GEÇİŞ ŞARTLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN FREDHOLM VE İZOMORFİZMİ

Ahmet BÜYÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2015

AMASYA

GEÇİŞ ŞARTLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN FREDHOLM VE İZOMORFİZMİ

Ahmet BÜYÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ARALIK 2015

AMASYA

Ahmet BÜYÜK tarafından hazırlanan Geçiş Şartlı Bir Sınır Değer Problemine Ait Diferensiyel Operatörün Fredholm Ve İzomorfizmi adlı bu tezin Yüksek Lisans tezi olarak uygun olduğunu onaylarım.

Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR
Tez Danışmanı, Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı

Bu çalışma, jürimiz tarafından oy birliği / oy çokluğu ile Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU ....
(Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı, GOÜ)

Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR ....
(Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Ahmet ALTÜRK ....
(Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, A.Ü.)

Doç. Dr. Keziban ORBAY ....
(Geometri Anabilim Dalı, A.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Mehmet DAĞLI ....
(Cebir ve Sayılar Teorisi Anabilim Dalı, A.Ü.)

Yrd. Doç. Dr. Nihat ALTINIŞIK ....
(Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı, OMÜ)

25/12/2015

Bu tez ile A.Ü. Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu Yüksek Lisans derecesini onamıştır.

Doç. Dr. Mehmet KARA ....
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEZ BİLDİRİMİ

Tez içindeki bütün bilgilerin etik davranış ve akademik kurallar çerçevesinde elde edilerek sunulduğunu, ayrıca tez yazım kurallarına uygun olarak hazırlanan bu çalışmada bana ait olmayan her türlü ifade ve bilginin kaynağına eksiksiz atıf yapıldığını bildiririm.

Ahmet BÜYÜK

GEÇİŞ ŞARTLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNE AİT DİFERENSİYEL OPERATÖRÜN FREDHOLM VE İZOMORFİZMİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Ahmet BÜYÜK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Matematik Ana Bilim Dalı

Aralık 2015

ÖZET

Bu tez çalışmasının amacı, Sobolev uzaylarında süreksiz katsayılı ve geçiş şartlarına sahip özdeğer parametreli bir sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatörün bazı özellikleri verilmek suretiyle bu operatörün Fredholm operatörü ve izomorfizm olma şartlarının araştırılmasıdır.

2015, 105 sayfa

Anahtar Kelimeler: Sınır Değer Problemi, Süreksiz Katsayı, Geçiş Şartları, Diferensiyel Operatör, Fredholm ve İzomorfizm.

FREDHOLM AND ISOMORPHISM OF DIFFERENTIAL OPERATOR FOR A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH TRANSMISSION CONDITIONS

(M.Sc. Thesis)

Ahmet BÜYÜK

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE AND TECHNOLOGY

Department of Mathematics

December 2015

ABSTRACT

The aim of this thesis is to investigate the isomorphism and Fredholm operator conditions of the differential operator by giving its some properties for a boundary value problem with eigenvalue parameter, transmission conditions and discontinuous coefficient on Sobolev spaces.

2015, 105 pages

Key Words: Boundary Value Problem, Discontinuous Coefficients, Transmission Conditions, Differential Operator, Fredholm and Isomorphism.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca her zaman yakın ilgisini gördüğüm, bilgilerinden en iyi şekilde faydalandığım Saygıdeğer Hocam Sayın Doç. Dr. Mustafa KANDEMİR’ e en derin saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca üzerimde çok emekleri bulunan annem Dilek BÜYÜK ve babam Arif BÜYÜK‘ e sonsuz teşekkürler.

Aralık 2015
Ahmet BÜYÜK

İÇİNDEKİLER

ÖZET V
ABSTRACT VI
TEŞEKKÜR VII
İÇİNDEKİLER VIII
KISALTMALAR LİSTESİ X
1. GİRİŞ 1
2. FONKSİYON UZAYLARI 3
2.1 Ölçüm Teorisi 3
2.1.1 Ölçüler 3
2.1.2 Ölçü Uzayı 5
2.1.3 Dış Ölçüler 7
2.1.4 Lebesgue Dış Ölçüsü ve Lebesgue Ölçüsü 7
2.1.5 Ölçülebilir Fonksiyonlar 11
2.1.6 İntegral 15
A) Basit Fonksiyonların İntegrali 15
B) Pozitif Fonksiyonların İntegrali 16
2.1.7 İntegrallenebilen Fonksiyonlar 19
2.2 Vektör Uzayları 23
2.2.1 Normlu Uzaylar 25
2.2.2 Banach Uzayları 26
2.2.3 $L^p(\Omega)$ Uzayları 28
2.2.4 $L^\infty(\Omega)$ Uzayları 32
2.2.5 İç Çarpım ve Hilbert Uzayları 34
2.2.6 Zayıf Türevler ve Sobolev Uzayları 40
A) Lokal Lebesgue Uzayları 40
B) Sobolev Uzaylarının Bazı Özellikleri 49
2.2.7 İnterpolasyon Uzayları 53
A) Reel İnterpolasyon Metodu 58

