ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN VE ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN SAĞ VE SOL İDEALLERİNİN İNŞASI VE KARAKTERİZASYONLARI

MESUT TUNÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

AMASYA

ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN VE ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN SAĞ VE SOL İDEALLERİNİN İNŞASI VE KARAKTERİZASYONLARI

MESUT TUNÇAY

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

AMASYA

Mesut TUNÇAY tarafından hazırlanan "Esnek Birleşimsel Halkaların ve Esnek Birleşimsel Halkaların Sağ ve Sol İdeallerinin İnşası ve Karakterizasyonları" adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN
Tez Danışmanı, İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Doç. Dr. Aslıhan SEZGİN..
(İlköğretim Bölümü Matematik Eğitimi Anabilim Dalı, A.Ü.)

Doç. Dr. ....
()
Yrd. Doç. Dr. ....
( )

//2017

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Mesut TUNÇAY

ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN VE ESNEK BİRLEŞİMSEL HALKALARIN SAĞ VE SOL İDEALLERİNİN İNŞASI VE KARAKTERİZASYONLARI

(Yüksek Lisans Tezi)

Mesut TUNÇAY

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FENBİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Temmuz 2017

ÖZET

Belirsizlikleri modellemek için Molodtsov tarafından ortaya atılan esnek küme teorisiyle zaman içerisinde pek çok matematiksel yapı karakterize edilmiştir. Bu tez çalışmasında, esnek küme teorisi, halkalara uygulanarak, esnek birleşimsel halkalar ve idealleri inşa edilip özellikleri çalışıldı. İlk olarak, esnek kümelere ve bazı klasik cebir yapılarına ait tanımlara yer verildi. Daha sonra esnek birleşimsel halkalar, esnek birleşimsel sağ (sol) halka idealleri tanımlandı ve esnek küme işlemleri kullanılarak bazı temel özellikleri verildi. Parametre kümesi birer halka olan esnek kümeler üzerinde daha önce tanımlanmış olan esnek kesişim-birleşim işlemi ile esnek birleşimsel halka ve ideallerinin ilişkisine yer verildi. Son olarak regüler halkalar, esnek birleşimsel halka idealleri ile karakterize edildi.

BilimKodu :

AnahtarKelimeler : **Esnek Küme, Esnek Birleşimsel Halkalar, Esnek Birleşimsel Halka İdealleri, Esnek Kesişim-Birleşim Çarpımı, Regüler Halkalar**

SayfaAdedi : **54**

TezYöneticisi :

CONSTRUCTION AND CHARACTERISTICS OF SOFT UNION RINGS AND RIGHT AND LEFT IDEALS OF SOFT UNION RINGS

(M.Sc.Thesis)

MESUT TUNÇAY

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

July 2017

ABSTRACT

Many mathematical structures have been characterized by Soft Set Theory, proposed by Molodtsov, for modelling uncertainty in time. In this thesis, by applying soft set theory to rings, we construct soft union rings and ideals and study their properties. First, some definitions regarding soft sets and some algebraic structures are given. Then, soft union rings, soft union right (left) ideals of rings are defined and their basic properties are obtained by using soft set operations. The relation of soft union rings and ideals with the soft intersection-union product definition, defined on the soft sets the parameter set of which are rings, are given. Finallay, regular rings are characterized via soft union ideals of rings.

ScienceCode :

KeyWords : Soft Sets, Soft Union Rings, Soft Union Ideals of Rings, Soft Intersection-Union Product, Regular Rings

PageNumber : 54

Adviser :

TEŞEKKÜR

Amasya Üniversitesinde yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgisi, tecrübesi, akademik kişiliği ve güler yüzüyle bana yön veren saygı değer danışman hocam Doç. Dr. Aslıhan Sezgin’e ve ders aşamasında bilgilerinden ve fikirlerinden istifade ettiğim Doç. Dr. Ergül Türkmen, Yrd. Doç. Dr. Tevfik ŞAHİN ve Yrd. Doç.Dr. Ramazan SARI’ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca üzerimde çok emekleri bulunan kıymetli annem ve babam ile her türlü desteğinden ötürü değerli eşim Tuğba Hanımefendi’ye sonsuz teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\subseteq$	Alt Küme
$\supseteq$	Kapsama
$\cap$	Kümelerde Kesişim İşlemi
$\cup$	Kümelerde Birleşim İşlemi
0_R	R Halkasının Sıfır Elemanı
1_R	R Halkasının Birim Elemanı
U	Evrensel Küme
E	Parametreler Kümesi
$P(U)$	U'nun Kuvvet Cümlesi
f_A	Esnek Küme
$f_{\tilde{A}}$	A Evrensel Esnek Küme
$f_{\tilde{E}}$	Evrensel Esnek Küme
$\tilde{\subseteq}$	Esnek Alt Küme
$f_A = f_B$	Esnek Eşit Kümeler
$f_A^{\tilde{c}}$	f_A Esnek Kümesinin Esnek Tümleyeni
$\tilde{\cup}$	Esnek Birleşim
$\tilde{\cap}$	Esnek Kesişim

Simgeler	**Açıklama**
$f_{A\cup_R B}$	f_A ve f_B Esnek Kümelerinin Kısıtlanmış Esnek Birleşimi
$f_A \wedge f_B$	f_A ve f_B Esnek Kümelerinin Esnek $\wedge -$Çarpımı
$f_A \vee f_B$	f_A ve f_B Esnek Kümelerinin Esnek $\vee -$Birleşimi
D_2	Dihedral Grup
$\widetilde{\leqq}_U$	Esnek Birleşimsel Alt Halka
S_{X^c}	X'in Tümleyeninin Esnek Karakteristik Fonksiyonu
$\tilde{\theta}$	$f_R(x) = \emptyset$ şeklindeki f_R Esnek Birleşimsel Halkalar
$f_A \lozenge g_A$	f_A ve g_A Esnek Kümelerinin Esnek Kesişim Birleşim Çarpımı
$\mathcal{L}(f_A : \alpha)$	f_A'nın Alt $\alpha -$Kapsaması
$Im(f_R)$	f_A'nın Görüntü Kümesi

Kısaltmalar	**Açıklama**
A.Ü.	Amasya Üniversitesi

1. GİRİŞ

Yaşadığımız evrende karşılaştığımız her olayı açıklamak ve bunlarla ilgili tanımlamalar yapmak daima mümkün olmayabilir. İktisatta olayların gerçekleşme olasılığının bilinmediği durumlar veya alınan politik kararlar, ekonomide karşılaşılan finansal- operasyonel riskler, fizikte bir elektronun konumu ve doğrusal hızının aynı anda bilinememesi, kimyada bir maddenin bozulması sırasında hangi atomun ne zaman bozulacağının bilinmemesi gibi örnekler belirsizliklerle karşılaşılan durumlardan birkaçıdır. Bunlara benzer çevremizde belirsizlik taşıyan birçok olay vardır. Belirsizliğin birçok çeşidine özellikle ekonomi, mühendislik, çevresel bilimler, sosyal bilimler, biyoloji ve tıp bilimleri gibi alanlarda rastlanmakta ve hemen hemen tüm bilimlerde özellikle makrodan mikroya doğru daha karmaşık ve anlaşılması güç olaylarla karşılaşılmaktadır. Bundan dolayı bilim adamları belirsizlikleri anlamak, modellemek ve buna uygun çözümler bulmak için birçok teori geliştirmeye başlamışlardır.

Olasılık teorisi, bulanık kümeler teorisi [1], yaklaşımlı kümeler teorisi [2], esnek kümeler teorisi [3] belirsizlikleri modellemek için sık sık kullanılan matematiksel yaklaşımlardan bazılarıdır.

Esnek küme teori ise ilk olarak Molodtsov [3] tarafından belirsizliğe farklı bir yaklaşım olarak tanımlandı. Esnek kümeler birçok yönü ile zengin bir uygulama potansiyeline sahiptir. Bu uygulamalardan birkaç tanesi Molodtsov tarafından kendi çalışmasında incelenmiştir. Son yıllarda ise esnek kümeler üzerine yapılan çalışmalar hızlıca artmaktadır. Molodtsov [4] sürekli diferansiyellenebilir fonksiyonlar, oyun teorisi, yöneylem araştırması, Rienmann integrali, Peron integrali, olasılık teori, ölçüm teori gibi birçok alana esnek küme teorisini uyguladı. Daha sonra Maji vd. [5] esnek küme işlemlerini tanımladı. Maji vd. [6], Pawlak'ın [2] yaklaşımlı küme teorisi yardımıyla, bir karar verme probleminde esnek kümelerin bir uygulamasını yaptı ve esnek kümelerde bazı işlemleri tanımladı. Xiao vd. [7] esnek küme temelli iş rekabet kapasitesi için yapay bir hesaplama metodu üzerine bir çalışma yaptı. Chen vd. [8, 9] esnek kümelerin parametre dönüşümlerini tanımladılar ve bir karar verme probleminde esnek kümelerin uygulamasını geliştirdiler. Xiao vd. [10] ve Pei ve Miao [11] esnek tabanlı bilgi sistemleri üzerine çalışmalar sundular. Mushrif vd. [12] esnek küme temelli sınıflandırmalar üzerine bir makale yayınladılar. Molodtsov [13] esnek küme teorisi üzerine dayalı bir analiz geliştirerek, esnek sayı, esnek türev, esnek integral gibi kavramları formüle etti. Bu analiz, Kovkov vd. tarafından [14] optimizasyon teorisi ile ilgili problemlere uygulandı. Zou ve Xiao [15] tam olmayan bilgi altında esnek kümelerin veri analizi yaklaşımlarını sundular. Ali vd. [16] esnek kümelerde, iki esnek kümenin daraltılmış arakesiti, daraltılmış birleşimi, daraltılmış farkı ve genişletilmiş birleşimi gibi bazı yeni tanımlar verdiler.

