bar{M})\times\chi(\bar{M})\xrightarrow{2-lineer}\chi(\bar{M})$$
$$(Y,X)\to\bar{\nabla}(Y,X)=\bar{\nabla}_Y X$$

dönüşümü her $X,Y,Z\in\chi(\bar{M})$ ve $f,g\in C^\infty(\bar{M},\mathbb{R})$ için

i) $\bar{\nabla}_Y(X+Z)=\bar{\nabla}_Y X+\bar{\nabla}_Y Z$

ii) $\bar{\nabla}_{fY+gX} Z = f\bar{\nabla}_Y Z + g\bar{\nabla}_X Z$

iii) $\bar{\nabla}_Y (fX) = f\bar{\nabla}_Y X + Y(f)X$

şartlarını sağlıyorsa, $\bar{\nabla}$ ya $\bar{M}$ manifoldu üzerinde bir afin konneksiyon ve $\bar{\nabla}_Y$ 'e Y e göre *kovaryant türev operatörü* denir (Yano, 1979).

2.1.19. Tanım

$\bar{M}$, n-boyutlu bir manifold ve $\bar{M}$ üzerindeki konneksiyon $\bar{\nabla}$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \mathrm{T}: \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\to \chi(\bar{M}) \\ (X,Y) &\to \mathrm{T}(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre $\bar{M}$ üzerinde tanımlı $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun *torsiyon tensörü* denir. Burada torsiyon tensörü anti-simetriktir.

2.1.20. Tanım

$(\bar{M}, g)$, bir Riemann manifoldu ve $\bar{\nabla}$ da $\bar{M}$ üzerinde tanımlanan afin konneksiyon olsun. Bu durumda her $Y, X, Z \in \chi(\bar{M})$ olmak üzere $\bar{\nabla}$ dönüşümü

i) Konneksiyonun sıfır torsiyon özelliği

$[Y, X] = \bar{\nabla}_Y X - \bar{\nabla}_X Y$

ii) Konneksiyonun metrikle bağdaşma özelliği

$Yg(X,Z) = g(\bar{\nabla}_Y X, Z) + g(X, \bar{\nabla}_Y Z)$

özellikleri sağlanıyorsa $\bar{\nabla}$ ya $\bar{M}$ üzerinde *Riemann konneksiyonu* veya *Levi-Civita konneksiyonu* denir (Yano, 1979).

$(\bar{M}, g)$, n-boyutlu Riemann manifoldu üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu $\bar{\nabla}$ olmak üzere her $X, Y, Z \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} 2g(\bar{\nabla}_X Z, Y) = {} & Xg(Z,Y) + Zg(Y,X) - Yg(X,Z) \\ & - g(X,[Z,Y]) - g(Z,[X,Y]) + g(Y,[X,Z]) \end{aligned} \tag{2.3}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe *Kozsul formülü* adı verilir(Hacısalihoğlu,1983).

2.1.21. Tanım

$(\bar{M}, g)$ Riemann manifoldu ve $\bar{\nabla}$ de $\bar{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere Her $Y, X, Z \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} \bar{R} : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\to \chi(\bar{M}) \\ (Y, X, Z) &\to \bar{R}(Y, X)Z \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\bar{R}(Y, X)Z = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_{[Y,X]} Z \tag{2.4}$$

ile tanımlan $\bar{R}$ fonksiyonu $\bar{M}$ üzerinde bir (3,1)-tipinde tensör alanıdır. Bu tensör $\bar{M}$ nin *Riemann eğrilik tensörü* olarak adlandırılır. Burada her $Y, X, Z, W \in \chi(\bar{M})$ için Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$

i) $\bar{R}(Y, X)Z = -\bar{R}(X, Y)Z$

ii) $g(\bar{R}(Y, X)Z, W) = -g(\bar{R}(Y, X)W, Z)$

iii) $\bar{R}(Y, X)Z + \bar{R}(X, Z)Y + \bar{R}(Z, Y)X = 0$ (I. Bihanchi özdeşliği)

iv) $g(\bar{R}(Y, X)Z, W) = g(\bar{R}(Z, W)Y, X)$

özelliklerine sahiptir (O' Neill, 1983).

2.1.22. Tanım

$(\bar{M}, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal vektör alanları $\chi(\bar{M})$ nin bir bazı olsun.

$$\begin{aligned} Q : \chi(\bar{M}) &\to \chi(\bar{M}) \\ Y &\to Q(Y) = QY = \sum_{i=1}^{n} \bar{R}(Y, e_i)e_i \end{aligned} \tag{2.5}$$

ile tanımlanan Q operatörüne $\bar{M}$ nin *Ricci operatörü* denir (O' Neill, 1983).

$(\bar{M}, g)$, n-boyutlu bir Riemann manifoldu $\bar{R}$ de Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ cümlesi $\chi(\bar{M})$ nin ortonormal vektör alanları olmak üzere her $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} S : \chi(\bar{M}) \times \chi(\bar{M}) &\to C^{\infty}(\bar{M}, \mathbb{R}) \\ (Y, X) &\to S(Y, X) = \sum_{i=1}^{n} g(\bar{R}(X, e_i)e_i, Y) \end{aligned} \tag{2.6}$$

biçiminde tanımlanan (2,0)-tipindeki tensöre $\bar{M}$ nin *Ricci tensörü* denir. Kolayca görülebilir ki Ricci tensörü simetriktir. Ayrıca $\bar{M}$ nin Ricci operatörü Q olmak üzere

$$S(Y, X) = g(QY, X) \tag{2.7}$$

şeklinde tanımlanabilir (O' Neill, 1983).

n -boyutlu bir Riemann manifoldu $(\bar{M}, g)$ ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal vektör alanları olsun. O halde

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.8}$$

değerine $\bar{M}$ 'nin *skaler eğrilik fonksiyonu* adı verilir (O' Neill, 1983).

Diğer taraftan bir $(\bar{M}, g)$, Riemann manifoldunun X doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(X) = \frac{S(X, X)}{g(X, X)} \tag{2.9}$$

ile tanımlanır.

n -boyutlu bir Riemann manifoldu $(\bar{M}, g)$ olsun. Bu durumda, her $Y, X \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(Y, X) = \lambda g(Y, X) \tag{2.10}$$

olacak biçimde λ fonksiyonu varsa $\bar{M}$ 'ye *Einstein manifoldu* adı verilir. Burada Eş. 2.10 da $X = Y = e_i$, $1 \le i \le n$ ortonormal bazı seçilirse $\lambda = \dfrac{\rho}{n}$ olduğu görülür.

Eğer S Ricci tensörü her $Y, X \in \chi(\bar{M})$ için

$$S(Y, X) = ag(Y, X) + b\eta(Y)\eta(X) \tag{2.11}$$

eşitliği sağlanıyor ise $\bar{M}$ 'ye η*-Einstein manifoldu* adı verilir. Burada a ve b, $\bar{M}$ üzerinde fonksiyonlar ve η-da 1-formdur (Yano, 1979).

2.1.23. Tanım

$(\bar{M}, g)$, bir Riemann manifoldu olarak verilsin . $T_p\bar{M}$ tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı π olmak üzere $Y, X \in \pi$ tanjant vektörleri için B fonksiyonu

$$B(Y, X) = g(Y,Y)g(X, X) - g(Y, X)^2 \neq 0$$

biçiminde tanımlansın.

$$K(Y, X) = \frac{g(R(Y, X)X, Y)}{B(Y, X)} \tag{2.12}$$

eşitliğine π nin *kesit eğriliği* denir ve $K(\pi)$ ile gösterilir.

Her $p \in \bar{M}$ ve $Y_p, X_p \in T_p\bar{M}$ için $K(Y_p, X_p)$ sabit ise $\bar{M}$ ye *sabit kesit eğrilikli uzay* veya *reel uzay form* denir. Bu durumda $\bar{M}$ Riemann manifoldunu c-sabit kesit eğriliğine sahip reel uzay form ise $\bar{M}$ nin R Riemann eğrilik tensörü

$$R(Y, Z)X = c\{g(Z, X)Y - g(Y, X)Z\} \tag{2.13}$$

şeklinde verilir (O' Neill, 1983).

2.2. Altmanifoldlar

Bu kısımda, Riemann manifoldunun altmanifoldu tanımlanıp, temel özellikleri incelenmektedir.

2.2.1. Tanım

m-boyutlu M ve n-boyutlu $\bar{M}$ Riemann manifoldları olmak üzere $f : M \to \bar{M}$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin.

Eğer $boy(f_*(T_q(M))) = p$ ise f 'nin $q \in M$ dekii rankı p dur denir ve $rank_q(f) = p$ şeklinde verilir.

Eğer $boy(M) = rank(f)$ ise f ye bir *immersiyon* veya daldırma, $f(M)$ 'ye de $\bar{M}$ 'nin *immersed* veya gömülmüş altmanifoldu adı verilir.

Eğer f immersiyonu bire bir ise f ye *imbeding* veya gömme , $f(M)$ 'ye de $\bar{M}$ 'nin *gömülen* altmanifoldu veya *altmanifoldu* denir (Chen, 1973).

2.2.2. Tanım

(M, g) m-boyutlu ve $(\bar{M}, \bar{g})$ n-boyutlu Riemann manifoldları ve $f : M \to \bar{M}$ bir immersiyon olsun. Her $Y, X \in T_pM$ için

$$\bar{g} : (f_{*p}Y, f_{*p}X) = g(Y, X)$$

olması durumunda f dönüşümüne *izometrik immersiyon* veya *metriği koruyan immersiyon* denir. (Chen, 1973).

2.2.3. Tanım

n-boyutlu $\bar{M}$ manifoldu üzerinde

$$\begin{aligned} D : \bar{M} &\to T_p\bar{M} \\ p &\to D_p \subset T_p\bar{M}, boy(D_p) = r \leq n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne *distribüsyon* adı verilir. Her $Y \in \chi(\bar{M})$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanı D 'ye aittir denir. Eğer p noktası için D ye ait r tane diferensiyellenebilir liner bağımlı olmayan vektör alanı varsa D ye diferensiyellenebilir düstribüsyon adı verilir (Duggal ve Bejancu,1996).

Eğer D ye ait iki vektör alanının Lie-operatörü de D ye aitse D ye *integrallenebilirdir* denir.

N bir diferensiyellenebilir manifoldu üzerindeki n-boyutlu distribüsyon ve M de N nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $p \in M$ için T_pM ile D_p birbiriyle aynı ise M 'ye D 'nin *integral manifoldu* adı verilir. Yani

$$f : M \to N$$

bir imbeding olmak üzere, her $p \in M$ için

$$f_*(T_p M) = D_p$$

dir.

Bir N diferensiyellenebilir manifoldunun altmanifoldu M olsun. ∇, N üzerinde lineer konneksiyon ve D de N üzerinde bir distribüsyon olsun. Eğer $X \in \Gamma(\chi(N))$ ve $Y \in D$ için $\nabla_X Y \in D$ ise D *distribüsyonu paraleldir* denir (Duggal ve Bejancu 1996; Yano ve Kon 1984).

2.2.4. Tanım

$(\bar{M}, \bar{g})$, bir Riemann manifoldunun altmanifoldu M olsun. Her $q \in M$ için

$$T^{\perp} M = \left\{ U_q \in T_q \bar{M} : \bar{g}(X_q, U_q) = 0, \forall X_q \in T_p M \right\}$$

şeklinde yazılan altuzayına $\bar{M}$ nin *normal uzayı* adı verilir. U_q vektörüne de M nin normal vektörü ,U_q nin birim vektör olması durumunda da U_q vektörüne M nin *birim normal vektörü* adı verilir. M nin tüm normal vektörlerini kapsayan $T^{\perp}M$ altuzayına da M nin *normal demeti* adı verilir.

2.2.5. Not

$\bar{M}$, Riemann manifoldunun altmanifoldu M olmak üzere TM, M altmanifoldunun tanjant demetini ve $T^{\perp}M$ de M altmanifoldunun bütün normal vektörlerinin demetini göstersin. O halde, $\bar{M}$ manifoldunun tanjant demetini

$$T\bar{M} = TM \oplus T^{\perp} M$$

şeklinde yazabiliriz.

2.2.6. Tanım

$(\bar{M},\bar{g})$, bir Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M ve $\bar{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonlar sırasıyla ∇ ve $\bar{\nabla}$ da olmak üzere her $X,Y \in D$ için

$$\sigma : \chi(M)\times\chi(M)\to\chi^{\perp}(M)$$
$$(Y,X)\to\sigma(Y,X)=\bar{\nabla}_Y X-\nabla_Y X$$

ile tanımlı σ simetrik bilineer forma M nin *ikinci temel formu* denir. Eğer $\sigma=0$ ise M ye *total geodezik altmanifold* adı verilir.

$$\bar{\nabla}_Y X=\nabla_Y X+\sigma(Y,X) \tag{2.14}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de *Gauss formülü* denir. Burada $\nabla_Y X$ ve $\sigma(Y,X)$, $\bar{\nabla}_Y X$ 'nin sırasıyla teğet ve normal parçalarıdır. Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$(\nabla_Y\sigma)(X,Z)=\nabla_Y^{\perp}\sigma(X,Z)-\sigma(\nabla_Y X,Z)-\sigma(X,\nabla_Y Z) \tag{2.15}$$

şeklinde tanımlanan eşitliğe de ikinci temel form σ nın Y ye göre kovaryant türevi ve $\nabla\sigma$ 'ya da M 'nin *üçüncü temel formu* adı verilir (Chen, 1973).

$(\bar{M},\bar{g})$, Riemann manifoldunun boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. M üzerindeki bir $q\in M$ için T_qM nin ortonormal bazı $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olmak üzere M 'nin ikinci temel formu σ nın normu

$$\|\sigma\|^2=\sum_{i,j=1}^{n} g(\sigma(e_i,e_j),\sigma(e_i,e_j)) \tag{2.16}$$

ile tanımlıdır.