3. BAZI OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ **63**

3.1 Kompakt Operatörler **69**

3.2 İntegral Operatörü **71**

3.3 Fredholm Operatörü **72**

3.4 Rezolvent Operatörü **74**

3.5 Pozitif Operatörler **74**

3.6 Gömülme Operatörü **75**

4. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ **76**

4.1 Diferensiyel Denklemler **76**

4.2 Sınır Değer Problemleri **79**

4.3 Özdeğer Parametreli Sınır Değer Problemleri **82**

5. GEÇİŞ ŞARTLARI İLE İLGİLİ LİTERATÜR TARAMASI **90**

6. DİFERENSİYEL OPERATÖRE AİT BAZI ÖZELLİKLER **92**

6.1 Standart Olmayan Geçiş Şartlı Homojen Denklem **92**

6.2 Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin Fredholm Olma Özelliği **96**

6.3 Geçiş Şartlı Homojen Olmayan Sınır Değer Probleminin İzomorfizmi **97**

7. SONUÇ VE ÖNERİLER **100**

8. KAYNAKLAR **101**

9. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ **105**

KISALTMALAR LİSTESİ

Üniversite: Amasya Üniversitesi

Enstitü: Fen Bilimleri Enstitüsü

Tez: Yüksek lisans tezi

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar

$\mathbb{C}$: Karmaşık Sayılar

$(X, \mathcal{A})$: Ölçülebilir küme

$(X, \mathcal{A}, \mu)$: Ölçü uzayı

$C[a,b]$: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonların uzayı

$C^{(r)}[a,b]$: $[a,b]$ aralığında r - inci mertebeye kadar sürekli türevlenebilir fonksiyon uzayı

$L^2(\Omega)$: Karesinin integrali sonlu fonksiyon uzayı

$C_c(\Omega)$: Kompakt destekli sürekli fonksiyon uzayı

$L^p(\Omega)$: Lebesgue uzayı

$L^\infty(\Omega)$: Esaslı sınırlı fonksiyonların Lebesgue uzayı

$L^p_{loc}(\Omega)$: Lokal Lebesgue uzayı

$L^1(U)$: $U \subset \Omega$ için lokal integrallenebilir fonksiyonların uzayı

$D(\Omega)$: Test fonksiyonlarının uzayı

$D'(\Omega) = C_c^\infty(\Omega)$: Genelleştirilmiş fonksiyonların lineer uzayı

$W_p^k(\Omega)$: Sobolev uzayı

$W_p^2(\Omega) = H^k(\Omega)$: Karesel integrallenebilir fonksiyonların Sobolev uzayı

$W_p^k(-1,0,1) = W_p^k(-1,0) \dot{+} W_p^k(0,1)$: Sobolev uzayların direkt toplamı

$W_p^\theta(\mathbb{R}^n)$: Sobolev- Slobodetskii uzayı

(X_0, X_1): İnterpolasyon çifti

$(X_0, X_1)_{\theta,p}$: Reel İnterpolasyon uzayı

$(X_0, X_1)_\theta$: Sürekli İnterpolasyon uzayı

1. GİRİŞ

Bu tezde, Sobolev uzaylarının direkt toplamında süreksiz katsayılı, süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunduran sınır şartlarına sahip olan bir sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatörü tanıma ve bu operatöre ait bazı özelliklerin araştırılması, özellikle diferensiyel operatörün Fredholm ve izomorfizm olma şartlarının incelenmesi amaçlanmıştır.

Genel olarak, adi diferensiyel denklemler için kurulan klasik sınır değer problemlerinde, katsayılar sürekli olup sınır şartları tanım aralığının sadece sınır noktalarında verilmektedir. Bu tip sınır değer problemleri (eliptik, hiperbolik ve parabolik operatörler bulunduran problemler) ve diferensiyel operatöre ait özelliklerin teorik yapısı ve sonuçları S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un [45-48] çalışmalarında görülmektedir. Ancak bu tezde göz önüne alınan problem, sınır şartlarında sadece aralığın sınır noktalarını değil aynı zamanda aralığın bir iç noktasında geçiş şartları içeren klasik olmayan bir problemdir. Sınır şartları tanım aralığının uç noktalarının dışında da şartlar (Geçiş şartları, çok noktalı şartlar, fonksiyoneller vs.) içeriyorsa bu tip problemler lokal olmayan sınır değer problemi olarak adlandırılmaktadır. Bizim çalışmamız aynı zamanda geçiş şartları bulundurduğundan lokal olmayan bir sınır değer problemidir. Bu şekildeki problemlerin son yıllarda özellikle O. Sh. Mukhtarov ve çalışma arkadaşları tarafından çalışıldığı görülmektedir [17, 18, 20, 21, 27, 28, 29].