Daha sonra esnek kümeler ve bunlara ait cebirsel özellikler de bazı araştırmacılar tarafından çalışılmaya başlandı. İlk olarak Aktaş ve Çağman [17] esnek küme teorisinin bulanık küme teorisi ve kaba küme teorisi ile olan ilişkisini incelediler. Ayrıca Molodtsov'un esnek küme tanımından yola çıkarak esnek grupları tanımladılar ve esnek grupların bazı özelliklerini incelediler. Jun [18] esnek BCK/BCI-cebirleri ve esnek alt cebir kavramlarını ortaya atarak, onların bazı temel özeliklerini elde ettiler. Jun ve Park [19] esnek kümeleri BCK/BCI-cebirlerine uygulayarak, BCK/BCI-cebirlerinde esnek kümelerin cebirsel özeliklerini tartıştı. Park vd. [20] esnek WS-cebirleri üzerine bir çalışma yaptı. Feng vd. [21] esnek küme teorisini kullanarak esnek yarı halkaları ve bunlarla ilgili bazı özelikleri incelediler. Sun vd. [22] esnek modülleri tanımlayarak modüller yardımıyla bazı temel özellikleri elde ettiler. Jun vd. [19] değişmeli esnek ideal kavramını vererek değişmeli idealistik esnek BCK cebirlerini incelediler. Jun vd.[23] esnek p-idealler ve p-idealistik esnek BCI-cebirleri kavramlarını ortaya koydularve BCI-cebirlerinde p-ideallerin karakterizasyonunu verdiler. Jun vd. [24] esnek d cebirler, esnek $d*$-cebirler, esnek d-idealler, esnek $d*$-idealler ve d-idealistik esnek $d$cebirler kavramlarını vererek onlara ait bazı özellikleri incelediler. Jun ve Park [25] esnek küme kavramını hilbert cebirlerine uyguladılar ve bunlara dair bazı özellikleri incelediler. Acar vd. [26] esnek halkaları tanımladılar ve esnek halkaların bazı temel özelliklerini incelediler. Babitha ve Sunil [27] esnek küme bağıntısı kavramını ele aldılar ve bu kavramla ilgili denk esnek küme bağıntısı, bölüm, birleşim, fonksiyon gibi birçok kavramı tartıştılar. Çağman ve Enginoğlu [28] esnek matrisleri ve onlarla ilgili işlemleri tanımladılar. Ayrıca bir esnek maksimum-minimum karar verme metodunu oluşturdular. Feng vd. [29] bulanık kümeler, kaba kümeler ve esnek kümelerin hepsini birleştirmek için bir yapı oluşturdular. Gong vd. [30] bijektif esnek küme kavramını ortaya koydular ve onlar üzerinde bazı kavramları incelediler. Ayrıca karar verme problemi için bijektif esnek kümelerin bir uygulamasını tartıştılar. Kazancı vd. [31] esnek BCH-cebirlerini tanımlayarak esnek kümelerin homomorfik görüntü ve homomorfik ters görüntü teoremlerini verdiler. Majumdar ve Samanta [32]'da esnek dönüşüm kavramını verdiler ve onların bazı özellikleri üzerinde çalıştılar. Üstelik esnek dönüşüm altında bir esnek kümenin resmi ve ters resmi gibi yeni kavramlar verdiler. Liu vd. [33] esnek halkaların bazı sınıflarını tanımlayarak esnek halkalarda birinci, ikinci ve üçüncü izomorfizma teoremlerini verdiler. Qin ve Hong [34] esnek kümelerin kafes yapısını inşaa ettiler, esnek eşitlik kavramını incelediler ve bunlarla ilgili bazı özellikler elde ettiler. Zhan ve Jun [35] bulanık kümeler üzerinde esnek BL-cebirlerini incelediler. Xu vd. [36] vague esnek küme kavramını vererek bunlara ait özellikleri incelediler. Atagün ve Sezgin [37] Molodtsov'un esnek kümelerle ilgili tanımını kullanarak bir halkanın esnek alt halkaları ve esnek idealleri üzerinde çalıştılar. Ayrıca bir cismin esnek alt cismi ve bir sol R-modülün esnek alt modüllerini ele alarak halkalar, cisimler ve modüllerin esnek alt yapıları arasındaki ilişkiyi ortaya koydular. Yamak vd. [38] esnek hypergrupoid kavramını verdiler ve esnek hyper grupoidlerin L-alt hypergrupoidlerle olan ilişkisini incelediler.Ayrıca esnek hyper gupoidlerin bazı yeni özelliklerini elde ettiler. Çelik vd. [39] esnek kümeler üzerinde yeni ikili işlemler verdiler ve esnek halkalarla ilgili yeni özellikler elde ettiler. Türkmen ve Pancar [40] esnek alt modüllerin bazı özelliklerini ortaya koydular ve esnek alt modüllerin toplamı, direk toplamı gibi bazı yeni kavramları incelediler.

Bu tezin amacı klasik cebirsel yapılarından halka ve ideal kavramlarının esnek küme üzerindeki yapılarını, temel özelliklerini ve bu yapılardan elde edilen sonuçlar arasındaki ilişkiyi araştırmak, klasik halka teorisi ile ilgili bazı kavramları, esnek birleşimsel halka ve idealler ile karakterize etmektir.

Bu çalışma Genel Bilgiler, Materyal ve Metot, Bulgular ve Tartışma bölümlerinden oluşmaktadır. Genel Bilgiler ile Materyal ve Metot bölümlerinde temel olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Bulgular ve Tartışma bölümünde ise Esnek Birleşimsel Halkalar, Esnek Birleşimsel İdealler ve Regüler Halkaların esnek birlşimsel idealler ile ilişkisi verilerek bunlara ait cebirsel özellikler işlenmiştir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde, tezin devamında kullandığımız Cebirsel Yapı, Grup, Halka, Tamlık Bölgesi, İdeal gibi cebirsel ifadelerin tanımlarına ve bazı özelliklerine yer verilmiştir.

2.1.Tanım

G boş olmayan bir küme olmak üzere

$$\star : G \times G \to G$$

dönüşümüne G üzerinde bir ikili işlem denir. Eğer $\star$, G üzerinde bir ikili işlem ise $(G,\star)$ ifadesine G'de bir cebirsel yapı denir.

2.2.Tanım

G boş olmayan bir küme ve $\star$ bu küme üzerinde bir ikili işlem ise aşağıdaki şartları sağlayan $(G,\star)$ cebirsel yapısına bir grup denir.

$G_1)$ $\forall\, a, b, c \in G$ için $(a \star b) \star \mathrm{c} = \mathrm{a} \star (b \star \mathrm{c})$
$G_2)$ Öyle bir $e \in G$ vardır ki $\forall\, a \in G$ için $a \star e = e \star a = a$ olmalıdır (e elemanına G'nin birim elemanı denir).
$G_3)$ e, G nin birim elemanı olmak üzere, G kümesindeki her bir a elemanı için

$$a \star a' = a' \star a = e$$

olacak şekilde bir tek $a' \in G$ vardır (a' elemanına a elemanının tersi denir ve a^{-1} ile gösterilir).

Burada;

- $\forall\, a, b \in G$ için $a \star b = b \star a$ şartını sağlayan $(G,\star)$ grubuna değişmeli grup denir.

Örnek

Bir n kenarlı düzgün çokgende, r merkez etrafında saat yönünde dönmeyle elde edilen keyfi bir permütasyon ve s yansımalarla elde edilen keyfi bir permütasyon olmak üzere $r^n = 1$, $s^2 = 1$ ve $rs = sr^{n-1}$ şartlarını sağlayan r ve s permütasyonları tarafından üretilen

$$D_{2n} = \{1, r, r^2, \dots, r^{n-1}, s, sr, sr^2, \dots, sr^{n-1}\}$$

kümesi bileşke işlemine göre bir gruptur. Bu gruba Dihedral grup denir.

2.3.Tanım

$(G,*)$ bir cebirsel yapısı Tanım 2.1.2'deki sadece $(G1)$ özelliğini sağlıyorsa bu cebirsel yapıya yarı grup denir.

2.4.Tanım

$(G,*)$ bir cebirsel yapısı Tanım 2.1.2'deki sadece $(G1)$ ve $(G2)$ özelliklerini sağlıyorsa bu cebirsel yapıya monoid denir.

2.5.Tanım

Boştan farklı bir küme üzerinde tanımlı ‘‘$+$’’ ve ‘‘ $\cdot$ ’’ ile gösterilen ikili işlemleri alalım. $(R, +,\cdot)$ cebirsel yapısı aşağıdaki özellikleri sağlıyor ise $(R, +,\cdot)$ üçlüsüne bir halka denir.

i) $(R, +)$ değişmeli gruptur.
ii) $(R,\cdot)$ yarıgruptur.
iii) Her $a, b, c \in R$ için $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ ve $(b + c) \cdot a = b \cdot a + c \cdot a$'dır.

R bir halka, eğer her $a \in R$ için $1_R\, a = a\, 1_R$ olacak şekilde $1_R \in R$ mevcut ise R'ye birim elemanlı halka denir ve 1_R elamanına da R halkasının birim elemanı denir.
Eğer R halkası, her $x, y \in R$ için $xy = yx$ koşulunu gerçekliyor ise R'ye değişmeli (komutatif) halka denir.

Halkalara aşağıdaki örnekleri verebiliriz:

- $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ için $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$ birimli bir halkadır.
- $(\mathbb{R}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}, +, \cdot)$, $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$ birimli değişmeli halkalardır.

2.6.Tanım

$(R, +, \cdot)$ bir halka olmak üzere ‘‘$+$’’ işlemine göre halkanın etkisiz elemanına halkanın sıfır elemanı denir ve 0_R ile gösterilir.

2.7.Tanım

R bir halka $\emptyset \neq S \subseteq R$ olsun. S, R’deki işlemlere göre bir halka ise S’ ye R’ nin alt halkası denir.

2.8.Tanım

R bir halka $0_R \neq a \in R$ olsun. $b \cdot a = 0_R$ olacak şekilde $0_R \neq b \in R$ varsa a’ya sağ sıfır bölen, $a \cdot c = 0_R$ olacak şekilde $0_R \neq c \in R$ varsa a’ya sol sıfır bölen eleman denir. Hem sağ hem de sol sıfır bölen elemana sıfır bölen eleman denir.

2.9.Tanım

Sıfır bölen içermeyen birimli ve değişmeli halkaya tamlık bölgesi denir.

Örnek

- $\mathbb{Z}$ bir tamlık bölgesidir.
- $\mathbb{Z}_p$ bir tamlık bölgesidir. (p asal olmak üzere)

2.10.Tanım

R bir halka olsun. $a^2 = a$ olacak şekilde $a \in R$ varsa a'ya idempotent eleman denir. Birimli bir halkada 0_R ve 1_R idempotent elemandır.

2.11.Tanım

R bir halka ve I, R'nin boştan farklı bir alt halkası olsun. Aşağıdaki koşulları sağlayan I'ya R halkasının ideali denir.

i) Her $a, b \in I$ için $a - b \in I$
ii) Her $r \in R$ ve her $a \in I$ için $ra, ar \in I$

Burada $ra \in I$ ise I'ya sol ideal, $ar \in I$ ise I'ya sağ ideal denir. Açık olarak I, R'nin bir ideali ise I, R'nin bir alt halkasıdır.

Örnek

Her bir n tamsayısı için $n = kn \mid k \in \mathbb{Z}$ devirli alt grubu, $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasının bir idealidir.

Örnek

R bir halka olmak üzere $\{0\}$ ve R, R'nin idealleridir. Bu ideallere R'nin aşikar idealleri denir.

Örnek

R bir halka $A_i \mid i \in I$, R'nin (sol) ideallerinin bir ailesi olsun. Bu durumda $i \in I$ olmak üzere A_i'ler de R'nin bir (sol) idealidir.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. Esnek Kümeler

Bu bölümde, esnek küme teorisiyle ilgili bazı temel kavramlar Molodtsov [3] ve Çağman ve Enginoğlu, [41]'nun yapmış olduğu çalışmalardan derlenerek verilecektir.

Esnek küme kavramı, U evrensel kümesinin alt kümeler ailesinin parametrize edilmiş bir ailesidir. Bir esnek kümede sıralı ikililer, esnek kümenin elemanı veya üyesi olarak isimlendirilirler. Biz bu esnek kümeleri $f_A, f_B, f_C, \ldots, g_A, \ldots$ şeklinde göstereceğiz.

Bir nesneler kümesi üzerinde esnek küme tanımlamak için, nesneleri karakterize eden özellikleri ifade etmek zorundayız. Bu özellikleri ifade etmek için kullanacağımız parametrelerin kümesine parametre kümesi denir. Birinci bileşende parametre, ikinci bileşende özelliği sağlayan nesnelerin kümesi olacak şekilde yazılan sıralı ikililerle bir esnek küme yazabiliriz. Diğer bir deyişle bir esnek küme bu şekilde iyi tanımlı sıralı ikililerin bir koleksiyonudur.