2.2.7. Tanım

$\bar{M}$, Riemann manifoldunun boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. M 'nin ikinci temel formu σ olmak üzere $q\in M$ için T_qM nin ortonormal $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ bazını alalım.

$$H=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sigma(e_i,e_i) \tag{2.17}$$

biçiminde tanımlanan H ya M 'nin *ortalama eğrilik vektörü* adı verilir. Eğer ortalama eğrilik vektörü sıfır ise, M ye *minimal altmanifold* denir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.8. Tanım

$\bar{M}$, Riemann manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. M nin ikinci temel formu σ ve ortalama eğrilik vektörü H olmak üzere her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\sigma(Y,X) = g(Y,X)H \tag{2.18}$$

ise M 'ye $\bar{M}$ 'nin *total umbilik altmanifoldu* adı verilir. Eğer

$$g(\sigma(Y,X),H) = \lambda g(Y,X), \qquad \lambda \in C(M,\mathbb{R}) \tag{2.19}$$

şartı sağlanıyor ise M 'ye $\bar{M}$ 'nin *pseudo-umbilik altmanifoldu* adı verilir. Kolayca görülebilir ki her total umbilik altmanifold pseudo-umbilik altmanifolddur. Fakat tersi her zaman doğru değildir (Pandey ve Gupta, 2008).

2.2.9. Tanım

$(\bar{M},\bar{g})$, bir Riemann manifoldunun $\bar{M}$ bir altmanifoldu M olsun. M nin normal demetindeki konneksiyon $\nabla^{\perp}$ olmak üzere her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$\begin{aligned} A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (V,X) &\to A(V,X) = A_V X = \nabla^{\perp}_X V - \bar{\nabla}_X V \end{aligned}$$

ile tanımlı bilineer dönüşümüne M nin *şekil operatörü* denir (Chen, 1973).

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.20}$$

ifadesine de *Weingarten formülü* denir. M nin bu durumda şekil operatörü A_V nin kovaryant türevi de

$$(\nabla_Y A)_V X = \nabla_Y A_V X - A_{\nabla^{\perp}_Y V} X - A_V \nabla_Y X \tag{2.21}$$

biçiminde tanımlanır (Chen, 1973).

Her $Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için $g(Y,V)=0$ ifadesinin $X \in \chi(M)$ göre kovaryant türevi alınırsa

$$Xg(Y,V) = g(\bar{\nabla}_X Y,V) + g(Y,\bar{\nabla}_X V) = 0 \tag{2.22}$$

olur. Eş. 2.22 de, Eş. 2.14 ve Eş. 2. 20 kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y,V) + g(\sigma(X,Y),V) - g(Y,A_V X) + g(Y,\nabla^{\perp}_X V) = 0$$

dir. Buradan gerekli sadeleştirmelerle

$$g(A_V Y,X) = g(\sigma(X,Y),V) \tag{2.23}$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik M nin ikinci temel formu σ ile A_V şekil operatörü arasındaki bağıntıyı verir (Chen, 1973).

2.2.10. Tanım

$(\bar{M},\bar{g})$, Riemann manifoldunun boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. $\bar{M}$ nin eğrilik tensörü $\bar{R}$ ve $\bar{\nabla}$, da Riemann konneksiyonu olmak üzere her $Y,X,Z \in \chi(M)$ için

$$\bar{R}(Y,X)Z = \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_{[Y,X]} Z$$

şeklinde tanımlanan $\bar{M}$ Riemann eğrilik tensörünü gözönüne alalım. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{R}(Y,X)Z &= \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_{[Y,X]} Z \\
&= \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + \sigma(X,Z)) - \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + \sigma(Y,Z)) \\
&\quad -(\nabla_{[Y,X]} Z + \sigma([Y,X],Z)) \\
&= \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z + \bar{\nabla}_Y \sigma(X,Z) - \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z - \bar{\nabla}_X \sigma(Y,Z) \\
&\quad -(\nabla_{[Y,X]} Z + \sigma([Y,X],Z)) \\
&= \nabla_Y \nabla_X Z + \sigma(Y,\nabla_X Z) - A_{\sigma(X,Z)} Y + \nabla^{\perp}_Y \sigma(X,Z) \\
&\quad -\nabla_X \nabla_Y Z - \sigma(X,\nabla_Y Z) + A_{\sigma(Y,Z)} X - \nabla^{\perp}_X \sigma(Y,Z) \\
&\quad -\nabla_{\nabla_Y X} Z + \nabla_{\nabla_X Y} Z - \sigma(\nabla_Y X,Z) + \sigma(\nabla_X Y,Z)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y,X)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{\nabla_Y X}Z + \nabla_{\nabla_X Y}Z \\ &+\nabla_Y^{\perp}\sigma(X,Z) - \sigma(\nabla_Y X, Z) - \sigma(X,\nabla_Y Z) \\ &-\nabla_X^{\perp}\sigma(Y,Z) + \sigma(Y,\nabla_X Z) - \sigma(\nabla_X Y, Z) \\ &+A_{\sigma(Y,Z)}X - A_{\sigma(X,Z)}Y\end{aligned}$$

dir. Böylece yukarıdaki denklem tekrar toplanırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y,X)Z &= \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_{[Y,X]}Z \\ &+\nabla_Y^{\perp}\sigma(X,Z) - \sigma(\nabla_Y X, Z) - \sigma(X,\nabla_Y Z) \\ &-\nabla_X^{\perp}\sigma(Y,Z) + \sigma(Y,\nabla_X Z) + \sigma(\nabla_X Y, Z) \\ &+A_{\sigma(Y,Z)}X - A_{\sigma(X,Z)}Y\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da Eş. 2.15 kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y,X)Z &= R(Y,X)Z + A_{\sigma(Y,Z)}X - A_{\sigma(X,Z)}Y \\ &+(\nabla_Y\sigma)(X,Z) - (\nabla_X\sigma)(Y,Z)\end{aligned} \tag{2.24}$$

olduğu görülür. Bu eşitlik $W \in \chi(M)$ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y,X,Z,W) &= R(Y,X,Z,W) - g(\sigma(X,Z),\sigma(Y,W)) \\ &+g(\sigma(Y,Z),\sigma(X,W))\end{aligned} \tag{2.25}$$

eşitliğine elde dönüşür. Bu eşitliğe de *Gauss denklemi* denir (Chen, 1990).

Ayrıca, Eş. 2.24 ün teğet ve normal parçaları sırasıyla

$$(\bar{R}(Y,X)Z)^T = R(Y,X)Z + A_{\sigma(Y,Z)}X - A_{\sigma(X,Z)}Y \tag{2.26}$$

ve

$$(\bar{R}(Y,X)Z)^{\perp} = (\bar{\nabla}_Y\sigma)(X,Z) - (\bar{\nabla}_X\sigma)(Y,Z) \tag{2.27}$$

verilir. Eş. 2.27 ye *Codazzi denklemi* adı verilir. Eğer Eş. 2.27 de $(\bar{R}(Y,X)Z)^{\perp} = 0$ ise altmanifolda *eğrilik-invaryant altmanifold* denir.

Ayrıca, M 'nin normal demetinin eğrilik tensörü $R^{\perp}$ olmak üzere her $Y, X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$R^{\perp}(Y, X)V = \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}V - \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}V - \nabla_{[Y,X]}^{\perp}V \tag{2.28}$$

ile verilir. Böylece Eş. 2.28 de, Eş. 2.14 ve Eş. 2.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y, X)V &= \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X V - \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_{[Y,X]}V \\ &= \bar{\nabla}_Y(\nabla_X^{\perp}V - A_V X) - \bar{\nabla}_X(\nabla_Y^{\perp}V - A_V Y) \\ &\quad -(\nabla_{[Y,X]}^{\perp}V - A_V[Y, X]) \\ &= \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}V - A_{\nabla_X^{\perp}V}Y - \nabla_Y A_V X - \sigma(Y, A_V X) \\ &\quad -\nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}V + A_{\nabla_Y^{\perp}V}X + \nabla_X A_V Y + \sigma(X, A_V Y) \\ &\quad -\nabla_{[Y,X]}^{\perp}V + A_V[Y, X]\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu eşitlikte gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y, X)V &= \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}V - \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}V - \nabla_{[Y,X]}^{\perp}V - \sigma(Y, A_V X) + \sigma(X, A_V Y) \\ &\quad - \nabla_Y A_V X + A_{\nabla_Y^{\perp}V}X + A_V\nabla_Y X + \nabla_X A_V Y - A_{\nabla_X^{\perp}V}Y - A_V\nabla_X Y\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada Eş. 2.21 ve Eş. 2.28 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y, X)V &= R^{\perp}(Y, X)V - \sigma(Y, A_V X) + \sigma(X, A_V Y) \\ &\quad -(\nabla_Y A)_V X + (\nabla_X A)_V Y\end{aligned} \tag{2.29}$$

olur. Eş. 2.29 un her iki tarafı $U \in \chi^{\perp}(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(Y, X)V, U) &= g(R^{\perp}(Y, X)V, U) - g(\sigma(Y, A_V X), U) + g(\sigma(X, A_V Y), U) \\ &\quad -g((\nabla_Y A)_V X, U) + g((\nabla_X A)_V Y, U) \\ &= g(R^{\perp}(Y, X)V, U) + g(A_U Y, A_V X) - g(A_U X, A_V Y)\end{aligned}$$

yazılır. Gerekli işlemler yapılırsa

$$g(\bar{R}(Y, X)V, U) = g(R^{\perp}(Y, X)V, U) + g([A_U, A_V]Y, X) \tag{2.30}$$

şeklinde verilen eşitliğe *Ricci denklemi* adı verilir (Chen, 1990; Chen 1973).

3. KONTAK METRiK MANiFOLDLAR

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, hemen hemen kontak metrik manifoldlar tanıtılarak bazı temel özelliklerine yer verilmiştir. İkinci kısımda, kosimplektik manifold ve kosimplektik manifoldun altmanifoldu üzerine indirgenen tensörler ile ilgili geometrik sonuçlar verildi.

3.1. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldlar

Bu kısımda, hemen hemen kontak metrik manifoldların tanımı verilerek bazı temel teorem ve sonuçlar verilmiştir.

3.1.1. Tanım

$\bar{M}$, bir diferensiyellenebilir manifold ve her $q \in \bar{M}$ noktası için $J^2 = -I$ olacak biçimde $T_q\bar{M}$ tanjant uzayının bir J lineer dönüşümü varsa, $\bar{M}$ üzerindeki J lineer dönüşümüne bir *hemen hemen kompleks yapı* ve J lineer dönüşümüyle verilen manifoldda da bir *hemen hemen kompleks manifold* denir. $\bar{M}$ üzerinde (1,1)-tipindeki tensör alanı J olsun. Her $Y, X \in \chi(\bar{M})$ için

$$N_J(Y,X) = J^2[Y,X] + [JY,JX] - J[JY,X] - J[Y,JX]$$

biçiminde tanımlı N_J tensör alanına J hemen hemen kompleks yapısının *Nijenhuis tensörü* denir (Yano, 1984).

3.1.2. Tanım

$(\bar{M}, J)$, bir hemen hemen kompleks manifold olmak üzere eğer $N_J = 0$ ise $\bar{M}$ 'ye bir *Kompleks manifold* adı verilir (Yano, 1984; Yano,1979).

$\bar{M}$ üzerinde her $Y, X \in \chi(\bar{M})$ için

$$g(JY,JX) = g(Y,X)$$

olarak verilen g Riemann metriğine *Hermitian metrik* denir. Hermitian metriği ile tanımlanan hemen hemen kompleks manifolda da *hemen hemen Hermitian manifold* denir. Ayrıca, Hermitian metriği ile verilen kompleks manifolda da *Hermitian manifold* denir (Yano, 1984).

$\bar{M}$, bir hemen hemen Hermitian manifold olsun. $\Phi(X,Y)=g(X,JY)$ şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne hemen hemen Hermitian yapının *temel 2-formu* denir. $\bar{M}$, bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer Φ temel 2-formu kapalı yani, $d\Phi=0$ ise bu durumda $\bar{M}$ de bir g Hermitian metriğine, *Kaehlerian metrik* denir. Bir Kaehlerian metriğine sahip bir $\bar{M}$ kompleks manifolduna *Kaehlerian manifold* denir (Yano, 1979).

3.1.3. Tanım

$\bar{M}$, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold, φ de $\bar{M}$ üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör, ξ bir vektör alanı, η da 1-form olmak üzere her $X\in\chi(\bar{M})$ için

$$\varphi^2X=-X+\eta(X)\xi,\quad \varphi\xi=0,\quad \eta(\varphi X)=0 \quad \text{ve} \quad \eta(\xi)=1 \tag{3.1}$$

ise (φ,ξ,η) üçlüsüne *hemen hemen kontak yapı*, üzerinde hemen hemen kontak yapı tanımlanan manifolda da *hemen hemen kontak manifold* adı verilir (Yano, 1984).

3.1.4. Tanım

$\bar{M}$, (2n+1)-boyutlu (φ,ξ,η) hemen hemen kontak yapısıyla verilen bir hemen hemen kontak manifold olsun. $\bar{M}$ hemen hemen kontak manifoldu her $X,Y\in\chi(\bar{M})$ için

$$\eta(Y)=g(Y,\xi) \tag{3.2}$$

ve

$$g(\varphi Y,\varphi X)=g(Y,X)-\eta(Y)\eta(X) \tag{3.3}$$

şartlarını sağlayan bir g Riemann metriğine sahip ise (φ,ξ,η,g) dörtlüsüne $\bar{M}$ üzerinde hemen hemen kontak metrik yapı ve hemen hemen kontak metrik yapıya sahip $\bar{M}$ manifolduna da *hemen hemen kontak metrik manifold* denir (Yano, 1984).

3.1.5. Not

Bundan sonraki kısımlarda hemen hemen kontak metrik manifold $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ biçiminde gösterilecektir.

3.1.6. Teorem

Boyutu (2n+1) olan $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde her $Y,Z\in\chi(\bar{M})$ için

$$g(\varphi Y,\varphi Z)=g(Y,Z)-\eta(Y)\eta(Z)$$

şeklinde bir g Riemann metriği daima vardır (Yano, 1979).

3.1.7. Sonuç

Boyutu (2n+1) olan $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu verilsin. Her $Y,Z\in\chi(\bar{M})$ için $\varphi:\chi(\bar{M})\to\chi(\bar{M})$ olmak üzere

$$g(\varphi Y,Z)=-g(Y,\varphi Z) \tag{3.4}$$

dir. Eş. 3.4 bize φ nin g metrik tensörüne göre anti-simetrik tensör alanı olduğunu verir (Yano, 1984).