Geçiş şartlı sınır değer problemlerinin önemli uygulamalarının birçoğu fiziksel problemlerde ortaya çıkmaktadır. Bu problemlerden bazıları, homojen olmayan ortamlarda ısı transfer problemleri, difraksiyon problemleri ve çeşitli fiziksel transfer problemleridir. Lokal olmayan problemler, A. Bitsadze, A. Samarskii ve A. L. Skubachevskii' nin çalışmalarında da görülmektedir ([10],[37]).

Geçiş şartlı problemler fizik alanında ve teknik alanlarda, örneğin elektrostatik ve manyetizma alanlarında ısı transferleri için kurulan model problemlerdir.

Göz önüne aldığımız problem ikinci merteben süreksiz katsayılı

$$L(\lambda)u := -r(x)u''(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{1.1}$$

diferensiyel denklemi ve süreksizlik noktasında geçiş şartlarını bulunduran

$$\begin{aligned} L_k u = \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) \\ + \gamma_k u^{(m_k)}(1) = f_k, \ (k = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{1.2}$$

sınır şartlarından oluşan standart olmayan sınır değer problemidir. Burada,

$$r(x) = \begin{cases} r_1, & x \in [-1,0) \\ r_2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ $(r_1 \neq r_2)$ şeklinde tanımlı sabit bir fonksiyon; λ bir kompleks parametre; α_k, β_k, η_k, γ_k, $(k = 1,2,3,4)$ kompleks katsayılar; $|\alpha_k| + |\beta_k| + |\eta_k| + |\gamma_k| \neq 0$; m_k $(k = 1,2,3,4)$ herhangi tamsayılardır.

2. FONKSİYON UZAYLARI

2.1 Ölçüm Teorisi

Ölçüm kavramı matematiğin temel konularından biridir. Önceleri ekim yapılan tarla alanı, sutaşıma sistemleri için küpün hacmi, mevsimsel afetleri engellemek için sel ve kuraklık grafikleri gibi basit ve sonlu kümelerle ifade edilebilen kavramlar için ölçüm kuralları bulunmuştur. Zamanla matematiğin gelişmesiyle birlikte sonsuz kümeler olarak ifade edilen daha karmaşık yapıların veya olayların ölçümü için ölçüm teorisi kullanılmaya başlanmıştır.

Ölçüm teorisi matematikte ve istatistikte reel analizin konusu olarak tanımlanmaktadır. Konu ile ilgili araştırma yapıldığında teori daha çok Lebesgue ölçümü olarak anlatılmakta ve verilen fonksiyonlar, Lebesgue' in teoremleri altında verilmektedir. Ölçüm teorisinin tüm analiz ve fonksiyon teoremlerinde Lebesgue integralleriyle karşılaşılır. Lebesgue integralleri ölçüm teorisi teoremleri ışığında Riemann anlamında integrallenemeyen fonksiyonların integrallerini hesaplamada yardımcı olur. Fakat klasik ölçüm teorisi daha çok reel basit analizde kullanılır. Örneğin reel doğru üzerinde 0 ile 1 arasındaki reel sayıların kümesi ölçümünün ne olacağı, bu kümeden 0 ve 1'in çıkarılmasıyla oluşan kümenin ölçümünün ne olacağı veya bu kümeden bütün rasyonel sayıların çıkarılmasıyla oluşan kümenin ölçümünün ne olacağı gibi sorular üzerinde durulmuştur ([7], [8], [33]).

2.1.1 Ölçüler

2.1. Tanım X bir küme olsun. X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A}$ sınıfı için aşağıdaki özellikler sağlanırsa bu $\mathcal{A}$ sınıfına X üzerinde bir **cebir**dir denir.

i) $X \in \mathcal{A}$

ii) Her $E \in \mathcal{A}$ için $E^c = X / E \in \mathcal{A}$

iii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

Eğer, iii) yerine her $n \in \mathbb{N}$ için $E_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{A}$

şartı alınırsa $\mathcal{A}$ sınıfına bir $\sigma-$**cebir** adı verilir. Eğer $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma-$ cebiri ise, yukarıdaki özelliklerden,

i) $\varnothing \in \mathcal{A}$

ii) $k = 1, 2, ..., n$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{n} E_k \in \mathcal{A}$

iii) $k \in \mathbb{N}$ için $E_k \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathcal{A}$

iv) Her $A, B \in \mathcal{A}$ için $A / B \in \mathcal{A}$

önermelerinin doğruluğu gösterilebilir.