3.1.1. Tanım

U bir başlangıç evreni; $P(U)$, U'nun kuvvet kümesi; E başlangıç evreninin elemanlarını niteleyen tüm parametrelerin kümesi ve $A \subseteq E$ olsun. U üzerinde bir (f_A, E) esnek kümesi, sıralı ikililerin bir kümesi ise aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(f_A, E) = \{(e, f_A(e)) : e \in E, f_A(e) \in P(U)\}$$

Burada $f_A: E \longrightarrow P(U)$ ve $e \notin A$ için $f_A(e) = \emptyset$ şeklindedir [41].

f_A, yaklaşım fonksiyonu olarak isimlendirilir. $e \in E$ parametreleri ile ilişkili nesneleri içeren $f_A(e)$ kümesi, $e -$yaklaşım değer kümesi veya $e -$yaklaşım kümesi olarak adlandırılır.

Esnek kümenin tanımına göre bir (f_A, E) esnek kümesi biçimsel olarak onun üyelik fonksiyonu olan f_A'ya eşittir. Biz herhangi bir esnek kümeyi onun üyelik fonksiyonu ile belirliyoruz ve bu iki kavramı birbiri ile yer değiştirebilir olarak görüyoruz.

Bir esnek kümeyi onun elemanlarını listeleme yolu ile gösterebiliriz.

Örnek

$U = \{u_1, u_2, u_3\}$ üniversite mezunu bir gencin seçebileceği mesleklerin kümesi olmak üzere U kümesinin elemanları,

u_1 *''öğretmen'',*
u_2 *''subay'',*
u_3 *''bankacı''*
olarak tanımlansın.

e_1*''dolgun maaş'',*
e_2*''kısa mesai süresi'',*
e_3*''kariyer yolu açık'',*
e_4*''disiplinli'',*
e_5*''gece mesaisi mevcut'',*
e_6*''esnek çalışma saatleri'',*
e_7*''saygın meslek'',*

parametreleri bu mesleklerin özelliklerini niteleyen ifadeler olmak üzere:

$E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7\}$ parametrelerin kümesi olsun.
$A = \{e_1, e_2, e_3, e_6, e_7\}$, E'nin alt kümesi olmak üzere;

$f_A(e_1) = \{u_2, u_3\}$
$f_A(e_2) = \{u_1\}$

$f_A(e_3) = \{u_2, u_3\}$
$f_A(e_6) = \emptyset$
$f_A(e_7) = \{u_1, u_2, u_3\} = U$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda f_A esnek kümesi:

$f_A = \{(e_1, \{u_2, u_3\}), (e_2, \{u_1\}), (e_3, \{u_2, u_3\}), (e_7, \{u_1, u_2, u_3\})\}$ şeklinde yazılır.

Burada listelenmiş olan elemanların sırası önemli değildir ve bir eleman sadece bir defa listelenir.

3.1.2. Tanım

f_A, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in A$ için $f_A(x) = U$ ise f_A'ya A evrensel esnek küme denir ve $f_{\tilde{A}}$ ile gösterilir [41].

3.1.3. Tanım

f_A, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in$ E için $f_A(x) = U$ ise f_A'ya evrensel esnek küme denir ve $f_{\tilde{E}}$ ile gösterilir [41].

3.1.4. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $x \in$ E için $f_A(x) \subseteq f_B(x)$ ise f_A esnek kümesine f_B'nin esnek alt kümesi denir ve $f_A \tilde{\subseteq} f_B$ ile gösterilir [41].

3.1.5. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $x \in$ E için $f_A(x) = f_B(x)$ ise f_A ve f_B esnek kümelerine eşit esnek kümeler denir ve $f_A = f_B$ ile gösterilir [41].

3.1.6. Tanım

f_A, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x \in$ E için x −yaklaşımı $f_A^c(x) = U \setminus f_A(x)$ şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A'nın esnek tümleyeni denir ve $f_A^{\tilde{c}}$ şeklinde gösterilir [41].

3.1.7. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $x \in$ E için x −yaklaşımı

$$f_{A \cup B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek birleşimi denir ve $f_A \,\tilde{\cup}\, f_B$ şeklinde gösterilir [41].

3.1.8. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $x \in$ E için x −yaklaşımı

$$f_{A \cap B}(x) = f_A(x) \cap f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B esnek kümelerinin esnek kesişimi denir ve $f_A \,\tilde{\cap}\, f_B$ şeklinde gösterilir [41].

3.1.9. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $x \in A \cap B \neq \emptyset$ için x −yaklaşımı

$$f_{A \cup_R B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin kısıtlanmış esnek birleşimi denir ve $f_{A \cup_R B}$ ile gösterilir [41].

3.1.10. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $(x, y) \in E \times E$ için (x, y) −yaklaşımı

$$f_{A\wedge B}(x) = f_A(x) \cap f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek $\wedge -$çarpımı denir ve $f_A \wedge f_B$ şeklinde gösterilir [41].

3.1.11. Tanım

f_A ve f_B, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $(x, y) \in E \times E$ için (x, y) $-$yaklaşımı

$$f_{A\vee B}(x) = f_A(x) \cup f_B(x)$$

şeklinde tanımlanan esnek kümeye f_A ve f_B'nin esnek $\vee -$birleşimi denir ve $f_A \vee f_B$ şeklinde gösterilir [41].

3.1.12. Tanım

$(G,*)$ bir grup ve f_G, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in G$ için;

$$f_G(x * y) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$$

ise f_G esnek kümesine U üzerinde bir esnek birleşimsel grupoid denir [42].

3.1.13. Tanım

$(G,*)$ bir grup ve f_G, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $x, y \in G$ için

i) $f_G(x * y) \subseteq f_G(x) \cup f_G(y)$

ii) $f_G(x^{-1}) = f_G(x)$

ise f_G esnek kümesine U üzerinde bir esnek birleşimsel grup denir [42].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Esnek Birleşimsel Halkalar

Bu bölümde esnek birleşimsel halkaların tanımı yapılacak ve esnek birleşimsel halkalar ile ilgili bazı teoremler verilecektir. Ayrıca parametre kümesi birer halka olan esnek kümeler üzerinde daha önce [43] de tanımlanmış olan esnek kesişim-birleşim işleminin, tanımladığımız esnek halkalar ve esnek birleşimsel idealler ile ilişkili bazı özelliklerine yer verilecektir.

Bundan sonra aksi belirtilmediği sürece $(R,+,\cdot)$ yani kısaca "R" bir halkayı göstermektedir.

4.1.1. Tanım

$(R,+,\cdot)$ bir halka ve f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer f_R, U üzerinde R'deki '$+$' işlemine göre bir esnek birleşimsel grup ve '$\cdot$' işlemine göre bir esnek birleşimsel grupoid ise f_R'ye U üzerinde bir esnek birleşimsel halka denir.

Diğer bir deyişle aşağıdaki özellikleri sağlayan bir esnek f_R kümesine esnek birleşimsel halka denir:

i) $f_R(x + y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$

ii) $f_R(-x) = f_R(x)$

iii) $f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$

Örnek

$R = \mathbb{Z}_6$ parametreler kümesi ve $U = \left\{ \begin{bmatrix} x & x \\ x & o \end{bmatrix} \middle| \, x \in \mathbb{Z}_5 \right\}$ terimleri $\mathbb{Z}_5$'ten alınan 2×2 tipindeki matrisler kümesi evrensel küme olmak üzere U üzerinde f_R esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_R(0) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

$f_R(1) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$f_R(2) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$f_R(3) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$f_R(4) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

$f_R(5) = \left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}\right\}$

Burada f_R'nin esnek birleşimsel halka olduğu kolayca görülebilir.

Örnek

$R = \mathbb{Z}_6$ parametreler kümesi ve

$$U = D_2 = \{< x, y >: x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$$

dihedral grubu evrensel küme olsun. U üzerindeki f_R esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_R(0) = \{e, x\}$

$f_R(1) = \{x, yx\}$

$f_R(2) = \{x, y, yx\}$

$f_R(3) = \{x, y\}$

$f_R(4) = \{x, y, yx\}$

$f_R(5) = \{x, yx\}$

Bu durumda $f_R(2 \cdot 3) = f_R(0) = \{e, x\} \nsubseteq f_R(2) \cup f_R(3) = \{x, y, yx\}$ olduğundan f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka değildir.

4.1.2. Lemma

f_R, U üzerinde esnek birleşimsel bir halka olsun. 0_R, R halkasının sıfırı olmak üzere her $x \in R$ için $f_R(0_R) \subseteq f_R(x)$'dır.

İspat.

f_R, U üzerinde esnek birleşimsel bir halka olmak üzere her $x \in R$ için,

$$f_R(0_R) = f_R(x-x) \subseteq f_R(x) \cup f_R(-x) = f_R(x) \cup f_R(x) = f_R(x)$$

olup ispat tamamlanır.

4.1.3. Teorem

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_R'nin U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olması için gerek ve yeter şart $\forall\, x, y \in R$ için

i) $f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$

ii) $f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$'dır.

İspat.

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olmak üzere esnek birleşimsel halka tanımından her $x, y \in R$ için

$$f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$
$$f_R(x+y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$
$$f_R(-x) = f_R(x)$$

yazılabilir.

$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(-y) = f_R(x) \cup f_R(y)$ bulunur.

Tersine her $x, y \in R$için:

$$f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

ve

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

olsun.

$x = 0_R$ seçersek, Lemma 4.1.2'den;

$$f_R(-y) = f_R(0_R - y) \subseteq f_R(0_R) \cup f_R(y) = f_R(y)$$

bulunur.

Dolayısıyla $f_R(-y) \subseteq f_R(y)$…(1)

Benzer şekilde,

$$f_R(y) = f_R(-(-y)) = f_R(0_R - (-y)) \subseteq f_R(0_R) \cup f_R(-y) = f_R(-y)$$

olup dolayısıyla $f_R(y) \subseteq f_R(-y)$…(2)

(1) ve (2)'den her $y \in R$ için $f_R(-y) = f_R(y)$ bulunur. Ayrıca

$$f_R(x + y) = f_R(x - (-y)) \subseteq f_R(x) \cup f_R(-y) = f_R(x) \cup f_R(y)$$

olduğundan f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır.

4.1.4. Teorem

R bir tamlık bölgesi ve f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. Her $0 \neq x \in R$ için $f_R(0_R) \subseteq f_R(1_R) = f_R(x)$ ise f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır.

İspat.

$0 \neq x \in R$ için $f_R(0_R) \subseteq f_R(1_R) = f_R(x)$ olduğunu kabul edelim. f_R'nin U üzerinde esnek birleşimsel halka olduğunu göstermek için $x, y \in R$ olmak üzere

$$f_R(x - y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

olduğunu göstermeliyiz. $x, y \in R$ olsun. Aşağıdaki durumlar söz konusudur:

Durum 1:

$x \neq 0$ ve $y = 0$ veya $x = 0$ ve $y \neq 0$ olsun. Buradan

$$xy = 0 \text{ ve } f_R(xy) = f_R(0_R)$$

olduğu görülür.

Her $x \in R$ için $f_R(0_R) \subseteq f_R(x)$ olduğunu teoremin ifadesinden biliyoruz. Buradan $f_R(xy) = f_R(0_R) \subseteq f_R(x)$ ve $f_R(xy) = f_R(0_R) \subseteq f_R(y)$'dir. Dolayısıyla

$$f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

'dir.

Durum 2:

$x \neq 0$ ve $y \neq 0$ olsun. Buradan $xy \neq 0$'dır.

$$f_R(xy) = f_R(1_R) = f_R(x)$$

ve

$$f_R(xy) = f_R(1_R) = f_R(y).$$

Dolayısıyla $f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ bulunur.

Durum 3:

$x = 0$ ve $y = 0$ olsun. Buradan $xy = 0$'dır. *Durum* 1'de olduğu gibi,

$f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ sağlanır.