3.1.8. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, (2n+1)-boyutlu diferensiyellenebilir manifold üzerinde tanımlanan bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontak metrik yapısı verilsin. Bu durumda her $Y,Z\in\chi(\bar{M})$ için

$$\Phi(Y,Z)=g(Y,\varphi Z) \tag{3.5}$$

olacak şekilde tanımlı Φ dönüşümüne (φ,ξ,η,g) nin *temel 2 -formu* denir. O halde her $Z,Y\in\chi(\bar{M})$ için

$$\Phi(Y,Z)=g(Y,\varphi Z)=-g(\varphi Y,Z)=-g(Z,\varphi Y)=-\Phi(Z,Y)$$

dir. Yani temel 2-form Φ, anti-simetriktir (Yano, 1979).

3.1.9. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifold olmak üzere $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ üzerinde (1,1)-tipinde bir tensör alanı φ olsun. Her $Y,Z\in\chi(\bar{M})$ için

$$N_\varphi(Y,Z)=\varphi^2\left[Y,Z\right]+\left[\varphi Y,\varphi Z\right]-\varphi\left[\varphi Y,Z\right]-\varphi\left[Y,\varphi Z\right]$$

şeklinde tanımlı (1,2)-tipindeki N_φ tensör alanına $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldunun *Nijenhuis tensörü* denir.

3.1.10. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, (2n+1)-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifold olsun. Eğer

$$N_\varphi+2d\eta\otimes\xi=0 \tag{3.6}$$

ise $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ ye *normaldir* denir. Burada $d\eta$ dış türevi her $Y,Z\in\chi(\bar{M})$ için

$$2d\eta(Y,Z)=Y\eta(Z)-Z\eta(Y)-\eta(\left[Y,Z\right])$$

ile tanımlıdır (Yano, 1984).

3.1.11. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M verilsin. Bu durumda $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ deki g Riemann metriği M üzerine indirgenmiş olur. Böylece (M,g) de bir Riemann manifoldu olur. Her $X\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^\perp(M)$

$$\varphi X=TX+NX \tag{3.7}$$

ve

$$\varphi V=tV+nV \tag{3.8}$$

şeklinde yazılır. Eş. 3.7 de TX ve NX sırasıyla φX in teğet ve normal parçalarını, tV ve nV de sırasıyla φV nin teğet ve normal parçalarını göstermektedir. Böylece altmanifold üzerine indirgenen bu tensörler

$$T:\chi(M)\to\chi(M),\qquad N:\chi(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

ve

$$t:\chi^{\perp}(M)\to\chi(M),\qquad n:\chi^{\perp}(M)\to\chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşümlerdir. Burada $N=0$ ise M 'ye invaryant, $T=0$ ise M ' ye $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *anti-invaryant altmanifoldu* denir (Pandey, 2008).

Şimdi her $X\in\chi(M)$ için Eş. 3.7 ye φ uygulanırsa

$$\varphi^2X=\varphi(\varphi X)=\varphi(TX+NX)$$

yazılır. Burada Eş. 3.1 kullanılırsa ξ , M teğet olduğundan

$$-X+\eta(X)\xi=T^2X+NTX+tNX+nNX \tag{3.9}$$

olduğu görülür. Eş. 3.9 un teğet bileşenlerinden

$$T^2X+tNX=-X+\eta(X)\xi$$

yazılır. O halde

$$T^2=-I+\eta\otimes\xi-tN \tag{3.10}$$

dir. Şimdi Eş. 3.9 un normal bileşenlerinden,

$$NTX+nNX=0$$

yazılır. Burada

$$NT+nN=0 \tag{3.11}$$

elde edilir.

Aynı şekilde $V\in\chi^{\perp}(M)$ için

$$\varphi^2V=-V+\eta(V)\xi$$

yazılır. Burada Eş. 3.8 ve $\eta(V)=0$ olduğu kullanılırsa

$$-V=\varphi(\varphi V)=\varphi(tV)+\varphi(nV)$$

Buradan

$$-V \quad = TtV+NtV+tnV+n^2 V \tag{3.12}$$

elde edilir. Böylece Eş. 3.12 nin teğet bileşenlerinden

$$TtV+tnV=0$$

dir. O halde

$$Tt+tn=0 \tag{3.13}$$

yazılır. Şimdi Eş. 3.12 nin normal bileşenlerinden

$$NtV+n^2V=-V$$

dir. Buradan da

$$Nt+n^2=-I \tag{3.14}$$

bulunur. Ayrıca, her $X,Y\in\chi(M)$ için Eş. 3.4 ten

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y)$$

yazılabilir. Böylece Eş. 3.7 kullanılırsa

$$g(TX+NX,Y)=-g(X,TY+NY)$$

Buradan

$$g(TX,Y)=-g(X,TY) \tag{3.15}$$

dir. Aynı şekilde her $V,W\in\chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.4 ten

$$g(\varphi X,V)=-g(X,\varphi V)$$

yazılır. Böylece Eş. 3.8 kullanılırsa

$$g(tV+nV,W)=-g(V,tW+nW)$$

olur. Buradan

$$g(V,nW)=-g(nV,W) \tag{3.16}$$

dir. Aynı biçimde her $X\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.4 ten

$$g(\varphi V,W)=-g(V,\varphi W)$$

yazılır. Böylece Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 kullanılırsa

$$g(TX+NX,V)=-g(X,tV+nV)$$

olur. Buradan

$$g(NX,V)=-g(X,tV) \tag{3.17}$$

eşitlikleri vardır.

Ayrıca, $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ hemen hemen kontak metrik manifoldu üzerinde $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere her $X,Y\in\chi(\bar{M})$ için φ tensörünün kovaryant türevi

$$(\bar{\nabla}_X\varphi)Y=\bar{\nabla}_X\varphi Y-\varphi\bar{\nabla}_X Y \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır. Burada altmanifolda indirgenen tensörlerin kovaryant türevleri de her $X,Y\in\chi(M)$ ve $V\in\chi^{\perp}(M)$ için

$$(\nabla_X T)Y=\nabla_X TY-T\nabla_X Y \qquad \text{ve} \qquad (\nabla_X N)Y=\nabla_X^{\perp}NY-N\nabla_X Y \tag{3.19}$$

ve

$$(\nabla_X t)V=\nabla_X tV-t\nabla_x^{\perp}V \qquad \text{ve} \qquad (\nabla_X n)V=\nabla_X^{\perp}nV-n\nabla_X^{\perp}V \tag{3.20}$$

şeklinde tanımlanır (Pandey, 2008).

3.2. Kosimplektik Manifoldun Altmanifoldları

Bu kısımda, kosimplektik manifold tanımlanarak bir kosimplektik manifoldun altmanifoldu üzerine indirgenen tensörler ile ilgili bazı temel bağıntı ve sonuçlara yer verilmiştir.

3.1.1. Tanım

Hemen hemen kontak metrik manifold üzerinde tanımlanan Φ, temel 2-form ve η 1-form kapalıysa yani $d\phi = 0$ ve $d\eta = 0$ hemen hemen kontak metrik manifoldda *hemen hemen kosimplektik manifold* adı verilir. Hemen hemen kosimplektik manifold normalse bu durumda *kosimplektik manifold* adını alır (Goldberg ve Yano, 1969).

3.2.2. Tanım

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, (2n+1)-boyutlu hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. Eğer $\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$ üzerinde $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu göstermek üzere her $X, Y \in \chi(\bar{M})$ için

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = 0 \tag{3.21}$$

şartı sağlanıyorsa $\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$'ye *kosimplektik manifold* adı verilir. Böylece Eş. 3.25 te $Y = \xi$ alınırsa

$$\bar{\nabla}_X \xi = 0 \tag{3.22}$$

olduğu görülür (Goldberg ve Yano,1969).

3.2.3. Sonuç

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu M olmak üzere her $X \in \chi(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$\nabla_X \xi = 0 \qquad \text{ve} \qquad \sigma(X, \xi) = 0 \tag{3.23}$$

dir.

İspat

Her $X,Y \in \chi(M)$ için Eş. 2.14 te, $Y = \xi$ alındığında

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + \sigma(X,\xi) \tag{3.24}$$

olur. Burada Eş. 3.24 de, Eş. 3.22 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + \sigma(X,\xi) = 0 \tag{3.25}$$

yazılır. Böylece

$$\nabla_X \xi + \sigma(X,\xi) = 0 \tag{3.26}$$

dir. O halde Eş. 3.26 nın teğet ve normal bileşenleri karşılaştırılırsa

$$\nabla_X \xi = 0 \quad \text{ve} \quad \sigma(X,\xi) = 0$$

sonucuna varılır.

3.2.4. Sonuç

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldunun bir altmanifoldu M olmak üzere her $V \in \chi^{\perp}(M)$ ve $\xi \in \chi(M)$ için

$$A_V \xi = 0 \quad \text{ve} \quad \eta(A_V X) = 0 \tag{3.27}$$

dir.

İspat

Her $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 2.23 te, $X = \xi$ alındığında

$$g(A_V \xi, Y) = g(\sigma(Y,\xi), V)$$

olur. Böylece Eş. 3.23 kullanılırsa

$$g(A_V \xi, Y) = 0$$

bulunur. Her $Y \in \chi(M)$ için doğru olduğundan $A_V \xi = 0$ dir.

Aynı şekilde her $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 2.23 te, $Y = \xi$ alındığında

$$g(A_V X, \xi) = 0$$

olur. Burada Eş. 3.23 kullanılırsa $g(A_V X, \xi) = \eta(A_V X) = 0$ sonucuna varılır.

3.2.5. Sonuç

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun bir altmanifoldu M olsun. Her $Y, X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_Y T)X = A_{NX}Y + t\sigma(Y, X) \tag{3.28}$$

ve

$$(\nabla_Y N)X = n\sigma(Y, X) - \sigma(TX, Y) \tag{3.29}$$

dir.

İspat

Her $Y, X \in \chi(M)$ için Eş. 3.18 den

$$(\bar{\nabla}_Y \varphi)X = \bar{\nabla}_Y \varphi X - \varphi \bar{\nabla}_Y X$$

dir. Burada Eş. 2.14, Eş. 3.21 ve Eş. 3.7 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_Y TX + \bar{\nabla}_Y NX - \varphi(\nabla_Y X + \sigma(Y, X)) = 0 \tag{3.30}$$

yazılır. Böylece Eş. 3.30 da; Eş. 2.14, Eş. 2.20, Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 yardımıyla

$$\nabla_Y TX + \sigma(Y, TX) - A_{NX}Y + \nabla_Y^{\perp} NX - T\nabla_Y X - N\nabla_Y X - t\sigma(Y, X) - n\sigma(Y, X) = 0 \tag{3.31}$$

olduğu görülür. O halde Eş. 3.31 de, Eş. 3.19 kullanılırsa

$$(\nabla_Y T)X - t\sigma(Y, X) - A_{NX}Y + (\nabla_Y N)X + \sigma(Y, TX) - n\sigma(Y, X) = 0 \tag{3.32}$$

olur. Böylece Eş. 3.32 nin teğet ve normal parçaları sırasıyla

$$(\nabla_Y T)X = A_{NX}Y + t\sigma(Y, X)$$

ve

$$(\nabla_Y N)X = n\sigma(Y,X) - \sigma(TX,Y)$$

şeklinde yazılabilir.

3.2.6. Sonuç

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun bir altmanifoldu M olmak üzere her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$(\nabla_X t)V = A_{nV}X - TA_V X \tag{3.33}$$

ve

$$(\nabla_X n)V = -\sigma(tV,X) - NA_V X \tag{3.34}$$

dir.

İspat

Her $X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.18 den

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)V = \bar{\nabla}_X \varphi V - \varphi \bar{\nabla}_X V$$

dir. Burada Eş. 2.20, Eş. 3.21 ve Eş. 3.8 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_X tV + \bar{\nabla}_X nV + \varphi A_V X - \varphi \nabla_X^{\perp} V = 0$$

yazılır. Böylece Eş. 2.14, Eş. 2.20, Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 den

$$\nabla_X tV + \sigma(X,tV) - A_{nV}X + \nabla_X^{\perp} nV + TA_V X + NA_V X - t\nabla_X^{\perp} V - n\nabla_X^{\perp} V = 0 \tag{3.35}$$

olduğu görülür. O halde Eş. 3.35 te Eş. 3.20 kullanılırsa

$$(\nabla_X t)V - A_{nV}X + TA_V X + (\nabla_X n)V - \sigma(X,tV) + NA_V X = 0 \tag{3.36}$$

şeklinde yazılır. Böylece Eş. 3.36 nın teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$(\nabla_X t)V = A_{nV}X - TA_V X$$

ve

$$(\nabla_X n)V = -\sigma(tV, X) - NA_V X$$

dir.

3.2.7. Teorem

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun bir altmanifoldu M olsun. Her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$T \text{ paraleldir} \Leftrightarrow A_{NY}Z = A_{NZ}Y \tag{3.37}$$

dir.

İspat

Her $X, Y \in \chi(M)$ için Eş. 3.28 in her iki yanı $Z \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$g(A_{NY}X + t\sigma(X,Y), Z) = 0$$

dir. Burada Eş. 2.23 kullanılırsa

$$g(\sigma(X,Z), NY) + g(t\sigma(X,Y), Z) = 0 \tag{3.38}$$

olur. Burada Eş. 3.17 kullanılırsa

$$g(\sigma(X,Z), NY) - g(\sigma(X,Y), NZ) = 0$$

olduğu görülür. Bu durumda Eş. 2.23 ten

$$g(A_{NY}Z, X) - g(A_{NZ}Y, X) = 0$$

olur. Böylece

$$A_{NY}Z - A_{NZ}Y = 0 \tag{3.39}$$

olur.

Tersine

$$A_{NY}Z - A_{NZ}Y = 0$$

olsun. Buradan $X \in \chi(M)$ için

$$g(A_{NY}Z - A_{NZ}Y, X) = 0 \tag{3.40}$$

yazılır. Eş. 3.40 ta Eş. 2.23 kullanılırsa

$$g(\sigma(Z,X), NY) - g(\sigma(Y,X), NZ) = 0$$

Eş. 3.17 den

$$g(A_{NY}X, Z) + g(t\sigma(Y,X), Z) = 0$$

$$g(A_{NY}X + t\sigma(Y,X), Z) = 0$$

Eş. 3. 28 den

$$g((\nabla_X T)Y, Z) = 0$$

dir. Böylece $Z \in \chi(M)$ olduğundan T paralel olduğu görülür.