$x, y \in R$ için $x - y = 0_R$ veya $x - y \neq 0_R$. Buradan aşağıdaki durumla izlenir:

i) $x - y = 0_R$ olsun. Dolayısıyla,

$x = y = 0_R$ veya $x \neq 0_R$, $y \neq 0_R$ ve $x = y$'dir.

Fakat her $x \in R$ için $f_R(x - y) = f_R(0_R)$ ve $f_R(0_R) \subseteq f_R(x)$olduğunu biliyoruz. Buradan

$$f_R(x - y) = f_R(0_R) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

bulunur.

ii) $x - y \neq 0_R$ olsun. Buradan,

$x \neq 0_R$, $y \neq 0_R$ ve $x \neq y$

veya

$x \neq 0_R$ ve $y = 0_R$

veya

$x = 0_R$ ve $y \neq 0_R$

olur.

$x \neq 0_R$, $y \neq 0_R$ve $x \neq y$ olsun.

$$f_R(x - y) = f_R(1_R) = f_R(x) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

olduğu bulunur.

Şimdi ise $x \neq 0_R$ve $y = 0_R$ olsun. Buradan

$$f_R(x-y) = f_R(1_R) = f_R(x) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{'dir.}$$

Son olarak, $x = 0_R$ ve $y \neq 0_R$ olsun. Buradan

$$f_R(x-y) = f_R(1_R) = f_R(y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

olduğu bulunur.

Dolayısıyla f_R, U üzerinde esnek birleşimsel bir halkadır.

4.1.5. Teorem

R ve S birer halka, f_R ve f_S kümeleri U üzerinde birer esnek birleşimsel halka ise $f_R \vee f_S$ esnek $\vee -$çarpım kümesi de U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır.

İspat.

R ve S birer halka, f_R ve f_S kümeleri U üzerinde birer esnek birleşimsel halka olsun. Tanım 3.11.'den her $(x, y) \in E \times E$ için

$$f_R \vee f_S = f_{R\vee S}$$

ve

$$f_{R\vee S}(x, y) = f_R(x) \cup f_S(y)$$

olsun. R ve S birer halka olduklarından $R \times S$'de halkadır.

$(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times S$ olmak üzere:

$$\begin{aligned} f_{R\vee S}\big((x_1, y_1) - (x_2, y_2)\big) &= f_{R\vee S}(x_1 - x_2, y_1 - y_2) \\ &= f_R(x_1 - x_2) \cup f_S(y_1 - y_2) \\ &\subseteq (f_R(x_1) \cup f_R(x_2)) \cup (f_S(y_1) \cup f_S(y_2)) \\ &= (f_R(x_1) \cup f_S(y_1)) \cup (f_R(x_2) \cup f_S(y_2)) \\ &= f_{R\vee S}(x_1, y_1) \cup f_{R\vee S}(x_2, y_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{R\vee S}\big((x_1, y_1)(x_2, y_2)\big) &= f_{R\vee S}(x_1x_2, y_1y_2) \\ &= f_R(x_1x_2) \cup f_S(y_1y_2) \end{aligned}$$

$$\subseteq (f_R(x_1) \cup f_R(x_2)) \cup (f_S(y_1) \cup f_S(y_2))$$
$$= (f_R(x_1) \cup f_S(y_1)) \cup (f_R(x_2) \cup f_S(y_2))$$
$$= f_{R \vee S}(x_1, y_1) \cup f_{R \vee S}(x_2, y_2)$$

bulunur. Dolayısıyla $f_R \vee f_S$, U üzerinde esnek birleşimsel bir halkadır.

4.1.6. Teorem

f_R ve h_R, U üzerinde birer esnek birleşimsel halka ise $f_R \tilde{\cup}\, h_R$ kümesi U üzerinde esnek birleşimsel halkadır.

İspat.

f_R ve h_R, U üzerinde birer esnek birleşimsel halka olsun. Her $x, y \in R$ için;

$$\begin{aligned}(f_R \tilde{\cup}\, h_R)(x - y) &= f_R(x - y) \cup h_R(x - y) \\ &\subseteq (f_R(x) \cup f_R(y)) \cup (h_R(x) \cup h_R(y)) \\ &= (f_R(x) \cup h_R(x)) \cup (f_R(y) \cup h_R(y)) \\ &= (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(x) \cup (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(f_R \tilde{\cup}\, h_R)(xy) &= f_R(xy) \cup h_R(xy) \\ &\subseteq (f_R(x) \cup f_R(y)) \cup (h_R(x) \cup h_R(y)) \\ &= (f_R(x) \cup h_R(x)) \cup (f_R(y) \cup h_R(y)) \\ &= (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(x) \cup (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(y)\end{aligned}$$

Dolayısıyla $f_R \tilde{\cup}\, h_R$, U üzerinde esnek birleşimsel bir halkadır.

4.1.7. Tanım

S, R'nin bir alt halkası, f_R U üzerinde bir esnek birleşimsel halka ve f_S, U üzerinde f_R'nin boştan farklı bir esnek alt kümesi olsun. f_S, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka ise f_S'ye U üzerinde f_R'nin bir esnek birleşimsel alt halkası denir ve $f_S \, \widetilde{\leqq}_U \, f_R$ ile gösterilir.

Örnek

$R = \mathbb{Z}_4$ parametreler kümesi ve

$$U = D_3 = \{< x, y >: x^3 = y^2 = e, xy = yx^2\} = \{e, x, x^2, y, yx, yx^2\}$$

dihedral grubu evrensel küme olsun. U üzerindeki f_R kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_R(0) = \{x, y, yx\}$
$f_R(1) = \{e, x, y, yx, yx^2\}$
$f_R(2) = \{e, x, y, yx\}$
$f_R(3) = \{e, x, y, yx, yx^2\}$

Burada f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır. Şimdi ise R'nin alt halkası olacak şekilde $S = \{0,2\}$ kümesi parametreler kümesi olmak üzere olmak üzere $U = D_3$ üzerinde bir f_S esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_S(0) = \{x, yx\}$
$f_S(2) = \{x, y, yx\}$

f_S, U üzerinde kendi başına esnek birleşimsel halka olduğu için f_R'nin bir esnek birleşimsel alt halkası olduğunu söyleyebiliriz.

4.1.8. Teorem

f_R kümesi U üzerinde bir esnek birleşimsel halka, $f_S \, \widetilde{\leqq}_U \, f_R$ ve $f_T \, \widetilde{\leqq}_U \, f_R$ ise $f_S \cup_R f_T \, \widetilde{\leqq} \, f_R$'dir.

İspat.

f_R kümesi U üzerinde bir esnek birleşimsel halka, $f_S \tilde{\leq}_U f_R$ ve $f_T \tilde{\leq}_U f_R$ olsun. Tanım 3.9'dan

$$f_S \cup_R f_T = f_{S\cup_R T}$$

yazılabilir. Her $x \in S \cap T \neq \emptyset$ için, $f_{S\cup_R T}(x) = f_S(x) \cup f_T(x)$'dir. $x \in S \cap T$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f_{S\cup_R T}(x-y) &= f_S(x-y) \cup f_T(x-y) \\ &\subseteq (f_S(x) \cup f_T(y)) \cup (f_T(x) \cup f_S(y)) \\ &= (f_S(x) \cup f_T(x)) \cup (f_S(y) \cup f_T(y)) \\ &= f_{S\cup_R T}(x) \cup f_{S\cup_R T}(y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{S\cup_R T}(xy) &= f_S(xy) \cup f_T(xy) \\ &\subseteq (f_S(x) \cup f_T(y)) \cup (f_T(x) \cup f_S(y)) \\ &= (f_S(x) \cup f_T(x)) \cup (f_S(y) \cup f_T(y)) \\ &= f_{S\cup_R T}(x) \cup f_{S\cup_R T}(y) \end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.1.9. Not

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka, $f_S \tilde{\leq}_U f_R$ ve $f_T \tilde{\leq}_U f_R$ ise $f_S \vee f_T$ kümesi U üzerinde f_R'nin bir esnek birleşimsel alt halkası değildir. Çünkü S ve T, R'nin birer alt halkaları olmak üzere $S \times T$ kümesi R'nin alt halkası değildir.

4.1.10. Tanım

X, R'nin bir alt kümesi olsun.

$$S_{X^c}(x) = \begin{cases} U, & x \in R/X \\ \emptyset, & x \in X \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan S_{X^c}'ye X'in tümleyeninin esnek karakteristik fonksiyonu denir [43].

4.1.11. Not

Her $x \in R$ için $f_R(x) = \emptyset$ ise f_R'nin U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olduğu kolayca görülür. Bu tür esnek birleşimsel halkaları $\tilde{\theta}$ ile ifade edeceğiz. $\widetilde{\theta} = S_{R^c}$ olduğu açıktır [43].

4.1.12. Lemma

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olmak üzere,

i) $\tilde{\theta} \lozenge \tilde{\theta} \,\tilde{\supseteq}\, \tilde{\theta}$, $f_R \lozenge \tilde{\theta} \,\tilde{\supseteq}\, \tilde{\theta}$ ve $\tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, \tilde{\theta}$

ii) $f_R \,\tilde{\cup}\, \tilde{\theta} = f_R$ ve $f_R \,\tilde{\cap}\, \tilde{\theta} = \tilde{\theta}$'dir [43].

4.1.13. Tanım

R bir halka, f_R ve g_R, U üzerinde birer esnek küme olsun. Her $1 \leq i \leq m$ için $x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ ve $a_i b_i \neq 0$ olmak üzere f_R ve g_R esnek kümelerinin esnek kesişim-birleşim çarpımı $f_A \lozenge g_A$ ile gösterilir ve

$$(f_R \lozenge g_R)(x) = \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup g_R(b_i))$$

şeklinde, diğer durumda ise $(f_R \lozenge g_R)(x) = U$ olarak tanımlanır.

Burada R, birimi 1_R olan birimli bir halka olmak üzere, $x = x \cdot 1_R = 1_R \cdot x$ olduğundan $\forall x \in R$ için $(f_R \lozenge g_R)(x) \neq U$ olduğuna dikkat edelim [43].

Örnek

$R = \mathbb{Z}_3$ halkasını ele alalım.

$U = D_2 = \{\langle x, y\rangle : x^2 = y^2 = e, xy = yx\} = \{e, x, y, yx\}$ evrensel küme ve f_R ile g_R, U üzerinde birer esnek küme olmak üzere

$f_R(0) = \{e, y, yx\}$

$f_R(1) = \{e, x\}$

$f_R(2) = \{y, yx\}$

ve

$g_R(0) = \{e, x, y\}$

$g_R(1) = \{e, yx\}$

$g_R(2) = \{yx\}$

şeklinde tanımlansın. $\mathbb{Z}_3$'te $2 = 1 + 1 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 = 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1$ olduğundan

$$\begin{aligned}(f_R \lozenge g_R)(2) &= \{(f_R(1) \cup g_R(1)) \cup (f_R(1) \cup g_R(1))\} \\ &\cap \{(f_R(1) \cup g_R(1)) \cup (f_R(2) \cup g_R(2))\} \\ &\cap \{(f_R(2) \cup g_R(2)) \cup (f_R(1) \cup g_R(1))\} \\ &= \{e, x, yx\}\end{aligned}$$

olarak bulunur.

4.1.14. Teorem

f_R, g_R ve h_R, U üzerinde birer esnek küme olsun. Bu durumda

(i) $(f_R \lozenge g_R) \lozenge h_R = f_R \lozenge (g_R \lozenge h_R)$'dir.