3.2.8. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun bir altmanifoldu M olsun. O zaman her $X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için

$$N \text{ paraleldir} \Leftrightarrow A_V TY = -A_{nV}Y$$

dir.

İspat

Her $X,Y \in \chi(M)$ için N paralelse

$$(\nabla_X N)Y = 0$$

yazılır. Bu durumda Eş. 3.29 dan

$$n\sigma(X,Y) - \sigma(X,TY) = 0 \tag{3.41}$$

dir. Her $V \in \chi^{\perp}(M)$ için Eş. 3.41 den

$$g(\sigma(X,TY),V) = g(n\sigma(X,Y),V) \tag{3.42}$$

olur. Bu durumda Eş. 3.42 de Eş. 2.23 ve Eş. 3.16 kullanılırsa

$$g(A_V TY, X) = -g(\sigma(X,Y), nV) = -g(A_{nV}Y, X)$$

dir. Burada ilk ve son terimlerden

$$A_V TY = -A_{nV}Y$$

olduğu görülür.

Tersine $A_V TY = -A_{nV}Y$ olsun. O halde her $X \in \chi(M)$ için

$$g(A_V TY + A_{nV}Y, X) = 0$$

yazılabilir. Burada Eş. 2.23 ve Eş. 3.16 dan

$$\begin{aligned} 0 &= g(A_V TY, X) + g(A_{nV}Y, X) \\ &= g(\sigma(X,TY),V) + g(\sigma(X,Y),nV) \\ &= g(\sigma(X,TY),V) - g(n\sigma(X,Y),V) \end{aligned}$$

her $V \in \chi^{\perp}(M)$ için bu eşitlik daima doğru olduğundan

$$\sigma(X,TY) = n\sigma(X,Y)$$

dir. Bu eşitlik Eş. 3.29 da yerine yazılır

$$(\nabla_X N)Y = 0$$

olduğu görülür. Bu da N'nin paralel olduğunu gösterir.

3.2.9. Teorem

$\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, Kosimplektik manifoldun bir altmanifoldu M olsun. Her $Y, X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X N)Y = \eta(X)NTY - \eta(Y)NTX \Leftrightarrow A_{nV}Y + A_V TY = g(TY,tV)\xi + \eta(Y)TtV \tag{3.43}$$

dir.

İspat

Her $X,Y\in\chi(M)$ için Eş. 3.29, her $V\in\chi^{\perp}(M)$ ile çarpılırsa

$$g((\nabla_X N)Y,V)=g(n\sigma(X,Y),V)-g(\sigma(X,TY),V)$$

olur. Burada Eş. 3.16 ve Eş. 3.17 kullanılırsa

$$g((\nabla_X N)Y,V)=-g(\sigma(X,Y),nV)-g(h(X,TY),V) \tag{3.44}$$

yazılır. Bu durumda Eş. 3.44 te, Eş. 2.23 kullanılırsa

$$g((\nabla_X N)Y,V)=-g(A_{nV}Y,X)-g(A_V TY,X)$$

dir. Böylece

$$g((\nabla_X N)Y,V)=-g(A_{nV}Y+A_V TY,X) \tag{3.45}$$

elde edilir. Diğer taraftan hipotezi kullanarak her $V\in\chi^{\perp}(M)$ için

$$\begin{aligned} g((\nabla_X N)Y,V) &= g(\eta(X)NTY-\eta(Y)NTX,V)\\ &=\eta(X)g(NTY,V)-\eta(Y)g(NTX,V)\\ &=-\eta(X)g(TY,tV)+\eta(Y)g(TX,tV)\\ &=-g(g(TY,tV)\xi,X)-\eta(Y)g(TtV,X)\end{aligned}$$

burada

$$g((\nabla_X N)Y,V)=-g(g(TY,tV)\xi+\eta(Y)TtV,X) \tag{3.46}$$

dir. O halde Eş. 3.45 ve Eş. 3.46 denklemlerinin ikinci tarafları eşitlenirse

$$A_{nV}Y+A_V TY=g(TY,tV)\xi+\eta(Y)TtV$$

olduğu görülür.

3.2.10. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, bir kosimplektik manifold olsun. Böylece $p\in\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ deki $T_p\bar{M}$ tanjant uzayında ξ ile lineer bağımlı olmayan bir X vektörü için X ile φX vektörlerinin gerdiği düzleme φ-*kesiti* denir. $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ üzerinde bir vektör alanı ve her bir nokta için φ -kesiti sabit ise manifolda *sabit kesit eğriliğine sahiptir* denir. c -sabit kesit eğriliğine sahip bir $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ kosimplektik manifolduna *Kosimplektik uzay form* denir ve bu $\bar{M}(c)$ ile gösterilir. $\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formunun $\bar{R}$ eğrilik tensörü de

$$\begin{aligned}\bar{R}(Y,X)Z = \frac{c}{4}\{ & g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X \\ & -\eta(X)\eta(Z)Y + \eta(X)g(Y,Z)\xi - \eta(Y)g(X,Z)\xi \\ & + g(\varphi X,Z)\varphi Y + g(Y,\varphi Z)\varphi X + 2g(Y,\varphi X)\varphi Z\}\end{aligned} \tag{3.47}$$

biçiminde verilir.

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldu ve bunun bir altmanifoldu M olsun. Eş. 3.47 de Z yerine $V \in \chi^{\perp}(M)$ alınırsa

$$\bar{R}(Y,X)V = \frac{c}{4}\{g(Y,\varphi V)\varphi X - g(X,\varphi V)\varphi Y + 2g(Y,\varphi X)\varphi V\} \tag{3.48}$$

yazılır. Bu denklem ile $U \in \chi^{\perp}(M)$ çarpılırsa

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(Y,X)V,U) = \frac{c}{4}\{ & g(Y,\varphi V)g(\varphi X,U) - g(X,\varphi V)g(\varphi Y,U) \\ & + 2g(Y,\varphi X)g(\varphi V,U)\}\end{aligned}$$

olur. Burada Eş. 2.30 kullanılırsa

$$\begin{aligned}g(R^{\perp}(Y,X)V,U) = \frac{c}{4}\{ & g(NX,V)g(NY,U) - g(NY,V)g(NX,U) \\ & + 2g(Y,TX)g(nV,U)\} + g([A_V,A_U]Y,X)\end{aligned} \tag{3.49}$$

olduğu görülür. Ayrıca Eş. 2.24 ve Eş. 3.47 kullanılırsa (2n+1)-boyutlu $\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formunun bir M altmanifoldunun Riemann eğrilik tensörü R olmak üzere

$$\begin{aligned}R(Y,X)Z = \frac{c}{4}\{ & g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y \\ & + \eta(X)g(Y,Z)\xi - \eta(Y)g(X,Z)\xi + g(Y,\varphi Z)\varphi X \\ & + g(\varphi X,Z)\varphi Y + 2g(Y,\varphi X)\varphi Z\} + A_{\sigma(X,Z)}Y - A_{\sigma(Y,Z)}X \\ & + (\nabla_X\sigma)(Y,Z) - (\nabla_Y\sigma)(X,Z)\end{aligned} \tag{3.50}$$

biçiminde ifade edilebilir. Böylece Eş. 3.50 nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$R(Y,X)Z = \frac{c}{4}\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X + \eta(Y)\eta(Z)X - \eta(X)\eta(Z)Y + \eta(X)g(Y,Z)\xi - \eta(Y)g(X,Z)\xi + g(Y,TZ)TX + g(TX,Z)TY + 2g(Y,TX)TZ\} + A_{\sigma(X,Z)}Y - A_{\sigma(Y,Z)}X \tag{3.51}$$

ve

$$\left(R(Y,X)Z\right)^{\perp} = (\nabla_Y \sigma)(X,Z) - (\nabla_X \sigma)(Y,Z) = \frac{c}{4}\{g(Y,TZ)NX + g(TX,Z)NY + 2g(Y,TX)NZ\} \tag{3.52}$$

olduğu görülür.

4. KONTAK PSEUDO-SLANT ALTMANİFOLDLAR

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda, problemimizin detaylarının daha iyi anlaşılması için öncelikle hemen hemen kontak metrik manifoldların kontak pseudo-slant altmanifoldları tanımlandı. Kontak pseudo-slant altmanifoldlarla ilgili teorem ve sonuçlara yer verildi. İkinci kısımda kosimplektik manifoldların kontak pseudo-slant altmanifoldlarının tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerekli ve yeterli şartlar araştırıldı. Ayrıca, D_θ -geodezik, $D^\perp$ -geodezik ve mixed-geodeziklik kavramları tanımlanarak bazı sonuçlar verildi. $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M nin kontak pseudo-slant çarpım olduğu gösterildi. Son kısımda, kosimplektik uzay formlarının kontak pseudo-slant altmanifoldu M nin Ricci tensörü hesaplandı ve her kosimplektik uzay formun kontak pseudo-slant altmanifoldunun η-Einstein olduğu gösterildi. Kosimplektik uzay formunda kontak pseudo-slant altmanifoldun skaler eğriliği hesaplandı. Çalışmamız $\mathbb{R}^9$ da 5-boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifold örneği ile desteklendi.

4.1. Hemen Hemen Kontak Metrik Manifoldların Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları

Bu kısımda, bir hemen hemen kontak metrik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu tanımlanarak kontak pseudo-slant altmanifoldları karakterize eden tanım, teorem ve sonuçlar verildi.

4.1.1. Tanım

Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin her bir p noktasındaki T_pM tanjant uzayını r-boyutlu D_p alt vektör uzayına götüren dönüşüm D olsun. $\xi \in \chi(M)$ olmak üzere her $p \in M$ ve her $X_p \in D_p$ vektörü için φX_p ve D_p alt vektör uzayı arasındaki $\theta_D(p)$ açısı sabit yani, $p \in M$ ve $X_p \in D_p$ nin seçiminden bağımsız ise M üzerinde D distribüsyonuna *slant distribüsyon* denir. θ_D sabit açısına da D distribüsyonun *slant açısı* denir. Buradan sonraki kısımda slant distribüsyonu D_θ ile göstereceğiz.

4.1.2. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, hemen hemen kontak metrik manifoldunun bir altmanifoldu M ve D_θ ta M üzerinde ξ ye ortogonal distribüsyon olsun. Bu durumda D_θ ın slant olması için gerek ve yeter şart her $X \in D_\theta$ için

$$T^2 X = -\lambda X$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda \in [0,1]$ sabit sayısının var olmasıdır. Ayrıca $\lambda = \cos^2 \theta_{D_\theta}$ dir (Cabrerizo, 1999).

4.1.3. Tanım

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, hemen hemen kontak metrik manifoldun bir altmanifoldu M ve $p \in M$ için ξ_p ile lineer bağımlı olmayan sıfırdan farklı bir vektör X olsun. TX ile φX arasındaki açıya *slant açısı* denir. Bu açıyı $\theta(p)$ ile gösterelim. $\forall p \in M$ noktası ve her $X \in \chi(M) - \{\xi_p\}$ için $\theta_{(p)}$ slant açısı sabit ise M ye $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *slant altmanifoldu* denir. Ayrıca $\theta(p) \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ dir (Cabrerizo, 1999).

Buna göre bir hemen hemen kontak metrik manifoldunun

i) Anti-invaryant altmanifoldları özel olarak $\theta = \frac{\pi}{2}$ slant açılı slant altmanifoldlardır.

ii) İnvaryant altmanifoldları ise $\theta = 0$, slant açılı slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold invaryant ve anti- invaryant değilse, *proper-slant altmanifold* olarak adlandırılır.

4.1.4. Teorem

Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin ξ ye teğet altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin slant altmanifold olması için gerek ve yeter şart

$$T^2 = -\lambda(I - \eta \otimes \xi) \tag{4.1}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in [0,1]$ sabiti olmasıdır. Ayrıca M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2\theta$ dir (Cabrerizo, 2000).

İspat

M, slant altmanifold olsun. Bu durumda her $X \in \chi(M)$ için TX ile φX arasındaki slant açısı θ olmak üzere $\cos\theta = \frac{\|TX\|}{\|\phi X\|}$ dir. Ayrıca

$$\cos\theta = \frac{g(TX,\varphi X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = -\frac{g(\varphi TX, X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = -\frac{g(T^2X, X)}{\|TX\|\|\varphi X\|}$$

yazılabilir. Böylece ilk ve son terimlerden

$$-g(T^2X, X) = \cos\theta\|TX\|.\|\varphi X\|$$

olur. Burada $\|TX\| = \cos\theta\|\varphi X\|$ olduğu kullanılırsa

$$-g(T^2X, X) = \cos\theta\cos\theta.\|\varphi X\|^2 = \cos^2\theta g(\varphi X, \varphi X) = -\cos^2\theta g(\varphi^2X, X)$$

dir. Buradan da Eş. 3.1 den

$$T^2X = -\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi) \tag{4.2}$$

yazılır. Böylece $T^2 = -\lambda(I - \eta\otimes\xi)$ elde edilir.

Tersine her $X \in \chi(M)$ için

$$T^2X = -\lambda(X - \eta(X)\xi)$$

olacak şekilde $\lambda \in [0,1]$ sabiti olsun. M nin slant altmanifold olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{g(TX,\varphi X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = \frac{g(TX,TX)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = -\frac{g(T^2X, X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} \\ &= \frac{\lambda g(X-\eta(X)\xi, X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = -\lambda\frac{g(\varphi^2X, X)}{\|TX\|\|\varphi X\|} = \lambda\frac{g(\varphi X,\varphi X)}{\|TX\|\|\varphi X\|}\end{aligned}$$

Böylece

$$\cos\theta = \lambda \frac{\|\varphi X\|}{\|TX\|} = \lambda \frac{1}{\cos\theta}$$

olur. Dolayısıyla

$$\lambda = \cos^2\theta$$

elde edilir. O halde λ sabit olduğundan M, θ açılı slant altmanifold olur.