(ii) Genel olarak $f_R \lozenge g_R \neq g_R \lozenge f_R$'dir. Ancak R değişmeli ise $f_R \lozenge g_R = g_R \lozenge f_R$'dir.

(iii) $f_R \lozenge (g_R \tilde{\cap} h_R) = (f_R \lozenge g_R) \tilde{\cap} (f_R \lozenge h_R)$ ve $(f_R \tilde{\cap} g_R) \lozenge h_R = (f_R \lozenge h_R) \tilde{\cap} (g_R \lozenge h_R)$'dir.

(iv) $f_R \lozenge (g_R \tilde{\cup} h_R) = (f_R \lozenge g_R) \tilde{\cup} (f_R \lozenge h_R)$ ve $(f_R \tilde{\cup} g_R) \lozenge h_R = (f_R \lozenge h_R) \tilde{\cup} (g_R \lozenge h_R)$'dir.

(v) $f_R \tilde{\subseteq} g_R$ ise $f_R \lozenge h_R \tilde{\subseteq} g_R \lozenge h_R$ ve $h_R \lozenge f_R \tilde{\subseteq} h_R \lozenge g_R$'dir.

(vi) t_R ve l_R, U üzerinde birer esnek küme $t_R \tilde{\subseteq} f_R$ ve $l_R \tilde{\subseteq} g_R$ ise bu durumda $t_R \lozenge l_R \tilde{\subseteq} f_R \lozenge g_R$'dir [43].

İspat.

(i) ve *(ii)* Tanım 4.1.14'ten açıktır.

(iii) $x \in R$ olmak üzere her $1 \leq i \leq m$ için $x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ şeklinde yazılamıyorsa $f_R \lozenge (g_R \tilde{\cap} h_R) = U$'dur. Benzer şekilde

$\big((f_R \lozenge g_R) \tilde{\cap} (f_R \lozenge h_R)\big)(x) = (f_R \lozenge g_R)(x) \cap (f_R \lozenge h_R)(x) = U$ yazılabilir. Her $1 \leq i \leq m$ için $x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ olsun. Buradan

$$
\begin{aligned}
f_R \lozenge (g_R \tilde{\cap} h_R)(x) &= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup (g_R \tilde{\cap} h_R)(b_i)) \\
&= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup (g_R(b_i) \cap h_R(b_i)) \\
&= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} [(f_R(a_i) \cup g_R(b_i)) \cap (f_R(a_i) \cup h_R(b_i))] \\
&= \left[\bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup g_R(b_i))\right] \cap \left[\bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i))\right] \\
&= (f_R \lozenge g_R)(x) \cap (f_R \lozenge h_R)(x) \\
&= \big((f_R \lozenge g_R) \tilde{\cap} (f_R \lozenge h_R)\big)(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. $(f_R \tilde{\cap} g_R) \lozenge h_R = (f_R \lozenge h_R) \tilde{\cap} (g_R \lozenge h_R)$ olduğu ve *(iv)* benzer şekilde gösterilebilir.

(v) $x \in R$ olmak üzere her $1 \leq i \leq m$ için $x = \sum_{i=1}^{m} a_i b_i$ şeklinde yazılamıyorsa $(f_R \lozenge h_R)(x) = (g_R \lozenge h_R)(x) = U$'dur. Aksi halde her $1 \leq i \leq m$ ve $f_R(x) \tilde{\subseteq} g_R(x)$ için

$$
\begin{aligned}
(f_R \lozenge h_R)(x) &= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&\subseteq \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (g_R(a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&= (g_R \lozenge h_R)(x)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer şekilde $h_R \lozenge f_R \,\tilde{\subseteq}\, h_R \lozenge g_R$ olduğu gösterilebilir.

(vi) Bu kısmın ispatı *(v)* ile benzer şekilde kolayca yapılabilir.

4.1.15. Sonuç

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka ve $a = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ olsun. Her $1 \leq i \leq m$ için,

$$f_R(a) = f_R\left(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i\right) \subseteq f_R(x_i) \cup f_R(y_i)$$

’dir [43].

4.1.16. Teorem

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_R’nin U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olması için gerek ve yeter şart

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } f_R \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$$

olmasıdır [43].

İspat.

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olsun. $f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$’dir. $a \in R$ olmak üzere;

$$(f_R \lozenge f_R)(a) = U \text{ ise } (f_R \lozenge f_R)(a) \supseteq f_R(a)$$

olduğu açıktır. Dolayısıyla $f_R \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$ bulunur.

$(f_R \lozenge f_R)(a) \neq U$ ise her $1 \leq i \leq m$ için $x = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$ olmak üzere f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olduğundan

$$(f_R \lozenge f_R)(a) = \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \left(f_R(x_i) \cup f_R(y_i)\right)$$

$$\supseteq \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} f_R(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i)$$
$$= \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} f_R(a)$$
$$= f_R(a)$$

bulunur. Buradan $f_R \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$ elde edilir.

Tersine $f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ ve $f_R \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$olsun.

$$f_R(ab) \subseteq (f_R \lozenge f_R)(ab)$$
$$= \bigcap_{a\cdot b=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} (f_R(x_i) \cup f_R(y_i))$$
$$\subseteq f_R(a) \cup f_R(b)$$

elde edilir. Dolayısıyla f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır.

4.1.17. Sonuç

f_R bir esnek küme olmak üzere aşağıdaki koşullar denktir.

i) $f_R \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$

ii) Her $1 \leq i \leq m$ için

$$f_R(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i) \subseteq f_R(x_i) \cup f_R(y_i)$$

[43].

4.1.18. Teorem

A, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. A'nın R halkasının bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart $\alpha, \beta \subseteq U$, $\alpha \supseteq \beta$ olmak üzere

$$f_R(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in R - A \\ \beta, & x \in A \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f_R'nin bir esnek birleşimsel halka olmasıdır [43].

İspat.

A, R'nin bir alt halkası ve $x, y \in R$ olsun. Eğer $x, y \in A$ ise xy ve $x - y \in A$'dır. Bundan dolayı

$$f_R(x-y) = f_R(xy) = f_R(x) = f_R(y) = \beta$$

ve böylece

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$$

bulunur.

Eğer $x, y \notin A$ ise $xy \in A$ veya $xy \notin A$ ve $x - y \in A$ veya $x - y \notin A$'dır. Her durumda

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = \alpha \text{ ve } f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = \alpha$$

olur ki buradan f_R bir esnek birleşimsel halka bulunur.

Tersine f_R esnek birleşimsel bir halka olsun. $x, y \in A$ olmak üzere;

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = \beta \text{ ve } f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = \beta\text{'dır.}$$

Dolayısıyla

$$f_R(x-y) = \beta \text{ ve } f_R(xy) = \beta\text{'dır.}$$

Bundan dolayı $x - y \in A$ ve $xy \in A$ olur ki A, R halkasının bir alt halkası bulunur.

4.1.19. Teorem

R bir halka X, R'nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. X'in R halkasının bir alt halkası olması için gerek ve yeter şart S_{X^c}'nin bir esnek birleşimsel alt halka olmasıdır [43].

İspat.

$$S_{X^c}(x) = \begin{cases} U, & x \in R - X \\ \emptyset, & x \in X \end{cases}$$

ve $U \supseteq \emptyset$ olduğundan ve Teorem 4.1.18 den dolayı ispat açıktır.

4.2. Esnek Birleşimsel İdealler

Bu bölümde esnek birleşimsel ideal tanımı ve bununla ilgili bazı teoremler verilecektir. Özel bir teorem ile esnek küme üzerinde tanımlanan esnek birleşimsel ideal vasıtasıyla klasik cebirdeki halkanın idealine ulaşılacaktır. Ayrıca daha önce tanımlanan '◊' işlemi ile ilgili bazı teoremlere yer verilecek olup $\mathcal{L}(f_R : \alpha)$ ile gösterilen bir esnek kümenin alt α −kapsaması tanımı ile esnek birleşimsel idealler ile ilgili uygulamalarına yer verilecektir.

4.2.1. Tanım

R bir halka ve f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olmak üzere her $x, y \in R$ için $f_R(xy) \subseteq f_R(y)$ ise f_R'ye U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali, $f_R(xy) \subseteq f_R(x)$ ise f_R'ye U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sağ ideali, f_R, U üzerinde R'nin, hem esnek birleşimsel sağ ideali hem de esnek birleşimsel sol ideali ise f_R'ye U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali denir.

Örnek

$U = \mathbb{Z}^-$evrensel kümesi parametre kümesi ve

$$R = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \middle| \, x, y \in \mathbb{Z}_2 \right\}$$

terimleri $\mathbb{Z}_2$'den oluşan 2×2 tipinde matrisler kümesi olsun. U üzerinde bir f_R kümesini esnek birleşimsel ideal olacak şekilde tanımlayalım:

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{-1\},$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -2\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -2, -3\}$$

$$f_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -2, -3\}$$

Buradan, f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Eğer $U = \mathbb{Z}^-$ üzerinde bir h_R esnek kümesini

$h_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{-1\}$

$h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -2\}$

$h_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -2, -3\}$

$h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \{-1, -3\}$

olarak tanımlarsak h_R'nin U üzerinde bir esnek birleşimsel halka olduğu fakat

$$h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \nsubseteq h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

olduğundan h_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olmadığı görülür. Benzer şekilde

$$h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) = h_R\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right) \nsubseteq h_R\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

olup h_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sağ ideali olmadığı da görülür.

4.2.2. Teorem

R ve S birer halka, f_R kümesi U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali ve f_S, U üzerinde S'nin bir esnek birleşimsel ideali ise $f_R \vee f_S$, U üzerinde $R \times S$'nin bir esnek birleşimsel idealidir.

İspat.

R ve S birer halka, f_R kümesi U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali ve f_S, U üzerinde S'nin bir esnek birleşimsel ideali olsun. Teorem 4.1.5'ten f_R ve f_S, U üzerinde birer esnek birleşimsel halka ise, $f_R \vee f_S$ esnek $\vee -$çarpım kümesi de U üzerinde bir esnek birleşimsel halkadır. $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R \times S$ olsun. Buradan,

$$
\begin{aligned}
f_{R\vee S}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= f_{R\vee S}(x_1x_2, y_1y_2)\\
&= f_R(x_1x_2) \cup f_S(y_1y_2)\\
&\subseteq f_R(x_1)\ \cup f_S(y_1)\\
&= f_{R\vee S}(x_1, y_1)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
f_{R\vee S}((x_1,y_1),(x_2,y_2)) &= f_{R\vee S}(x_1x_2, y_1y_2)\\
&= f_R(x_1x_2) \cup f_S(y_1y_2)\\
&\subseteq f_R(x_2)\ \cup f_S(y_2)\\
&= f_{R\vee S}(x_2, y_2)
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $f_R \vee f_S$, U üzerinde $R \times S$'nin bir esnek birleşimsel idealidir.

4.2.3. Teorem

f_R ve h_R, U üzerinde R'nin esnek birleşimsel idealleri ise $f_R \tilde{\cup}\, h_R$, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel idealidir.

İspat.

f_R ve h_R, U üzerinde R'nin esnek birleşimsel idealleri olsun. f_R ve h_R, U üzerinde esnek birleşimsel birer halka olduğundan Teorem 3.1.8'den $f_R \tilde{\cup}\, h_R$ kümesi U üzerinde esnek birleşimsel halkadır. $x, y \in R$ için

$$
\begin{aligned}
(f_R \tilde{\cup}\, h_R)(xy) &= f_R(xy) \cup\ h_R(xy)\\
&\subseteq f_R(x) \cup\ h_R(x)\\
&= (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(x)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(f_R \tilde{\cup}\, h_R)(xy) &= f_R(xy) \cup\ h_R(xy)\\
&\subseteq f_R(y) \cup\ h_R(y)\\
&= (f_R \tilde{\cup}\, h_R)(y)
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $f_R \tilde{\cup} h_R$, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel idealidir.