4.1.5. Sonuç

Bir hemen hemen kontak metrik manifold $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin θ slant açılı bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman her $X,Z \in \chi(M)$ için

$$g(TX,TZ) = \cos^2\theta\{g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)\} \tag{4.3}$$

ve

$$g(NX,NZ) = \sin^2\theta\{g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)\} \tag{4.4}$$

dir (Cabrerizo ve diğerleri, 2000a).

İspat

Eş. 3.15 te X yerine TX alınır ve Eş. 4.1 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(TX,TZ) &= -g(T^2X,Z) \\ &= g(\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi, Z) \\ &= \cos^2\theta\{g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)\} \end{aligned}$$

bulunur. Böylece Eş. 4.3 ispatlanmış olur. Şimdi Eş. 4.4 ün ispatı için Eş. 3.3 ve Eş. 3.7 kullanılırsa

$$g(\varphi X,\varphi Z) = g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)$$
$$g(TX,TZ) + g(NX,NZ) = g(X,Z) - \eta(X)\eta(Z)$$

burada, Eş. 4.3 kullanılırsa

$$g(NX,NZ)=g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)-\cos^2\theta\{g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)\}$$
$$=\sin^2\theta\{g(X,Z)-\eta(X)\eta(Z)\}$$

böylece, Eş. 4.4 elde edilir.

4.1.6. Tanım

Bir hemen hemen kontak metrik manifoldunun $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin altmanifoldu M olsun. Bu durumda

i) $TM=D^{\perp}\oplus D_{\theta}$, $\xi\in D_{\theta}$

ii) $D^{\perp}$ distribüsyonu, anti-invaryant(total-reel) distribüsyon yani, $\varphi D^{\perp}\subset(T^{\perp}M)$.

iii) M -üzerinde D_{θ}, θ -slant açılı slant distribüsyon olmak üzere D_{θ} ile φD_{θ} arasındaki slant açı $\theta\neq\frac{\pi}{2}$ dir.

yukarıdaki şartları sağlayan iki ortogonal distribüsyon $D^{\perp}$, D_{θ} varsa M ye $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin *kontak pseudo-slant altmanifoldu* adı verilir (Khan ve Khan, 2007).

Bu tanımda eğer, $\theta=0$ ise kontak pseudo-slant altmanifold semi-invaryant altmanifold adını alır. Böylece kontak pseudo-slant altmanifold semi-invaryant altmanifoldların bir genellemesidir. Diğer taraftan eğer, $boy(D^{\perp})=d_1$ ve $boy(D_{\theta})=d_2$ ile gösterirsek aşağıdaki koşulları elde ederiz.

i) Eğer $d_2=0$ ise M, bir anti- invaryant altmanifolddur.

ii) Eğer $d_1=0$ ve $\theta=0$ ise M, bir invaryant altmanifolddur.

iii) Eğer $d_1=0$ ve $\theta\neq0$ ise M, θ slant açılı proper-slant altmanifolddur.

iv) Eğer $d_1.d_2\neq0$ ve $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ise M, proper kontak pseudo-slant altmanifolddur.

v) Eğer $d_1.d_2\neq0$ ve $\theta=0$ ise M, semi-invaryant altmanifolddur.

vi) Eğer $d_1=0$ ve $\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$ ise M, proper-slant altmanifolddur.

Bir hemen hemen kontak metrik manifoldu $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$ nin kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

$$\omega_1 : \chi(M) \to D^{\perp}, \qquad \omega_2 : \chi(M) \to D_\theta$$

ortogonal projeksiyonları göstersinler. Her $X \in \chi(M)$ için

$$X = \omega_1 X + \omega_2 X + \eta(X)\xi \tag{4.5}$$

şeklinde yazılabilir. O halde $\omega_1 X \in D^{\perp}$ ve $\omega_2 X \in D_\theta$ dir.

Şimdi Eş. 4.5 e φ uygulanırsa

$$\varphi X = \varphi\omega_1 X + \varphi\omega_2 X$$

yazılır. Burada Eş. 3.7 kullanılırsa

$$TX + NX = T\omega_2 X + N\omega_1 X + N\omega_2 X$$

olduğu görülür. $\omega_1 X \in D^{\perp}$ olduğundan $T\omega_1 X = 0$ dir.

$$TX + NX = T\omega_2 X + N\omega_1 X + N\omega_2 X \tag{4.6}$$

olur. Böylece Eş. 4.6 nın sırasıyla teğet ve normal bileşenleri

$$TX = T\omega_2 X$$

ve

$$NX = N\omega_1 X + N\omega_2 X$$

olduğu görülür. Burada

$$\phi\omega_1 X = N\omega_1 X, \qquad T\omega_1 X = 0$$

ve

$$\varphi\omega_2 X = T\omega_2 X + N\omega_2 X, \quad T\omega_2 X \in D_\theta$$

dir.

$D^{\perp}$ ve D_{θ}, M üzerinde ortogonal distribüsyonlar olduğundan her $X \in D_{\theta}$ ve $Z \in D^{\perp}$ için

$$\varphi X = TX + NX \tag{4.7}$$

ve

$$\varphi Z = TZ + NZ = NZ \in N(D^{\perp}), \qquad TZ = 0 \tag{4.8}$$

dir. Şimdi Eş. 3.3 ten

$$g(\varphi X, \varphi Z) = g(X, Z) - \eta(Z)\eta(X)$$

yazılır. O halde Eş. 4.7 ve Eş. 4.8 kullanılırsa

$$g(NX, NZ) = 0$$

olduğu görülür. Burada $NX \in N(D_{\theta})$ ve $NZ \in N(D^{\perp})$ olduğundan, $N(D^{\perp})$ ve $N(D_{\theta})$ distribüsyonlarının birbirlerine ortogonal olduğunu gösterir. Böylece $T^{\perp}M$ -normal uzayını μ, $\varphi(TM)'$ nin $T^{\perp}M$ deki ortogonal tümleyeni olmak üzere

$$T^{\perp}M = N(D^{\perp}) \oplus N(D_{\theta}) \oplus \mu \tag{4.9}$$

şeklinde ifade edebiliriz. Burada, $N(D^{\perp}) \perp N(D_{\theta})$ dir.

4.2. Kosimplektik Manifoldların Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları

Bu kısımda, kosimplektik manifoldların kontak pseudo-slant altmanifoldlarının tanımından ortaya çıkan distribüsyonların integrallenebilirliği için gerekli ve yeterli şartlar araştırıldı. Ayrıca D_{θ} -geodezik, $D^{\perp}$ -geodezik ve mixed-geodeziklik kavramları verilerek kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant çarpımı incelenip, bazı sonuçlar elde edildi. Daha sonra problemimizi destekleyen hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^9$ da 5 -boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifold örneği kurularak $D^{\perp}$-distribüsyonunun integrallenebilir olduğu ve M nin $D^{\perp}$-geodezik olmadığı fakat D_{θ} -geodezik ve mixed geodezik altmanifold olduğu görüldü.

Her $Z,W \in D^{\perp}$ ve $X \in \chi(M)$ için Eş. 2.14, Eş. 2.20, Eş. 3.18 ve Eş. 2.23 kullanılarak

$$\begin{aligned} g(A_{NZ}W - A_{NW}Z, X) &= g(\sigma(W,X), NZ) - g(\sigma(Z,X), NW) \\ &= g(\bar{\nabla}_X W, \varphi Z) - g(\bar{\nabla}_X Z, \varphi W) \\ &= g(\varphi\bar{\nabla}_X Z, W) - g(\bar{\nabla}_X \varphi Z, W) \\ &\quad g(\bar{\nabla}_X \varphi Z - (\bar{\nabla}_X \varphi)Z, W) \\ &\quad + g(\bar{\nabla}_X \varphi W - (\bar{\nabla}_X \varphi)W, Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_X \varphi Z, W) - g(\bar{\nabla}_X \varphi W, Z) \\ &= -g(A_{NZ}W + A_{NW}Z, X). \end{aligned}$$

elde ederiz. Buradan da gerekli işlemler yapılırsa

$$A_{NZ}W = A_{NW}Z \tag{4.10}$$

elde edilir.

4.2.1. Teorem

$\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun bir kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O halde

i) Herhangi bir $X \in D_\theta$ için $T^2X = -\lambda(X - \eta(X)\xi)$,

ii) D_θ ya ortogonal $\forall X \in \chi(M)$ için $TX = 0$

şartları sağlanır. Burada $\lambda = \cos^2\theta$ dır.

İspat

Teorem 4.1.4' ten $TM = D_\theta \oplus D^{\perp}$ olduğundan $D_\theta \subset TM$ dir. Ayrıca $\forall X \in D_\theta$ ise $X \in \chi(M)$ dir. Buradan da teoremin ifadesi açıktır.

ii−) Tanım 4.2.8 ve Teorem 4.1.4' ten $TM = D_\theta \oplus D^{\perp}$ olduğundan $\forall X \in D_\theta$ için D_θ ya ortogonal olan $\forall X \in D^{\perp}$ dir. Böylece $\varphi X = NX$ yazılabilir. Buradan $TX = 0$ olduğu açıktır.

4.2.2. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldunun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman $X,Y \in D^{\perp} \oplus D_{\theta}$ için $\eta([Y,X]) = 0$ dır.

İspat

Her $X,Y \in D^{\perp} \oplus D_{\theta}$ için

$$g([Y,X],\xi) = g(\bar{\nabla}_Y X - \bar{\nabla}_X Y,\xi) \tag{4.11}$$

yazılabilir. Burada Eş. 4.11 de Eş. 2.14 ve Eş. 3.27 kullanılırsa

$$g([Y,X],\xi) = g(\nabla_Y X - \nabla_X Y,\xi) = -g(\nabla_Y \xi, X) + g(\nabla_X \xi, Y) = 0$$

olur. Buradan Eş. 3.2 den

$$g([Y,X],\xi) = \eta([Y,X]) = 0$$

olduğu görülür.

4.2.3. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $X,Y \in D^{\perp}$ için

$$A_{NX}Y = A_{NY}X \tag{4.12}$$

olmasıdır.

İspat

Her $X,Y \in D^{\perp}$ için Eş. 3.18 den

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi \bar{\nabla}_X Y$$

dir. Böylece Eş. 2.14, Eş. 3.21 ve Eş. 3.7 den

$$0=\bar{\bar{\nabla}}_X NY-\varphi(\nabla_X Y+\sigma(X,Y)) \tag{4.13}$$

yazılabilir. Burada Eş. 4.13 te Eş. 2.20, Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 kullanılırsa

$$A_{NY}X-\nabla_X^{\perp}NY+T\nabla_X Y+N\nabla_X Y+t\sigma(X,Y)+n\sigma(X,Y)=0 \tag{4.14}$$

dir. O halde Eş. 4.14 ün teğet bileşenleri alınırsa

$$A_{NY}X+T\nabla_X Y+t\sigma(X,Y)=0 \tag{4.15}$$

olur. Böylece Eş. 4.15 te X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$A_{NX}Y+T\nabla_Y X+t\sigma(X,Y)=0 \tag{4.16}$$

dır. Burada Eş. 4.15 ile Eş. 4.16 taraf tarafa çıkarılırsa

$$A_{NY}X-A_{NX}Y+T\nabla_X Y-T\nabla_Y X=0 \tag{4.17}$$

olur. Burada gerekli düzenlemelerle

$$T\left[Y,X\right]=A_{NY}X-A_{NX}Y \tag{4.18}$$

yazılabilir. O halde Eş. 4.18 de her $X,Y\in D^{\perp}$ için $\left[Y,X\right]\in D^{\perp}$ olması için gerek ve yeter şart

$$A_{NY}X=A_{NX}Y$$

olmasıdır.

4.2.4. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W\in D^{\perp}$ için

$$(\nabla_Z T)W=(\nabla_W T)Z \tag{4.19}$$

olmasıdır.

İspat

Her $Z,W \in D^{\perp}$ için Eş. 3.21 den

$$(\bar{\nabla}_Z \varphi)W = 0$$

dir. Burada Eş. 3.18 den

$$\bar{\nabla}_Z \varphi W - \varphi \bar{\nabla}_Z W = 0 \tag{4.20}$$

yazılır. Böylece Eş. 4.20 de; Eş. 2.14, Eş. 2.20 ve Eş. 3.7 kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_Z NW - \varphi(\nabla_Z W + \sigma(W,Z)) = 0 \tag{4.21}$$

olur. Bu durumda Eş. 4.21 de Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 kullanılırsa

$$-A_{NW}Z + \nabla^{\perp}_Z NW - T\nabla_Z W - N\nabla_Z W - t\sigma(W,Z) - n\sigma(X,Y) = 0 \tag{4.22}$$

elde edilir. Burada Eş. 4.22 nin teğet bileşenleri alınırsa

$$A_{NW}Z + T\nabla_Z W + t\sigma(W,Z) = 0 \tag{4.23}$$

dır. Böylece Eş. 4.23 te gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$A_{NW}Z + T\nabla_Z W + T\nabla_W Z - T\nabla_W Z + t\sigma(W,Z) = 0 \tag{4.24}$$

yazılabilir. Bu durumda Eş. 4.24 te de gerekli düzenlemelerle

$$T\left[W,Z\right] = A_{NW}Z + T\nabla_W Z + t\sigma(W,Z)$$

olduğu görülür. $Z,W \in D^{\perp}$ için $\left[Z,W\right] \in D^{\perp}$ olduğundan $T[W,Z] = 0$ dır.

$$A_{NW}Z + T\nabla_W Z + t\sigma(W,Z) = 0 \tag{4.25}$$

dır. Benzer olarak

$$A_{NZ}W + T\nabla_Z W + t\sigma(W,Z) = 0 \tag{4.26}$$

yazılabilir. Burada Eş. 4.24 ve Eş. 4.25 taraf tarafa çıkarılırsa

$$A_{NW}Z - A_{NZ}W + T\nabla_W Z - T\nabla_Z W = 0 \tag{4.27}$$

dir. Böylece Eş. 3.19 ve Eş. 4.12 kullanılırsa

$$(\nabla_Z T)W = (\nabla_W T)Z$$

elde edilir. Tersine

$$(\nabla_Z T)W = (\nabla_W T)Z$$

olsun. Böylece

$$\nabla_Z TW - T\nabla_Z W = \nabla_W TZ - T\nabla_W Z$$

yazılır. Burada her $Z, W \in D^{\perp}$ için $TW = 0,\ TZ = 0$ olduğundan

$$T\nabla_W Z - T\nabla_Z W = T\left[W, Z\right] = 0$$

dır. Dolayısıyla $D^{\perp}$ integtallenebilirdir.

4.2.5. Teorem

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman slant distribüsyonu D_θ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $W \in D^{\perp}$ ve $X \in D_\theta$ için

$$TA_{NW}X + A_{NW}TX = 0$$

olmasıdır.

İspat

Her $W \in D^{\perp}$ ve $X, Y \in D_\theta$ için

$$g(\left[X, Y\right], W) = g(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, W) = g(\bar{\nabla}_Y W, X) - g(\bar{\nabla}_X W, Y)$$

dir. Burada Eş. 3.3 ve Eş. 3.21 kullanılırsa

$$g(\left[X, Y\right], W) = g(\varphi\bar{\nabla}_Y W, \varphi X) - g(\varphi\bar{\nabla}_X W, \varphi Y)$$

olur. Daha sonra gerekli düzenlemelerle

$$g([X,Y],W)=g(\bar{\nabla}_Y\varphi W,\varphi X)-g(\bar{\nabla}_X\varphi W,\varphi Y) \tag{4.28}$$

yazılabilir. Bu durumda Eş. 4.28 de, Eş. 3.7 kullanılır ve gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$g([X,Y],W)=g(\bar{\nabla}_Y NW,\varphi X)-g(\bar{\nabla}_X NW,\varphi Y) \tag{4.29}$$

dir. Böylece Eş. 4.29 da, Eş. 3.7 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X,Y],W)&=g(\bar{\nabla}_Y NW,TX)+g(\bar{\nabla}_Y NW,NX)\\ &\quad -g(\bar{\nabla}_X NW,TY)-g(\bar{\nabla}_X NW,NY) \end{aligned} \tag{4.30}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan Eş. 3.18 den

$$(\bar{\nabla}_X\varphi)W=\bar{\nabla}_X\varphi W-\varphi\bar{\nabla}_X W$$

dir. Buradan Eş. 3.21, Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 den

$$\bar{\nabla}_X NW-T\nabla_X W-N\nabla_X W-t\sigma(X,W)-n\sigma(X,W)=0 \tag{4.31}$$

yazılır. Bu durumda Eş. 4.31 de, Eş. 2.20 kullanılırsa

$$-A_{NW}X+\nabla_X^{\perp}NW=T\nabla_X W+N\nabla_X W+t\sigma(X,W)+n\sigma(X,W) \tag{4.32}$$

olur. Burada Eş. 4.32 nin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla

$$-A_{NU}X=T\nabla_X W+t\sigma(X,W) \tag{4.33}$$

ve

$$(\nabla_X N)W=n\sigma(X,W) \tag{4.34}$$

dir. Böylece Eş. 4.30 dan

$$g\left([X,Y],W\right)=g(A_{NW}X,TY)-g(A_{NW}Y,TX)+g(\nabla_Y^{\perp}NW,NX)-g(\nabla_X^{\perp}NW,NY)$$

yazılabilir. Burada Eş. 3.19 dan

$$\begin{aligned} g\left(\left[X,Y\right],W\right) = -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) \\ + g((\nabla_Y N)W + N\nabla_Y W, NX) \\ - g((\nabla_X N)W + N\nabla_X W, NY) \end{aligned}$$

yazılır. Bu durumda Eş. 4.34 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(\left[X,Y\right],W\right) = -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) \\ + g(n\sigma(Y,W), NX) + g(N\nabla_Y W, NX) \\ - g(n\sigma(X,W), NY) - g(N\nabla_X W, NY) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece gerekli sadeleştirmelerle

$$\begin{aligned} g\left(\left[X,Y\right],W\right) = -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) \\ + g(N\nabla_Y W, NX) - g(N\nabla_X W, NY) \end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. Eş. 4.35 te, Eş. 4.4 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g\left(\left[X,Y\right],W\right) &= -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) \\ &\quad + \sin^2\theta\left\{g(\nabla_Y W, X) - g(\nabla_X W, Y)\right\} \\ &= -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) \\ &\quad + \sin^2\theta\left\{g(\nabla_X Y, W) - g(\nabla_Y X, W)\right\} \end{aligned}$$

yazılabilir. O halde

$$g\left(\left[X,Y\right],W\right) = -g(TA_{NW}X,Y) - g(A_{NW}TX,Y) + \sin^2\theta g\left(\left[X,Y\right],W\right)$$

olur. Buradan da gerekli düzenlemelerle

$$\cos^2\theta g\left(\left[X,Y\right],W\right) = -g\left(TA_{NW}X,Y\right) - g\left(A_{NW}TX,Y\right)$$

dir. Bu son eşitlikten her $X,Y \in D_\theta$ için $[X,Y] \in D_\theta$ olduğundan

$$g(TA_{NW}X,Y) + g(A_{NW}TX,Y) = 0$$

dır. Bu ise

$$TA_{NW}X + A_{NW}TX = 0$$

ifadesine denktir.

4.2.6. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda slant distribüsyon D_θ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $X,Y \in D_\theta$ için

$$\omega_1\{\nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY}X + t\sigma(X,Y)\} = 0$$

şartını sağlamasıdır.

İspat

$D^\perp$ ve D_θ - distribüsyonları üzerine tanımlanan projeksiyonlar

$$\omega_1 : \chi(M) \to D^\perp, \qquad \omega_2 : \chi(M) \to D_\theta$$

olsun. Her $X,Y \in D_\theta$ için Eş. 2.14, Eş. 3.7 ve Eş. 3.18 den

$$(\bar{\nabla}_X \varphi)Y = \bar{\nabla}_X \varphi Y - \varphi\bar{\nabla}_X Y = \bar{\nabla}_X TY + \bar{\nabla}_X NY - \varphi(\nabla_X Y + \sigma(X,Y)) = 0 \qquad (4.36)$$

olur. Burada Eş. 4.35 te Eş. 2.14, Eş. 2.20, Eş. 3.7 ve Eş. 3.8 kullanılırsa

$$\nabla_X TY + \sigma(X,TY) - A_{NY}X + \nabla_X^\perp NY - T\nabla_X Y - N\nabla_X Y - t\sigma(X,Y) - n\sigma(X,Y) = 0 \quad (4.37)$$

şekline dönüşür. Buradan da Eş. 4.36 da gerekli düzenlemeler yapılır ve Eş. 3.19 denklemi kullanılırsa

$$(\nabla_X T)Y - t\sigma(X,Y) - A_{NY}X + (\nabla_X N)Y + \sigma(X,TY) - n\sigma(X,Y) = 0 \qquad (4.38)$$

olduğu görülür. Böylece Eş. 4.37 nin teğet bileşenleri alınırsa

$$\nabla_X TY - T\nabla_X Y - A_{NY}X - t\sigma(X,Y) = 0 \qquad (4.39)$$

yazılır. Bu ifade tekrar düzenlenirse

$$\nabla_X TY - T\nabla_X Y + T\nabla_Y X - T\nabla_Y X - A_{NY}X - t\sigma(X,Y) = 0$$

olduğu görülür. Böylece

$$T[X,Y]=\nabla_X TY-T\nabla_Y X-A_{NY}X-t\sigma(X,Y) \tag{4.40}$$

yazılabilir. O halde Eş. 4.40 denklemine ω_1 projeksiyonu uygulanırsa

$$\omega_1 T\left[X,Y\right]=\omega_1\left\{\nabla_X TY-T\nabla_Y X-A_{NY}X-t\sigma(X,Y)\right\}$$

olur. Dolayısıyla $X,Y\in D_\theta$ için $[X,Y]\in D_\theta$ olduğundan $\omega_1 T\left[X,Y\right]=0$ dır. Yani

$$\omega_1\left\{\nabla_X TY-T\nabla_Y X-A_{NY}X-t\sigma(X,Y)\right\}=0$$

dır.

4.2.7. Teorem

$\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda slant distribüsyonu D_θ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W\in D_\theta$ için

$$\nabla_Z^\perp NW-\nabla_W^\perp NZ+\sigma(Z,TW)-\sigma(W,TZ)\in\mu\oplus N(D_\theta)$$

olmasıdır.

İspat

Her $Z,W\in D_\theta$ ve $Y\in D^\perp$ için Eş. 3.3 eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\left[Z,W\right],Y) &= g(\bar{\nabla}_Z W,Y)-g(\bar{\nabla}_W Z,Y) \\ &= g(\varphi\bar{\nabla}_Z W,\varphi Y)+\eta(\bar{\nabla}_Z W)\eta(Y) \\ &\quad -g(\varphi\bar{\nabla}_W Z,\varphi Y)-\eta(\bar{\nabla}_W Z)\eta(Y) \end{aligned}$$

Buradan

$$g(\left[Z,W\right],Y)=g(\varphi\bar{\nabla}_Z W,\varphi Y)-g(\varphi\bar{\nabla}_W Z,\varphi Y) \tag{4.41}$$

olur. Böylece Eş. 4.41 de, Eş. 3.18 kullanılırsa

$$g(\left[Z,W\right],Y)=g(\bar{\nabla}_Z\varphi W,\varphi Y)-g(\bar{\nabla}_W\varphi Z,\varphi Y) \tag{4.42}$$

yazılabilir. Bu durumda Eş. 4.42 de, Eş. 3.21 ve Eş. 3.7 kullanılırsa

$$g([Z,W],Y) = g(\bar{\nabla}_Z TW, \varphi Y) + g(\bar{\nabla}_Z NW, \varphi Y) - g(\bar{\nabla}_W TZ, \varphi Y) - g(\bar{\nabla}_W NZ, \varphi Y)$$

olduğu görülür. Burada Eş. 2.14 ve Eş. 2.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([Z,W],Y) = {} & g(\nabla_Z TW, \varphi Y) + g(\sigma(Z,TW), \varphi Y) - g(A_{NW} Z, \varphi Y) + g(\nabla_Z^{\perp} NW, \varphi Y) \\ & - g(\nabla_W TZ, \varphi Y) - g(\sigma(W,TZ), \varphi Y) + g(A_{NZ} W, \varphi Y) - g(\nabla_W^{\perp} NZ, \varphi Y) \end{aligned} \quad (4.43)$$

dir.

Burada $Y \in D^{\perp}$ için $\varphi Y \in \varphi(D^{\perp}) \subseteq T^{\perp} M$ olduğundan Eş. 4.43

$$g([Z,W],Y) = g(\nabla_Z^{\perp} NW - \nabla_W^{\perp} NZ - \sigma(W,TZ) + \sigma(Z,TW), \varphi Y)$$

formuna indirgenir. $Z, W \in D_\theta$ için $[Z,W] \in D_\theta$ olduğundan

$$\nabla_Z^{\perp} NW - \nabla_W^{\perp} NZ + \sigma(Z,TW) - \sigma(W,TZ) \in \mu \oplus N(D_\theta)$$

dır.

4.2.8. Tanım

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun.

i) Her $X, Z \in D_\theta$ için $\sigma(X,Z) = 0$ ise M'ye D_θ -total geodezik,

ii) Her $X, Z \in D^{\perp}$ için $\sigma(X,Z) = 0$ ise M'ye $D^{\perp}$ -total geodezik,

iii) Her $X \in D_\theta$ ve $Z \in D^{\perp}$ için $\sigma(X,Z) = 0$ ise M' ye *mixed-total geodezik altmanifold* denir.

4.2.9. Teorem

$\bar{M}(\varphi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M ya mixed-total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur.

İspat

Her $X \in D_\theta,\ Z \in D^\perp$ ve $V \in \chi^\perp(M)$ için Eş. 3.8 ve Eş. 3.21 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, Z) &= g(\bar{\nabla}_X Z, V) = -g(\bar{\nabla}_X V, Z) \\ &= -g(\varphi \bar{\nabla}_X \varphi Z) = g((\bar{\nabla}_X \varphi)V - \bar{\nabla}_X \varphi V, \varphi Z) \\ &= -g(\bar{\nabla}_X tV + \bar{\nabla}_X nV, NZ) \\ &= -g(\sigma(X, nV), NZ) - g(\nabla_X^\perp nV, NZ) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan Eş. 3.17, Eş. 3.20 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, Z) &= -g(\sigma(X, tV), NZ) - g((\nabla_X n)V + n\nabla_X^\perp V, NZ) \\ &= -g(\sigma(X, tV), NZ) - g(-\sigma(X, tV) - NA_V X, NZ) \\ &= g(NA_V X, NZ) = -g(tNA_V X, Z). \end{aligned}$$

dir. Buradan Eş. 3.10 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(A_V X, Z) &= -g(-A_V X + \eta(A_V X)\xi - T^2 A_V X, Z) \\ &= g(A_V X, Z) + g(T^2 A_V X, Z), \end{aligned}$$

Böylece

$$-\cos^2\theta g(A_V X - \eta(A_V X)\xi, Z) = -\cos^2\theta g(A_V X, Z) = 0$$

dır. Buradan son ifade yorumlanırsa $\cos^2\theta = 0$, böylece $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ veya Eş. 2.23 ten $g(\sigma(X, Z), V) = 0$ dır. Bu durumda sırasıyla, M ya *anti-invaryant* ya da *mixed total geodezik altmanifold*dur.

4.2.10. Teorem

$\bar{M}(\phi, \xi, \eta, g)$, kosimplektik manifoldun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M, ya $D^\perp$-total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur.

İspat

Her $Z, X \in \Gamma(D^\perp)$ ve $V \in \Gamma(T^\perp M)$ için Eş. 3.17, Eş. 3.10, Eş. 3.27 ve Eş. 4.1 denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\sigma(Z,X),V) &= -g(\sigma(X,tV),NZ) - g((\nabla_W n)V,NZ) \\
&= -g(\sigma(X,tV),NZ) + g(\sigma(tV,X) + NA_V X,NZ) \\
&= g(NA_V X,NZ) = -g(tNA_V X,Z) \\
&= -g(-A_V X + \eta(A_V X)\xi - T^2 A_V X,Z) \\
&= g(A_V X,Z) + g(T^2 A_V X,Z)
\end{aligned}$$

veya

$$-\cos^2\theta g(A_V X - \eta(A_V X)\xi, Z) = -\cos^2\theta g(A_V X,Z) = 0.$$

dır. Buradan son ifade yorumlanırsa $\cos^2\theta = 0,$ böylece $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ya da $g(\sigma(X,Z),V) = 0$ dır. Bu durumda sırasıyla, M ya *anti-invaryant* ya da $D^{\perp}$- *total geodezik altmanifold*dur.