4.2.4. Teorem

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali ise

$$R_f = \{x \in R : f_R(x) = f_R(0_R)\}$$

şeklinde tanımlanan R_f kümesi R halkasının bir idealidir.

İspat.

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali olsun.

$$0_R \in R_f \subseteq R$$

olduğu açıktır. Her $x, y \in R_f$ ve $r \in R$ için aşağıdaki özelliklerin sağlandığını göstermeliyiz.

i) $x - y \in R_f$

ii) $xr \in R_f$

iii) $rx \in R_f$

$x, y \in R_f$ ise, $f_R(x) = f_R(y) = f_R(0_R)$'dir. Her $x, y \in R_f$ ve $r \in R$ için Lemma 4.1.2'den,

$f_R(0_R) \subseteq f_R(x - y)$,

$f_R(0_R) \subseteq f_R(xr)$ ve

$f_R(0_R) \subseteq f_R(rx)$'dir.

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali olduğundan her $x, y \in R_f$ ve $r \in R$ için,

i) $f_R(x - y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = f_R(0_R)$

ii) $f_R(xr) \subseteq f_R(x) = f_R(0_R)$

iii) $f_R(rx) \subseteq f_R(x) = f_R(0_R)$

Dolayısıyla her $x, y \in R_f$ ve $r \in R$ için

$f_R(x-y) = f_R(0_R)$,

$f_R(xr) = f_R(0_R)$ ve

$f_R(rx) = (0_R)$'dir.

Bu nedenle R_f, R halkasının bir idealidir.

4.2.5. Teorem

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olması için gerek ve yeter şart

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } \tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R \text{ olmasıdır [43].}$$

İspat.

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali ve $r \in R$ olsun. Dolayısıyla

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)\text{'dir.}$$

$(\tilde{\theta} \lozenge f_R)(r) = U$ ise $\tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$ olduğu açıktır.

$\left(\tilde{\theta} \lozenge f_R\right)(r) \neq U$ ise

$$r = \sum_{i=1}^{m} x_i y_i$$

olmak üzere f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olduğundan her $1 \leq i \leq m$ için

$$\begin{aligned}
(\tilde{\theta} \lozenge f_R)(r) &= \bigcap_{r=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \left(\tilde{\theta}(x_i) \cup f_R(y_i)\right) \\
&\supseteq \bigcap_{r=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \left(\emptyset \cup f_R\left(\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i y_i\right)\right) \\
&= \bigcap_{r=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \left(\emptyset \cup f_R(r)\right) = f_R(r)
\end{aligned}$$

Buradan $\tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$ bulunur.

Tersine $f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y)$ ve $\tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$ olsun. Her $1 \leq i \leq m$ için,

$$\begin{aligned} f_R(xy) \subseteq (\tilde{\theta} \lozenge f_R)(xy) &= \bigcap_{xy=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} \left(\tilde{\theta}(x_i) \cup f_R(y_i)\right) \\ &\subseteq \tilde{\theta}(x) \cup f_R(y) \\ &= \emptyset \cup f_R(y) \\ &= f_R(y) \end{aligned}$$

olup $f_R(xy) \subseteq f_R(y)$ bulunur. Dolayısıyla f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol idealidir.

4.2.6. Sonuç

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.

$i)$ $\tilde{\theta} \lozenge f_R \,\tilde{\supseteq}\, f_R$

$ii)$ Her $1 \leq i \leq m$ için,

$$f_R(\sum_{i=1}^{m}(x_i y_i) \subseteq f_R(x_i) \cup f_R(y_i) \text{ ve } f_R\left(\sum\nolimits_{i=1}^{m} x_i y_i\right) \subseteq f_R(y_i)$$

'dir [43].

4.2.7. Teorem

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sağ ideali olması için gerek ve yeter şart

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } f_R \lozenge \tilde{\theta} \,\tilde{\supseteq}\, f_R$$

olmasıdır [43].

İspat.

Teorem 4.2.5 ile benzer şekilde yapılabilir.

4.2.8. Sonuç

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdaki koşullar denktir.
$i)$ $f_R \lozenge \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} f_R$
$ii)$ Her $1 \leq i \leq m$ için,
$f_R(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i) \subseteq f_R(x_i) \cup f_R(y_i)$ ve $f_R(\sum_{i=1}^{m} x_i y_i) \subseteq f_R(x_i)$'dir [43].

4.2.9. Teorem

f_R, U üzerinde bir esnek küme olsun. f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali olması için gerek ve yeter şart

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \text{ ve } \tilde{\theta} \lozenge f_R \tilde{\supseteq} f_R \text{ ve } f_R \lozenge \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} f_R$$

olmasıdır [43].

İspat.

Teorem 3.2.6 ve Teorem 3.2.8 ile benzer şekilde yapılabilir.

4.2.10. Teorem

S, R halkasının boş olmayan bir alt kümesi olsun. S'nin R halkasının bir sol (sağ) ideali olması için gerek ve yeter şart $\alpha, \beta \subseteq U$ ve $\alpha \supseteq \beta$olmak üzere

$$f_R(x) = \begin{cases} \alpha, & x \in R/S \\ \beta, & x \in S \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan f_R alt kümesinin R halkasının bir esnek birleşimsel sol (sağ) ideali olmasıdır [43].

İspat.

S, R halkasının bir sol ideali ve $x, y \in R$ olsun. $y \in S$ ise $xy \in S$'dir. Dolayısıyla

$$f_R(xy) \subseteq f_R(y) = \beta\text{'dır}$$

Eğer $y \notin S$ ise $xy \in S$veya $xy \notin S$'dir. Her durumda

$$f_R(xy) \subseteq f_R(y) = \alpha\text{'dır.}$$

Benzer şekilde

$$f_R(x-y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) = \alpha$$

olduğu Teorem 4.1.19'dan gösterilebilir. Buradan f_R, R halkasının bir esnek birleşimsel sol idealidir.

Tersine f_R, R halkasının bir esnek birleşimsel sol ideali $y \in S$ ve $x \in R$ olsun. Dolayısıyla

$$f_R(xy) \subseteq f_R(y) = \beta\text{'dır.}$$

Bu ise $f_R(xy) = \beta$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla $xy \in S$ bulunur. Her $x, y \in S$ için $x - y \in S$ olduğu Teorem 4.1.19'dan benzer şekilde gösterilebilir. Dolayısıyla S, R halkasının bir sol idealidir.

4.2.11. Teorem

X, R'nin boş olmayan bir alt kümesi olsun. X'in R halkasının bir sol (sağ, iki taraflı) ideali olması için gerek ve yeter şart S_{X^c}'nin U üzerinde R halkasının bir esnek birleşimsel sol (sağ, iki taraflı) ideali olmasıdır [43].

İspat.

$U \supseteq \emptyset$ ve $S_{X^c}(x) = \begin{cases} U, & x \in R/X \\ \emptyset, & x \in X \end{cases}$

olduğundan ve Teorem 4.2.10'den dolayı ispat açıktır.

4.2.12. Not

f_R, U üzerinde bir esnek birleşimsel ideal ise aynı zamanda esnek birleşimsel halka olduğundan her $x \in R$ için $f_R(0_R) \subseteq f_R(x)$'dir [43].

4.2.13. Önerme

f_R ve h_R, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sol (sağ) ideali ise $f_R \lozenge h_R$, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sol (sağ) idealidir [43].

İspat.

f_R ve h_R, U üzerinde R 'nin birer esnek birleşimsel sol ideali olsun. $x, y \in R$ için

$$\begin{aligned}
(f_R \lozenge h_R)(x) \cup (f_R \lozenge h_R)(y) &= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&\quad \cup \bigcap_{y=\sum_{i=1}^{n} c_i d_i} (f_R(c_i) \cup h_R(d_i)) \\
&= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} \; \bigcap_{y=\sum_{i=1}^{n} c_i d_i} (f_R(a_i) \cup f_R(c_i)) \cup (h_R(b_i) \cup h_R(d_i)) \\
&\supseteq \bigcap_{x+y=\sum_{i=1}^{k} x_i y_i} \big(f_R(x_i) \cup h_R(y_i)\big) \\
&= (f_R \lozenge h_R)(x+y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(f_R \lozenge h_R)(-x) &= \bigcap_{-x=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} (-a_i) b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&= \bigcap_{x=\sum_{i=1}^{m} (-a_i) b_i} (f_R(-a_i) \cup h_R(b_i)) \\
&= (f_R \lozenge h_R)(x)
\end{aligned}$$

ve

$$(f_R \lozenge h_R)(y) = \bigcap_{y=\sum_{i=1}^{m} a_i b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i))$$

$$= \bigcap_{xy=\sum_{i=1}^{m}(xa_i)b_i} (f_R(a_i) \cup h_R(b_i))$$

$$\supseteq \bigcap_{xy=\sum_{i=1}^{m}(xa_i)b_i} \big(f_R(xa_i) \cup h_R(b_i)\big)$$

$$= (f_R \lozenge h_R)(xy)$$

bulunur.

Benzer şekilde $(f_R \lozenge h_R)(x) \supseteq (f_R \lozenge h_R)(xy)$ olduğu bulunabilir.

Buradan $f_R \lozenge h_R$, R'nin bir esnek birleşimsel sol idealidir. İspat sol ideal için yapıldı. Sağ ideal için ispat benzer şekilde ispat yapılabilir.

4.2.14. Teorem

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sağ ideali ve g_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olsun. Bu durumda

$f_R \lozenge g_R \tilde{\supseteq} f_R \tilde{\cup} g_R$'dir [43].

İspat.

f_R, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sağ ideali ve g_R, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sol ideali ideali olsun. $f_R, g_R \tilde{\supseteq} \tilde{\theta}$ her zaman sağlandığından

$f_R \lozenge g_R \tilde{\supseteq} f_R \lozenge \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} f_R$ ve

$f_R \lozenge g_R \tilde{\supseteq} \tilde{\theta} \lozenge g_R \tilde{\supseteq} g_R$'dir.

Buradan $f_R \lozenge g_R \tilde{\supseteq} f_R \tilde{\cup} g_R$ olduğu bulunur.

4.2.15. Tanım

f_A, U üzerinde bir esnek küme ve $\alpha \subseteq U$ olsun. $\{x \in A | f_A(x) \subseteq \alpha\}$ kümesine f_A'nın alt $\alpha -$kapsaması denir ve $\mathcal{L}(f_A{:}\,\alpha)$ ile gösterilir.

4.2.16. Önerme

f_R, U üzerinde bir esnek küme ve $Im(f_R) \subseteq P(U)$, f_R'nin görüntü kümesi ve $\alpha \in Im(f_R)$ olmak üzere f_R, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sol (sağ) ideali ise $\mathcal{L}(f_R: \alpha)$, R'nin bir sol (sağ) idealidir.

İspat.