4.2.11. Tanım

$\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Eğer D_θ ve $D^{\perp}$ distribüsyonları M de total geodezik ise M'ye *kontak pseudo-slant çarpım* denir.

Her $X,Y \in \Gamma(D_\theta)$ ve $W \in \Gamma(D^{\perp})$ için Eş. 3.4, Eş. 3.7, Eş. 3.17, Eş. 3.21 ve Eş. 4.3 kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g(\nabla_X Y,W) &= g(\phi\bar{\nabla}_X Y,\phi W) = g(\bar{\nabla}_X \phi Y - (\bar{\nabla}_X \phi)Y,\phi W) \\
&= g(\sigma(X,TY),NW) + g(\nabla^{\perp}_X NY,NW) \\
&= g(\sigma(X,TY),NW) + g((\nabla_X N)Y + N\nabla_X Y,NW) \\
&= g(\sigma(X,TY),NW) + g(nh(X,Y),NW) \\
&\quad - g(\sigma(X,TY),NW) + g(N\nabla_X Y,NW) \\
&= g(N\nabla_X Y,NW) = -g(tN\nabla_X Y,W) \\
&= -g(-\nabla_X Y + \eta(\nabla_X Y)\xi - T^2\nabla_X Y,W),
\end{aligned}$$

buradan gerekli düzenlemeler yapılır ve Eş. 4.1 kullanılırsa

$$g(T^2\nabla_X Y,W) = -\cos^2\theta g(\nabla_X Y,W) = 0 \tag{4.44}$$

denklemine sahibiz.

Diğer taraftan her $Z,W\in\Gamma(D^{\perp})$ ve $X\in\Gamma(D_\theta)$ için Eş. 2.14, Eş. 2.20, Eş. 3.7, Eş. 3.10, Eş. 3.21 ve Eş. 3.29 kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, X) &= -g(\bar{\nabla}_Z X, W) = -g(\phi\bar{\nabla}_Z X, \phi W) \\ &= g((\bar{\nabla}_Z\phi)X, \phi W) - g(\bar{\nabla}_Z \phi X, \phi W) \\ &= -g(\sigma(TX, Z), NW) - g(\nabla^{\perp}_Z NX, NW) \\ &= -g(\sigma(TX, Z), NW) - g((\nabla_Z N)X + N\nabla_Z X, NW) \\ &= -g(\sigma(TX, Z), NW) - g(n\sigma(X, Z), NW) \\ &\quad + g(\sigma(Z, TX), NW) - g(N\nabla_Z X, NW) = g(tN\nabla_Z X, W) \\ &= g(-\nabla_Z X + \eta(\nabla_Z X)\xi - T^2\nabla_Z X, W) \\ &= g(\nabla_Z W, X) + g(T^2\nabla_Z X, W), \end{aligned}$$

yazılır. Son ifade de Eş. 4.1 den

$$\cos^2\theta g(\nabla_Z X - \eta(\nabla_Z X)\xi, W) = -\cos^2\theta g(\nabla_Z W, X) = 0 \tag{4.45}$$

olur. Böylece Eş. 4.44 ve Eş. 4.45 in bir sonucu olarak aşağıdaki teoremi verebiliriz.

4.2.12. Teorem

Her $\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M, kontak pseudo-slant çarpımdır.

4.2.13. Teorem

$\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant bir altmanifoldu M olsun. Eğer N tensörü, D_θ-slant distribüsyon üzerinde paralel ise M, ya D_θ-geodeziktir ya da σ, D_θ üzerinde $-\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile n^2 nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

İspat

N, D_θ slant distribüsyon üzerinde paralel ise her $X,Y\in\Gamma(D_\theta)$ için Eş.3.29 kullanılırsa

$$n\sigma(X,Y) - \sigma(X,TY) = 0 \tag{4.46}$$

dir. Burada Eş. 4.46 da Y yerine $Y-\eta(Y)\xi\in\Gamma(D_\theta)$ alınırsa

$$n\sigma(X, Y - \eta(Y)\xi) - \sigma(X, TY) = 0$$

olur. Buradan

$$n\sigma(X, Y - \eta(Y)\xi) = \sigma(X, TY) \quad (4.47)$$

yazılır. Şimdi Eş. 4.46 da n uygulanırsa

$$n^2\sigma(X, Y - \eta(Y)\xi) = n\sigma(X, TY) \quad (4.48)$$

dir. O halde Eş. 4.47 de Y yerine TY alınırsa

$$n\sigma(X, TY) = \sigma(X, T^2Y) \quad (4.49)$$

denklemine dönüşür. Böylece Eş. 4.48 ve Eş. 4.49 dan

$$n^2\sigma(X, Y - \eta(Y)\xi) = n\sigma(X, TY) = \sigma(X, T^2Y) = -\cos^2\theta\sigma(X, Y - \eta(Y)\xi)$$

olduğu görülür. Burada ya $\sigma = 0$ dır; bu M nin D_θ-geodezik olduğunu söyler ya da σ, $-\cos^2\theta$ karakteristik değerli n^2 nin bir karakteristik vektörüdür.

4.3. Kosimplektik Uzay Formların Kontak Pseudo-Slant Altmanifoldları

Bu kısımda, kosimplektik uzay formların kontak pseudo-slant altmanifoldları çalışıldı. Çalışılan bazı teoremlerde (Dirik ve Atçeken, 2016a) adlı çalışmadan da yararlanılmıştır. Kosimplektik uzay formların Ricci tensörü verilerek skaler eğriliği hesaplandı ve aynı zamanda kosimplektik uzay formların total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldunun η-Einstein olduğu gösterildi.

4.3.1. Teorem

Kosimplektik uzay form $\bar{M}(c)$ nin kontak pseudo-slant eğrilik invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda M anti invaryant altmanifold ya da $\bar{M}(c)$ flat uzay formdur.

İspat

Eğer M kontak pseudo-slant eğrilik invaryant altmanifold ise Eş. 3.52 den her $X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$\frac{c}{4}\{g(Y, TZ)NX + g(TX, Z)NY + 2g(Y, TX)NZ\} = 0$$

Buradan Z yerine Y yazılırsa

$$\frac{c}{4}\{g(Y,TY)NX+g(TX,Y)NY+2g(Y,TX)NY\}=0$$

Böylece

$$\frac{3c}{4}g(Y,TX)NY=0$$

olur. Bu son denklemde X yerine TY alırsak

$$\frac{3c}{4}g(TY,TY)NY=0$$

dir. Buradan da

$$\frac{3c}{4}\cos^2\theta\{g(Y,Y)-\eta^2(Y)\}NY=0$$

Son ifade yorumlanırsa ya $c=0$ ya da $\theta=\frac{\pi}{2}$ olur.

4.3.2. Teorem

Kosimplektik uzay form $\bar{M}(c)$ nin bir proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman M nin S Ricci tensörü her $X,W\in\chi(M)$ için

$$\begin{aligned}S(X,W)=&\frac{c}{4}\{2p+q-1+3\cos^2\theta\}(g(W,X)-\eta(X)\eta(W))\\&+(2p+q+1)g(\sigma(X,W),H)-\sum_{l=1}^{2p+q+1}g(\sigma(X,e_l),\sigma(e_l,W))\end{aligned}\tag{4.50}$$

şeklinde verilir .

İspat

Her $X,Y,Z\in\chi(M)$ için Eş. 3.47 eşitliğinin her iki tarafı $W\in\chi(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}g(R(X,Y)Z,W)=&\frac{c}{4}\{g(Z,Y)g(W,X)-g(Z,X)g(Y,W)+\eta(X)\eta(Z)g(W,Y)\\&-\eta(Y)\eta(Z)g(X,W)+\eta(Y)\eta(W)g(X,Z)-\eta(X)\eta(W)g(Y,Z)\\&+g(X,\varphi Z)g(\varphi Y,W)-g(Y,\varphi Z)g(\varphi X,W)\\&+2g(X,\varphi Y)g(\varphi Z,W)\}+g(\sigma(X,W),\sigma(Y,Z))\\&-g(\sigma(Y,W),\sigma(X,Z)).\end{aligned}\tag{4.51}$$

yazılır. $boy(D_\theta)=2p+1,\ boy(D^\perp)=q$ olmak üzere $boy(TM)=2p+q+1$ dir. Böylece $TM=D_\theta\oplus D^\perp$ nin bazını

$\left\{e_1, e_2, ..., e_{p,} e_{p+1} = \sec\theta T e_1, e_{p+2} = \sec\theta T e_2, ..., e_{2p} = \sec\theta T e_p, e_{2p+1} = \xi, e_{2p+2}, e_{2p+3}, ..., e_{2p+q+1}\right\}$ şeklinde seçersek, $1 \le i \le p,\ 1 \le j \le p,\ \xi,\ 2p+2 \le k \le 2p+q+1$ olmak üzere

$$
\begin{aligned}
S(X,W) &= \sum_{i=1}^{P} g(R(X,e_i)e_i,W) + \sum_{j=p+1}^{2p} g(R(X,\sec\theta Te_j)\sec\theta Te_j,W) \\
&\quad + g(R(X,\xi)\xi,W) + \sum_{k=2p+2}^{2p+q+1} g(R(X,e_k)e_k,W) \\
&= \frac{c}{4}\left\{(2p+q)g(W,X)\right\} - \frac{c}{4}\left\{(2p+q-1)\eta(W)\eta(X)\right. \\
&\quad \left. +3\cos^2\theta\left[g(W,X)-\eta(W)\eta(X)\right] - g(W,X)\right\} \\
&\quad +(2p+q+1)g(\sigma(X,W),H) - \sum_{i=1}^{p} g(\sigma(e_i,W),\sigma(X,e_i)) \\
&\quad - \sum_{j=p+1}^{2p} g(\sigma(\sec\theta Te_j,W),\sigma(X,\sec\theta Te_j)) + g(\sigma(X,\xi),\sigma(\xi,W)) \\
&\quad - \sum_{k=2p+2}^{2p+q+1} g(\sigma(X,e_k),\sigma(e_k,W)).
\end{aligned}
$$

yazılır. Burada

$$
\begin{aligned}
\sum_{l=1}^{2p+q+1} g(\sigma(X,e_l),\sigma(e_l,W)) &= \sum_{i=1}^{p} g(\sigma(X,e_i),\sigma(e_i,W)) \\
&\quad + \sum_{j=p+1}^{2p} g(\sigma(\sec\theta Te_j,W),\sigma(X,\sec\theta Te_j)) \\
&\quad + \sum_{k=2p+2}^{2p+q+1} g(\sigma(X,e_k),\sigma(e_k,W))
\end{aligned}
$$

dir. Böylece bu son ifade yukarıda yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
S(X,W) &= \frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(g(W,X)-\eta(W)\eta(X)) \\
&\quad +(2p+q+1)g(\sigma(X,W),H) - \sum_{l=1}^{2p+q+1} g(\sigma(X,e_l),\sigma(e_l,W))
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

4.3.3. Teorem

Kosimplektik uzay form $\bar{M}(c)$ nin bir kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman M nin skaler eğriliği ρ

$$\rho = \frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(2p+q)+(2p+q+1)^2\|H\|^2-\|\sigma\|^2. \qquad (4.52)$$

şeklinde verilir .

İspat

Eş. 4.50 de $X = W = e_l$ yazılırsa

$$S(e_l,e_l)=\frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}\left\{g(e_l,e_l)-\eta(e_l)\eta(e_l)\right\}$$
$$+(2p+q+1)g(\sigma(e_l,e_l),H)-\sum_{l=1}^{2p+q+1}g(\sigma(e_l,e_l),\sigma(e_l,e_l))$$

olduğu görülür. Böylece $\sigma(\xi,\xi)=0$ olduğu göz önünde bulundurulursa

$$\rho=\sum_{l=1}^{2p+q+1}S(e_l,e_l)=\frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(2p+q)+(2p+q+1)^2\|H\|^2-\|\sigma\|^2.$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

4.3.4. Teorem

$\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\bar{M}(c)$ nın $c \neq 0$ olacak şekilde total umbilik proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M, ya semi-invaryant altmanifold ya da anti-invaryant altmanifolddur.

İspat

$\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formun total umbilik altmanifoldu $h(X.Y)=g(X,Y)H$ eşitliğinde $X=\xi$ alınırsa $H=0$ olduğu görülür. Bu durumda Eş. 3.47 kullanılırsa

$$g(\bar{R}(X,Y)Z,\varphi Z)=\frac{c}{2}\{g(X,\varphi Y)-g(NZ,NZ)\}=0. \qquad (4.52)$$

yazılır. Eş. 4.52 de $Y=TX$ alınarak,

$$g(\varphi X,TX)g(NZ,NZ)=0.$$

dır. Böylece

$$g(TX,TX)g(NZ,NZ)=0.$$

olur. Burada Eş. 4.3 ve Eş. 4.4 kullanılıp gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\sin^2\theta\cos^2\theta\{g(X,X)-\eta^2(X)\}g(Z,Z)=0$$

diğer bir ifadeyle

$$\sin^2 2\theta\{g(X,X)-\eta^2(X)\}g(Z,Z)=0$$

elde edilir. Buradan $\sin 2\theta=0$ dır. Yani $\theta=0$ veya $\theta=\frac{\pi}{2}$ olur. Böylece M ya bir semi-invaryant ya anti-invaryant altmanifold olduğu görülür.

4.3.5. Teorem

$\bar{M}(c)$, kosimplektik uzay formunun total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. O zaman M nin S Ricci tensörü her $X,W\in\chi(M)$ için

$$S(X,W)=\frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(g(W,X)-\eta(W)\eta(X)). \tag{4.53}$$

dir.