$\alpha \in Im(f_R)$ olduğu için $f_R(x) = \alpha$ olacak şekilde $x \in R$ vardır ve

$$\emptyset \neq \mathcal{L}(f_R: \alpha) \subseteq R\text{'dir.}$$

$x, y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$ ve $r \in R$ olmak üzere $f_R(x) \subseteq \alpha$ ve $f_R(y) \subseteq \alpha$ yazılabilir. $\mathcal{L}(f_R: \alpha)$'nın R'nin bir sol ideali olması için

i) $x - y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$
ii) $xy \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$
iii)$rx \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$ olduğunu göstermeliyiz.

f_R, U üzerinde R'nin birer esnek birleşimsel sol ideali olduğundan;

i)$f_R(x - y) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \subseteq \alpha \cup \alpha = \alpha$ olup $x - y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$'dir.
ii)$f_R(xy) \subseteq f_R(x) \cup f_R(y) \subseteq \alpha \cup \alpha = \alpha$ olup $xy \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$'dir.
iii)$f_R(rx) \subseteq f_R(x) \subseteq \alpha$ olup $rx \in \mathcal{L}(f_R: \alpha)$'dir.

Dolayısıyla $\mathcal{L}(f_R: \alpha)$, R'nin bir sol idealidir. İspat sol ideal için yapıldı. Benzer şekilde sağ ideal olduğu da gösterilebilir.

4.2.17. Tanım

f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol (sağ) ideali olsun. R'nin bir sol (sağ) ideali olan $\mathcal{L}(f_R: \alpha)$'ya f_R'nin bir alt α −sol (sağ) ideali denir [43].

4.2.18. Önerme

f_R, U üzerinde bir esnek küme, her $\alpha \subseteq U$ için $\mathcal{L}(f_R: \alpha)$ f_R'nin alt $\alpha -$sol(sağ) ideali ve $Im(f_R)$ kapsama altında sıralı bir küme olsun. Bu durumda f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol (sağ) idealidir [43].

İspat.

İspat, esnek birleşimsel sol ideal için yapılacaktır, benzer şekilde esnek birleşimsel sağ ideal olduğu gösterilebilir.

$x, y \in R$, $f_R(x) = \alpha_1$ ve $f_R(y) = \alpha_2$olsun ve $\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $x \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_1)$ ve $y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_2)$ olduğu açıktır.

$\alpha_1 \subseteq \alpha_2$ ve $x, y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_1)$ ve $\mathcal{L}(f_R: \alpha_2)$, f_R'nin sol ideali olduğundan *Önerme 4.2.16*'dan

i) $x - y \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_1)$
ii) $xy \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_1)$
iii)$r \in R$ için $rx \in \mathcal{L}(f_R: \alpha_1)$'dir.

Dolayısıyla,

i)$f_R(x - y) \subseteq \alpha_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2 = f_R(x) \cup f_R(y)$
ii)$f_R(xy) \subseteq \alpha_1 = \alpha_1 \cup \alpha_2 = f_R(x) \cup f_R(y)$
iii)$f_R(rx) \subseteq \alpha_1 = f_R(x)$

bulunur. Buradan f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olduğu bulunur.

Örnek

$\mathbb{Z}_6$ halkasını ele alalım. $U = \mathbb{Z}_6$ üzerinde f_R esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_R(0) = \{1\}$
$f_R(1) = f_R(5) = \{1,2,3\}$
$f_R(2) = f_R(4) = \{1,2\}$
$f_R(3) = \{1,3\}$

Burada f_R'nin U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali olduğu kolayca gösterilebilir. $Im(f_R)$ dikkate alındığında,

$\mathcal{L}(f_R: \{1,2,3\}) = \{0,1,2,3,4,5\}$
$\mathcal{L}(f_R: \{1,2\}) = \{0,2,4\}$
$\mathcal{L}(f_R: \{1,3\}) = \{0,3\}$
$\mathcal{L}(f_R: \{1\}) = \{0\}$
olduğu görülür.

Gerçekten de $\{0\}, \{0,3\}, \{0,2,4\}, \{0,1,2,3,4,5\}$ kümelerinin R'nin hem sol hem de sağ idealleri olduğu gösterilebilir [43].

Örnek

$\mathbb{Z}_4$ halkasını ele alalım. $U = D_2 = \{e, x, y, yx\}$ üzerinde f_R esnek kümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$f_R(0) = \{x\}$
$f_R(1) = \{e, x, y\}$
$f_R(2) = \{e, x\}$
$f_R(3) = \{e, x, y\}$

Buradan $Im(f_R) = \{\{e, x, y\}, \{e, x\}, \{x\}\}$'dir. $Im(f_R)$'nin kapsama altında sıralı olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{L}(f_R: \alpha) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = \{x\} \\ \{0,2\}, & \alpha = \{e, x\} \\ \{0,1,2,3\}, & \alpha = \{e, x, y\} \end{cases}$$

bulunur.

$\{0\}, \{0,2\}$ ve $\{0,1,2,3\}, R$'nin hem sağ hem de sol idealleridir. Dolayısıyla f_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel idealidir.

$U = D_2$ üzerinde bir h_R esnek kümesini şu şekilde tanımlayalım:

$h_R(0) = \{e\}$

$h_R(1) = \{e, x\}$

$h_R(2) = \{e, x, yx\}$

$h_R(3) = \{e, x\}$

Buradan $Im(f_R) = \{\{e, x, yx\}, \{e, x\}, \{e\}\}$'dir. $Im(f_R)$'nin kapsama altında sıralı olduğu dikkate alınarak,

$$\mathcal{L}(f_R: \alpha) = \begin{cases} \{0\}, & \alpha = \{e\} \\ \{0,1,3\}, & \alpha = \{e, x\} \\ \{0,1,2,3\}, & \alpha = \{e, x, yx\} \end{cases}$$

bulunur. $\{0,1,3\}$'ün R'nin hem sağ hem de sol ideali olmadığı açıktır.

Ayrıca $h_R(3 \cdot 2) = h_R(2) \nsubseteq h_R(3)$ olduğundan h_R, U üzerinde R'nin bir esnek birleşimsel ideali değildir [43].

4.3. Regüler Halkalar

Bu bölümde esnek birleşimsel halka idealleri ile klasik halka teorisinde önemli bir yer tutan regüler halkalar arasındaki ilişki verilecek, regüler halkalar, esnek birleşimsel idealler ile karakterize edilecektir.

R bir halka ve her $a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde $x \in R$ varsa R'ye regüler halka denir [44].

4.3.1. Teorem

Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.
i) R regülerdir.
ii) R'nin her esnek birleşimsel sağ R^*ideali ve esnek birleşimsel sol L ideali için $R^*L = R^* \cap L$'dir.

4.3.2. Teorem

Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.
i) R regülerdir.
ii) U üzerinde R'nin her esnek birleşimsel sağ f_R ideali ve her esnek birleşimsel sol g_R ideali için $f_R \between g_R = f_R \tilde{\cup} g_R$'dir [43].

İspat.

R bir regüler halka, f_R, R'nin bir esnek birleşimsel sağ ideali ve g_R, R'nin bir esnek birleşimsel sol ideali olsun. Teorem 4.2.14'ten R'nin her esnek birleşimsel sağ f_R ideali ve her esnek birleşimsel sol g_R ideali için;

$$f_R \between g_R \tilde{\supseteq} f_R \tilde{\cup} g_R \ldots (1)$$

yazılabilir. $f_R \tilde{\cup} g_R \tilde{\supseteq} f_R \between g_R$ olduğunu göstermemiz ispatı tamamlayacaktır. $\forall a \in R$ için, R regüler olduğundan

$$a = axa$$

olacak şekilde $x \in R$ vardır. Buradan

$$(f_R \between g_R)(a) = \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} (f_R(x_i) \cup g_R(y_i))$$

$$\subseteq f_R(ax) \cup g_R(a)$$
$$\subseteq f_R(a) \cup g_R(a)$$
$$= (f_R \tilde{\cup} g_R)(a) \ \ldots(2)$$

(1) ve (2) den $f_R \lozenge g_R = f_R \tilde{\cup} g_R$ olup ispat tamamlanır.

Tersine;

R'nin regüler olduğunu göstermek için U üzerinde R'nin her sağ R^* ideali ve her sol L ideali için $R^*L = R^* \cap L$ olduğunu göstermeliyiz. R^* ve L sırasıyla R'nin sağ ve sol idealleri olsun. Bu durumda

$$R^*L \subseteq R^* \cap L \ldots(1)$$

olduğu açıktır. $R^* \cap L \subseteq R^*L$ olduğunu göstermemiz ispatı tamamlayacaktır. Bir a elemanını $a \in R^* \cap L$ ve $a \notin R^*L$ olacak şekilde tanımlandığını kabul edelim. Teorem 4.2.11'den $S_{R^{*c}}$ ve S_{L^c} sırasıyla R^* ve L'nin esnek karakteristik fonksiyonlarıdır.

$a \in R \cap L$ olduğundan $a \in R^*$ ve $a \in L$'dir. Buradan

$$S_{R^{*c}}(a) = S_{L^c}(a) = \emptyset$$

Diğer taraftan $a \notin R^*L$ olduğundan $a = xy$ olacak şekilde $x \in R^*$ ve $y \in L$ yoktur. Buradan

$$\left(S_{R^{*c}} \lozenge S_{L^c}\right)(a) = U$$

bulunur. Bu ise a nın tanımlanmış olduğu kabul ile çelişir. Yani $R^* \cap L \subseteq R^*L$'dir.

Dolayısıyla R regülerdir.

4.3.3. Sonuç

Bir R halkası için aşağıdaki koşullar denktir.

i) R regülerdir.

ii) U üzerinde R'nin her esnek birleşimsel f_R ve g_R idealleri için

$$f_R \lozenge g_R = f_R \,\tilde{\cup}\, g_R\text{'dir [43].}$$

4.3.4. Teorem

Bir R halkasının regüler olması için gerek ve yeter şart R'nin her esnek birleşimsel ideallerinin idempotent olmasıdır [43].

İspat.

R bir regüler halka ve h_R, R'nin bir esnek birleşimsel ideali olsun. h_R, R'nin bir esnek birleşimsel ideali olduğundan h_R aynı zamanda R'nin bir esnek birleşimsel sağ idealidir. Buradan

$$h_R \lozenge h_R \,\tilde{\supseteq}\, h_R \lozenge \tilde{\theta} \,\tilde{\supseteq}\, h_R$$

yazılabilir. Şimdi ise $h_R \,\tilde{\subseteq}\, h_R \lozenge h_R$ olduğunu göstermeliyiz. R regüler olduğundan, $\forall a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned}(h_R \lozenge h_R)(a) &= \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} (h_R(x_i) \cup h_R(y_i)) \\ &\supseteq \bigcup_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} h_R(ax) \cup h_R(a) \\ &\supseteq h_R(a) \cup h_R(a) \\ &= h_R(a)\end{aligned}$$

Dolayısıyla $h_R \,\tilde{\subseteq}\, h_R \lozenge h_R$'dir. Buradan $(h_R)^2 = h_R \lozenge h_R = h_R$ bulunur.

Şimdi ise esnek birleşimsel sol ideale bakalım. R bir regüler halka ve k_R, R'nin bir esnek birleşimsel ideali olsun. k_R, R'nin bir esnek birleşimsel ideali olduğundan k_R aynı zamanda R'nin bir esnek birleşimsel sol idealidir. Buradan

$$k_R \lozenge k_R \,\tilde{\supseteq}\, \tilde{\theta} \lozenge k_R \,\tilde{\supseteq}\, k_R$$

yazılabilir. Şimdi ise $k_R \,\tilde{\supseteq}\, k_R \lozenge k_R$ olduğunu göstermeliyiz.

R regüler olduğundan, $\forall a \in R$ için $a = axa$ olacak şekilde $x \in R$ vardır. Buradan

$$(k_R \lozenge k_R)(a) = \bigcap_{a=\sum_{i=1}^{m} x_i y_i} (k_R(x_i) \cup k_R(y_i))$$
$$\subseteq k_R(ax) \cup k_R(a)$$
$$\subseteq k_R(a) \cup k_R(a)$$
$$= k_R(a)$$

Dolayısıyla, $k_R \tilde{\supseteq} k_R \lozenge k_R$’dir. Buradan $(k_R)^2 = k_R \lozenge k_R = k_R$ bulunur.