İspat

Eş. 2.18 ve Eş. 4.50 yi kullanarak

$$\begin{aligned}S(X,W)&=\frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(g(W,X)-\eta(W)\eta(X))\\&\quad+(2p+q+1)g(g(W,X)H,H)-\sum_{l=1}^{2p+q+1}g(g(e_l,W)H,g(X,e_l)H)\end{aligned}$$

Buradan da

$$\begin{aligned}S(X,W)&=\frac{c}{4}\left\{2p+q-1+3\cos^2\theta\right\}(g(W,X)-\eta(W)\eta(X))\\&\quad+(2p+q+1)g(W,X)\|H\|^2-\sum_{l=1}^{2p+q+1}g(g(X,e_l),g(e_l,W))\|H\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formun total umbilik altmanifoldu $h(X.Y) = g(X,Y)H$ eşitliğinde $X = \xi$ alınırsa $H = 0$ olduğu görülür. yukarıdaki eşitlikten Eş. 4.53 yazılır. Teorem 4.3.5 ten aşağıdaki sonucu verebiliriz.

4.3.6. Sonuç

Bir kosimplektik uzay form $\bar{M}(c)$ nin her total umbilik pseudo-slant altmanifoldu M, bir η -Einstein altmanifolddur.

Örnek

M, $\mathbb{R}^9$ da

$\chi(u,v,s,t,z) = (u\sinh\alpha, -v\cosh\alpha, -2u\sinh\alpha, v\cosh\alpha, s\cosh t, \cosh t, s\sinh t, -\sinh t, z)$

şeklinde tanımlanan bir altmanifoldu olsun. M nin tanjant demeti

$$e_1 = \sinh\alpha\frac{\partial}{\partial x_1} - 2\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}, \quad e_2 = -\cosh\alpha\frac{\partial}{\partial y_1} + \cosh\alpha\frac{\partial}{\partial y_2}, \quad e_5 = \xi = \frac{\partial}{\partial z}.$$

$$e_3 = \cosh t\frac{\partial}{\partial x_3} + \sinh t\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad e_4 = s\sinh t\frac{\partial}{\partial x_3} + \sinh t\frac{\partial}{\partial y_3} + s\cosh t\frac{\partial}{\partial x_4} - \cosh t\frac{\partial}{\partial y_4}$$

dir. Şimdi $\mathbb{R}^9$ un φ hemen hemen kontak metrik yapısı için koordinat sistemleri $(x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3, x_4, y_4, z)$ seçilirse, $\mathbb{R}^9$ un hemen hemen kontak yapısını

$$\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \varphi(\frac{\partial}{\partial y_j}) = -\frac{\partial}{\partial x_j}, \qquad 1 \le i, j \le 4$$

$$\varphi(\frac{\partial}{\partial z}) = 0, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \eta = dz.$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durumda $U = \mu_i\frac{\partial}{\partial x_i} + v_j\frac{\partial}{\partial y_j} + \lambda\frac{\partial}{\partial z} \in T(\mathbb{R}^9)$ olmak üzere

$$\varphi U = \mu_i\varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) + v_j\varphi(\frac{\partial}{\partial y_j}) + \lambda\varphi(\frac{\partial}{\partial z}) = \mu_i\frac{\partial}{\partial y_j} - v_j\frac{\partial}{\partial x_i},$$

$$g(\varphi U, \varphi U) = \mu_i^2 + v_j^2, \quad g(U,U) = \mu_i^2 + v_j^2 + \lambda^2, \quad \eta(U) = g(U,\xi) = \lambda$$

olur. Böylece

$$g(\varphi U,\varphi U)=g(U,U)-\eta^2(U)$$

$$\varphi^2 U=-\mu_i\frac{\partial}{\partial x_i}-v_j\frac{\partial}{\partial y_j}-\lambda\frac{\partial}{\partial z}+\lambda\frac{\partial}{\partial z}=-U+\eta(U)\xi$$

şartları sağlanmış olur. (φ,ξ,η,g), $\mathbb{R}^9$ un hemen hemen kontak metrik yapısıdır. Yukarıdaki baz vekörlerine φ uygulanırsa

$$\varphi e_1=\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial y_1}-\sinh\alpha\frac{\partial}{\partial y_2},\quad \varphi e_2=\cosh\alpha\frac{\partial}{\partial x_1}-\cosh\alpha\frac{\partial}{\partial x_2}$$

$$\varphi e_3=\cosh t\frac{\partial}{\partial y_3}-\sinh t\frac{\partial}{\partial y_4},\quad \varphi e_4=s\sinh t\frac{\partial}{\partial y_3}-\sinh t\frac{\partial}{\partial x_3}+s\cosh t\frac{\partial}{\partial y_4}+\cosh t\frac{\partial}{\partial x_4}.$$

elde edilir. Buradan $\cos\theta=\dfrac{g(e_1,\varphi e_2)}{\|e_1\|\|\varphi e_2\|}=\dfrac{3\sqrt{10}}{10}$ ve $\theta=\cos^{-1}(\dfrac{3\sqrt{10}}{10})$ dir. Bu durumda $D_\theta=sp\{e_1,e_2\}$ nin slant açısına sahip bir slant distribüsyon olduğu görülür. Diğer taraftan φe_3 ve φe_4 M, ye ortogonal olduğundan $D^\perp=sp\{e_3,e_4\}$ bir anti-invaryant distribüsyondur. Böylece M hemen hemen kontak metrik yapısıyla $\mathbb{R}^9$ un 5-boyutlu proper kontak pseudo-slant altmanifoldu olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

1) $\bar{M}(\varphi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda

a) Anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $X,Y \in D^{\perp}$ için

$$A_{NX}Y = A_{NY}X$$

olmasıdır.

b) Anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W \in D^{\perp}$ için

$$(\nabla_Z T)W = (\nabla_W T)Z$$

olmasıdır.

c) Slant distribüsyonu D_θ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $W \in D^{\perp}$ ve $X \in D_\theta$ için

$$TA_{NW}X + A_{NW}TX = 0$$

olmasıdır.

d) Slant distribüsyon D_θ nın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $X,Y \in D_\theta$ için

$$\omega_1\left\{\nabla_X TY - T\nabla_Y X - A_{NY}X + t\sigma(X,Y)\right\} = 0$$

şartını sağlamasıdır.

e) Slant distribüsyonu D_θ ın integrallenebilir olması için gerek ve yeter şartlardan biri her $Z,W \in D_\theta$ için

$$\nabla_Z^{\perp}NW - \nabla_W^{\perp}NZ + \sigma(Z,TW) - \sigma(W,TZ) \in \mu \oplus N(D_\theta)$$

olmasıdır.

f) M, ya $D^{\perp}$-total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur.

g) M, ya mixed-total geodezik ya da anti-invaryant altmanifolddur.

h-) Her $\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M, kontak pseudo-slant çarpımdır.

2-) $\bar{M}(\phi,\xi,\eta,g)$, kosimplektik manifoldun kontak pseudo-slant bir altmanifoldu M olsun. Eğer N tensörü, D_θ-slant distribüsyon üzerinde paralel ise M, ya D_θ-geodeziktir ya da σ, D_θ üzerinde $-\cos^2\theta$ karakteristik değeri ile n^2 nin bir karakteristik vektörüne sahiptir.

3-) $\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formunun proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\bar{M}(c)$ nın $c \neq 0$ olacak şekilde total umbilik proper kontak pseudo-slant altmanifoldu M, ya semi invaryant altmanifold ya da anti invaryant altmanifolddur.

4-) $\bar{M}(c)$ kosimplektik uzay formların Ricci tensörü verilerek skaler eğriliği hesaplandı ve aynı zamanda kosimplektik uzay formların total umbilik kontak pseudo-slant altmanifoldunun η-Einstein olduğu görüldü.

Bu çalışma ışığında bu konuyu çalışacak bilim insanlarının faydalanacağı kanısındayız. Çalışılan kontak pseudo-slant problemi başka manifoldlar için de denenebilir ve farklı sonuçlar bulunabilir.

KAYNAKLAR

Ali , A. and Ozel, C. (2017). Geometry of Warped Product Pointwise Semi-Slant Submanifolds of Cosymplectic Manifolds and Its Applications. *International Journal of Geometric Methods in Modern Physics,* 14(03), 1750042.

Atçeken, M., Yıldırım, Ü. and Dirik, S. (2018). Contact Pseudo- Slant Submanifold of a Cosymplectic Manifold. *New Trends of Mathematical Sciences,* 6(4), 154-164.

Atçeken, M. and Hui, S. K. (2013). Slant and Pseudo-Slant Submanifolds in $(LCS)_n$-Manifolds. *Czechoslovak Mathematical Journal*, 63(138), 177-190.

Atçeken, M. (2011). Contact CR-Warped Product Submanifolds in Cosymplectic Manifolds. *Collectanea Mathematica*, 62, 17-26.

Boothby, W. M. (1986). *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*. Academic Press, Inc. London.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M. and Fernandez, M. (2000a). Slant Submanifolds in Sasakian Manifolds. *to Appear in Glasgow Mathematical Journal*, 42, 125-138.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (2000b). Structure on a Slant Submanifolds of a Contact Manifold. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics,* 31(7), 857-864.

Cabrerizo, J. L., Carriazo, A., Fernandez, L. M and Fernandez, M. (1999). Semi-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Geometria Dedicata*, 78, 183-199.

Chen, B. Y. (1990). Geometry of Slant Submanifolds. *Katholieke Universiteit Leuven.*

Chen, B. Y. and Tazawa, Y. (1990). Slant Surfaces With Codimensions Two. *Annales De La Faculte Des Science De Toulouse Mathematiques,* 11(3), 29-43.

Chen, B.Y. (1973). *Geometry of Submanifolds.* Pure and Applied Mathematics, No. 22. Marcel Dekker, Inc., New York.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2018). On the Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds in $(LCS)_n$- Manifold. *International Journal of Applied Mathematics and Statistics.*, 57(2), 96-109.

Dirik, S., Atçeken, M. and Yıldırım, Ü. (2017). On Pseudo-Slant Submanifols of a Sasakian Space Form. *Filomat,* 31(19), 5909-5919.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). Pseudo-Slant Submanifold in Cosymplectic Space Forms. *Acta Universitatis Sapientiae Mathematica,* 8(1), 53-74.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2016). On The Geometry of Pseudo-Slant Submanifolds of a Cosymplectic Manifold. *International Electronic Journal of Geometry,* 9(1), 45-56.

Dirik, S. (2014). *Pseudo-Slant Altmanifoldların Geometrisi Üzerine*. Gaziosmanpaşa Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, 1-122.

Dirik, S. and Atçeken, M. (2013). Pseudo-Slant Submanifolds of a Nearly Cosymplectic Manifold. *Turkish Journal of Mathematics & Computer Science.,* ID 20140035, pp:14.

Duggal, K.L. and Bejancu, A. (1996). *Lightlike Submanifolds of Semi-Riemanian Manifold and Applications.* Dordrecht/ Boston/ London: Kluwer Akademic Publishers.

Fidan, B. and Dirik, S. (2018). On The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds in a Cosymplectic Manifold. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 1(8), 145-154.

Goldberg .S. I. and Yano, K. (1969). Integrability of almost Cosymplectic Structures, *Pacific Journal of Mathematics*, 31, 373-382.

Hacısalihoğlu, H.H. (1980). *Yüksek Diferensiyel Geometriye Giriş.* 2^{nd} ed. Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları.

Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri.* İnönü Üniversitesi Yayınları.

Kenmotsu, K. (1972). A Class of Almost Contact Riemannian Manifolds. *Tohoku Mathematical Journal II Series,* 24, 93-103.

Khan, M.A. (2013). Totally Umbilical Hemi Slant Submanifolds of Cosymplectic Manifolds. *Mathematica Aeterna,* 3(8), 845-853.

Khan, K.A., Khan V.A. and Udin, S. (2008). Warped Product Submanifolds of Cosymplectic Manifolds. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications,* 13, 55-65.

Khan, V. A and Khan, M. A. (2007). Pseudo-Slant Submanifolds of a Sasakian Manifold. *Indian Journal Prue Applied Mathematics,* 38(1), 31-42.

Lotta, A. (1998). Three-Dimensional Slant Submanifolds of K-Contact Manifolds. *Balkan Journal of Geometry and Its Applications*, 3(1), 37-51.

Lotta, A. (1996). Slant Submanifolds in Contact Geometry. *Bulletin Mathematique de la Societe des Sciences Mathematiques de Roumanie,* 39, 183-198.

Olszak, Z. (1981). On Almost Cosymplectic Manifolds. *Kodai Mathematical Journal* , 239-250.

O'Neill B. (1983). *Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativity*. Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Inc. Newyork. 103.

Pandey, P. K. and Gupta, R. S. (2008). Characterization of a Slant Submanifold of a Kenmotsu Manifold. *Novi Sad Journal Mathematics,* 38 (1), 97-102.

Sepet, S. A. ve Ergut, M. (2016). Pointwise Slant Submersions from Cosymplectic Manifolds. *Turkish Journal of Mathematics*, 40, 582–593.

Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*. Ankara: Nobel Yayıncılık, No. 457.

Uddin, S. and Alqahtani, L. S. (2016). Chen Type Inequality for Warped Product Immersions in Cosymplectic Space Forms. *Journal of Nonlinear Science Applications,* 9, 2914–2921.

Uddin, S. and Ozel, C. (2014). A Classification Theorem on Totally Umbilical Submanifolds in a Cosymplectic Manifold. *Hacettepe Journal of Mathematics Statistics,* 43, 635–640.

Uddin, S., Khan, V.A. and Khan, K.A. (2010). A Note on Warped Product Submanifolds of Cosymplectic Manifolds. *Filomat,* 24, 95–102.

Yano, K. and Kon, M. (1984). *Structures on Manifolds*. Series in Pure Mathematics, Singapore: 3. World Scientific Publishing Co., 72.

Yano, K. and Kon, M. (1979). Anti-Invariant Submanifolds of Sasakian Space Form. *Ko dai Mathematical Journal,* 2, 171-186.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Büşra FİDAN
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 05.08.1991- İstanbul
Medeni Hali	: Bekar
e-posta	: busra.fidan1071004@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Amasya Üniversitesi / Matematik	2015
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi / Matematik	2019

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2016-2017	Özel Başarır Ortaokulu	Matematik Öğretmeni
2018-2019	Özel Yeşilpınar Beril Hallaç Kişisel Gelişim Kursu	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

Fidan, B. and Dirik, S. (2018). On The Geometry of Contact Pseudo-Slant Submanifolds in a Cosymplectic Manifold. *Bulletin of the International Mathematical Virtual Institute*, 1(8), 145-154.