4.3.5. Sonuç

Regüler bir halkanın her esnek birleşimsel sağ (sol) ideali idempotenttir [43].

4.3.6. Teorem

R regüler bir halka olsun. R’nin bütün esnek birleşimsel ideallerinin kümesi esnek kesişim-birleşim işlemi altında regüler bir halkadır ve R’nin bütün esnek birleşimsel idealleri $f_R = f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R$ formundadır [43].

İspat.

f_R, R’nin bir esnek birleşimsel ideali olsun. $f_R = f_R \lozenge g_R \lozenge f_R$ olacak şekilde R’nin bir g_R esnek birleşimsel idealini tanımlayalım. Buradan;

$$f_R = f_R \lozenge g_R \lozenge f_R \tilde{\supseteq} f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R$$
$$\tilde{\supseteq} (f_R \lozenge \tilde{\theta}) \tilde{\cup} (\tilde{\theta} \lozenge f_R)$$
$$\tilde{\supseteq} f_R \tilde{\cup} f_R = f_R$$

Dolayısıyla,

$$f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R \tilde{\supseteq} f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge \tilde{\theta} \tilde{\supseteq} f_R \lozenge \tilde{\theta}$$

ve

$$f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R \ \tilde{\supseteq} \ \tilde{\theta} \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R \ \tilde{\supseteq} \ \tilde{\theta} \lozenge f_R$$

Bu nedenle $f_R = f_R \lozenge \tilde{\theta} \lozenge f_R$ bulunur.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Belirsizliklerin ortadan kaldırılması ile ilgili birçok teori bulunmaktadır. Bu teorilerden biri ise esnek küme teorisidir. Bu teorinin ortaya atılması ile zaman içerisinde çok sayıda matematiksel kavramlar esnek kümeler ile karakterize edilmiştir. Matematiğin yanında bilgisayar bilimleri, mühendislik, tıp, bankacılık gibi birçok alanda bu teorinin uygulanabilir olduğu görülmüştür.

Bu çalışmada daha önce tanımlanmış olan esnek kümeler ve klasik cebire ait bazı yapıların harmanlanması ile esnek birleşimsel halkalar, esnek birleşimsel halka idealleri ve regüler halka yapılarına ait tanımlar ve bunlarla ilgili örnekler, teoremler ve sonuçlar verilmiştir.

Bu teorem ve sonuçlara dayanarak klasik halkaları karakterize etmek için esnek birleşimsel halkaların özellikleri üzerinde daha fazla çalışma yapılabilir.

5. KAYNAKLAR

[1] Zadeh L. A., ‘‘Fuzzy Sets’’, ***Information and Control***, 8: 338-353 (1965).

[2] Pawlak Z., ‘‘Rough sets’’, ***International Journal of Information and Computer Sciences***, 11 (1): 341-356 (1982).

[3] Molodtsov D., ‘‘Soft set theory-first results’’, ***Computers and Mathematics withApplications***, 37 (1): 19-31 (1999).

[4] Molodtsov D. A., Leonov V. Yu. and Kovkov D. V., ‘‘Soft Sets Technique and Its Application’’, ***Nechetkie Sistemy i Myagkie Vychisleniya***, 1 (1): 8-39 (2006).

[5] Maji P. K., Bismas R. and Roy A.R., ‘‘Soft set theory’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 45 (1): 555-562 (2003).

[6] Maji P. K., Roy A. R. and Biswas R., ‘‘An application of soft sets in a decision making problem’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 44 (1): 1077-1083 (2002).

[7] Xiao Z., Li Y., Zhong B. and Yang X., ‘‘Research on synthetically evaluating method for business competitive capacity based on soft set’’, ***Statistical Research***, 52-54 (2003).

[8] Chen D., Tsang E. C. C. and Yeung D. S., ‘‘Some notes on the parameterization reduction of soft sets’’, ***International Conference on Machine Learning and Cybernetics 3***, China, 1442-1445 (2003).

[9] Chen D., Tsang E. C. C., Yeung D. S. and Wang X., ‘‘The parameterization reduction of soft sets and its applications’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 49 (1): 757-763 (2005).

[10] Xiao Z., Chen L., Zhong B. and Ye S., ‘‘Recognition for Soft Information Based on the Theory of Soft Sets’’, ***International Conference on Service Systems and Services Management***, China, 1104-1106 (2005).

[11]Pei D. and Miao D., ‘‘From Soft Sets to Information Systems’’, ***International Conference on Granular Computing***, China, 617-621 (2005).

[12] Mushrif M. M., Sengupta S. and Ray A. K., ‘‘Texture Classification Using a Novel,Soft-Set Theory Based Classification, Algorithm’’. ***Lecture Notes In Computer Science***, 3851: 246-254 (2006).

[13] Molodtsov D., ‘‘The Theory of Soft Sets’’, ***URSS Publishers, Moscow***, (2004).

[14] Kovkov D. V., Kolbanov V. M. and Molodtsov D. A., ‘‘Soft Sets Theory-Based Optimization’’**, *Journal of Computer and Systems Sciences International***, 46 (6): 872-880 (2007).

[15] Zou Y. and Xiao Z., ‘‘Data analysis approaches of soft sets under incomplete information’’, ***Knowledge-Based Systems***, 21 (1): 941-945 (2008).

[16] Ali M. I., Feng F., Liu X., Min W. K. and Shabir M., ‘‘On some new operations in soft set theory’’**, *Computers and Mathematics with Applications***, 57: 1547-1553 (2009).

[17] Aktaş H. and Çağman N., ‘‘Soft sets and soft groups’’, ***Information Sciences***, 177 (1): 2726-2735 (2007).

[18] Jun Y. B., ‘‘Soft BCK/BCI-algebras’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 56 (1): 1408-1413 (2008).

[19] Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H., ‘‘Soft set theory applied to commutative ideals in BCK-algebras’’, ***Journal of Applied Mathematics and Informatics***, 26 (3-4): 707-720 (2008).

[20] Park C. H., Jun Y. B. and Öztürk M. A., ‘‘Soft WS-algebras’’, ***Commun. Korean Math. Soc.***, 23 (3): 313-324 (2008).

[21] Feng F., Jun Y. B. and Zhao X., ‘‘Soft semirings’’, ***Computers and Mathematics withApplications***, 56 (10): 2621-2628 (2008).

[22] Sun Q-M., Zhang Z-L. and Liu J., ‘‘Soft Sets and Soft Modules’’, ***Rough Sets and Knowledge Technology, Springer,*** China, 403-409 (2008).

[23] Jun Y. B., Lee K. J. and Zhan J., ‘‘Soft p-ideals of soft BCI-algebras’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 58: 2060-2068 (2009).

[24] Jun Y. B., Lee K. J. and Park C. H., ‘‘Soft set theory applied to ideals in d-algebras’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 57: 367-378 (2009).

[25] Jun Y. B. and Park C. H., ‘‘Applications of soft sets in Hilbert algebras’’, ***Iranian Journal of Fuzzy Systems***, 6 (2): 75-86 (2009).

[26] Acar U., Koyuncu F. and Tanay B., ‘‘Soft sets and soft rings’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 59: 3458-3463 (2010).

[27] Babitha K. V. and Sunil J. J., ‘‘Soft set relations and functions’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 60: 1840-1849 (2010).

[28] Çağman N. and Enginoğlu S., ‘‘Soft matrix theory and its decision making’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 59: 3308-3314 (2010).

[29] Feng F., Li C. and Davvaz B., ‘‘Soft sets combined with fuzzy sets and rough sets: a tentative approach’’, ***Soft Comput.***, 14: 899-911 (2010).

[30] Gong K., Xiao Z. and Zhang X., ‘‘The bijective soft set with its operations’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 60: 2270-2278 (2010).

[31] Kazancı O., Yılmaz Ş. and Yamak S., ‘‘Soft sets and soft BCH-algebras’’, ***Hacettepe J. Math. Stat.***, 39 (2): 205-217 (2010).

[32] Majumdar P. and Samanta S. K., ‘‘On soft mappings’’, ***Computers and Mathematicswith Applications***, 60: 2666-2672 (2010).

[33] Liu X., Xiang D. and Zhan J., ‘‘Fuzzy isomorphism theorems of soft rings’’, ***NeuralComput. Appl.***, 21: 391-397 (2012).

[34] Qin K. and Hong Z., ‘‘On soft equality’’, ***Journal of Computational and Applied Mathematics***, 234: 1347-1355 (2010).

[35] Zhan J. and Jun Y. B., ‘‘Soft BL-algebras based on fuzzy sets’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 59: 2037-2046 (2010).

[36] Xu W., Ma J., Wang S. and Hao G., ‘‘Vague soft sets and their properties’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 59: 787-794 (2010).

[37] Atagün A. O. and Sezgin A., ‘‘Soft substructures of rings, fields and modules’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 61: 592-601 (2011).

[38] Yamak S., Kazancı O. and Davvaz B., ‘‘Soft hyperstructure’’, ***Computers and Mathematics with Applications***, 62: 797-803 (2011).

[39] Çelik Y., Ekiz C. and Yamak S., ‘‘A new view on soft rings’’, ***Hacettepe J. Math. Stat.***, 40 (2): 273-286 (2011).

[40] Türkmen E. and Pancar A., ‘‘On Some New Operations in Soft Module Theory’’, ***Neural Comput. Appl.***, 22 (6): 1233-1237 (2013).

[41] Çağman, N., ve Enginoğlu,S., ‘‘Soft set theory and uni-int decision making’’, ***Eur. J. Oper. Res.***, 207: 848-855 (2010) .

[42] Muştuoğlu, E., ‘‘Grup teorinin esnek birleşimsel gruplara aktarılması’’, Yüksek Lisans Tezi, ***Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,*** Amasya, 19-20 (2017).

[43] Sezer, Sezgin A., ‘‘A new view to ring theory via soft union rings, ideals and bi-ideals’’, ***Knowledge-Based Systems,*** 36: 300-314 (2012).

[44] Naumann, J. Von ‘‘On regular rings’’, ***Proc. Mat. Acad. Sci. USA*** 22 (12): 707-712 (1936).

[45] Steinfield, O., ‘‘Quasi-ideals in rings and semigroups’’, ***Akad. Kiad.*** Budabest (1978).

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Soyadı, Adı	: TUNÇAY, Mesut
Uyruğu	: T.C.
Doğum Tarihi ve Yeri	: 19.12.1983
Medeni Hali	: Evli

İletişim Bilgileri

Adres	: Akbilek Mah. İkram Sk. No:3/9 Merkez AMASYA
Telefon	: 0 (505) 500 13 03
e-mail	: mesut_tncy@hotmail.com

Eğitim

Derece	**Eğitim Birimi**	**Mezuniyet tarihi**
Lisans	Anadolu Üniversitesi İktisat Fakültesi Kamu Yönetimi	2015
Lisans	Ondokuz Mayıs Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Matematik Öğrt.	2008
Lise	Amasya Anadolu Öğretmen Lisesi	2001

İşDeneyimi

Yıl	**Yer**	**Görev**
2009-	T. Halk Bankası A.Ş.	Yönetmen Yrd.

Yabancı Dil

İngilizce

Yayınlar

1. Tunçay, M. and Sezgin, A., Soft Union Ring and its Application to Ring Theory, ***International Journal of Computer Applications***, 151(9) (2016) 7-13.