2.2. Tanım X bir küme ve $\mathcal{A}$ da X üzerinde bir $\sigma-$cebir ise $(X, \mathcal{A})$ ikilisine bir **ölçülebilir uzay** denir. $\mathcal{A}$ daki her bir kümeye de **ölçülebilir küme** adı verilir.

2.3. Tanım $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $\overline{\mathbb{R}}^+ = \mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı

$$\mu : \mathcal{A} \to \overline{\mathbb{R}}^+$$

genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonu,

i) $\mu(\varnothing) = 0$

ii) Her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) \geq 0$

iii) Her ayrık (A_n) dizisi için $\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

özelliklerini sağlarsa bu fonksiyona **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** denir.

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ için $\mu(A) < \infty$ ise μ ye bir **sonlu ölçü** adı verilir. X kümesi her biri sonlu ölçüye sahip sayılabilir sayıda kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa μ ölçüsü $\sigma -$ **sonludur** denir. Eğer $\mu(X) = 1$ ise bu ölçüye **olasılık ölçüsü** denir.

2.1.2 Ölçü Uzayı

2.4. Tanım X herhangi bir küme, $\mathcal{A}$, X üzerinde bir $\sigma -$ cebiri ve μ, $\mathcal{A}$ üzerinde bir ölçü fonksiyonu olmak üzere $(X, \mathcal{A}, \mu)$ üçlüsüne bir **ölçü uzayı** denir.

Şimdi ölçü uzayının özelliklerini gösteren bazı teoremler verelim.

2.1. Teorem $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

Eğer $A, B \in \mathcal{A}$ ve $A \subset B$ ise $\mu(A) \leq \mu(B)$ dir. Ayrıca $\mu(A) < \infty$ ise

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$$

dır.

2.2. Teorem $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

a) (A_n), $\mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_n)$$

dir.

b) (B_n), $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

dir.

2.1. Sonuç $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun.

a) (A_n), $\mathcal{A}$ daki elemanların bir artan dizisi ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$$

dir.

b) (B_n), $\mathcal{A}$ daki elemanların bir azalan dizisi ve $\mu(B_1) < \infty$ ise

$$\mu(\lim_{n\to\infty} B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(B_n)$$

dir.

2.3. Teorem $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. (A_k), $\mathcal{A}$ ya ait kümelerin herhangi bir dizisi ise

$$\mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

dir.

2.1.3 Dış Ölçüler

2.5. Tanım X bir küme ve $P(X)$ de X in kuvvet kümesi olsun. $P(X)$ üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir μ^* fonksiyonu,

a) $\mu^*(\varnothing)=0$

b) Her $E\in P(X)$ için $\mu^*(E)\geq 0$

c) $A\subset B\subset X$ için $\mu^*(A)\leq \mu^*(B)$

d) Her bir $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\in P(X)$ ise $\mu^*(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mu^*(A_n)$

şartlarını sağlarsa μ^* fonksiyonuna X üzerinde bir **dış ölçüdür** denir.

2.1. Örnek X herhangi bir küme ve μ^* da $P(X)$ üzerinde

$$\mu^*(A)=\begin{cases}0, & A=\varnothing\, ise\\ 1, & A\neq\varnothing\, ise\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan μ^* fonksiyonu bir ölçü olmayıp dış ölçüdür.

2.1.4 Lebesgue Dış Ölçüsü ve Lebesgue Ölçüsü

Bilindiği gibi bir I aralığının $l(I)$ uzunluğu o aralığın uç noktalarının farkı olarak tanımlanır. Yani, $I=[a,b]$ (veya $(a,b),(a,b][a,b)$) aralığının boyu

$$l(I)=b-a$$

dır. Uzunluk küme fonksiyonuna bir örnektir. Bu durumda, uzunluğun tanım kümesi aralıklar koleksiyonu, değer kümesi de genişletilmiş reel sayılar kümesidir. Şimdi uzunluk kavramını aralıklardan daha karışık kümeler için tanımlayalım. Örneğin, bir açık kümenin uzunluğunu, bu kümeyi oluşturan açık, ayrık aralıkların uzunlukları toplamı olarak tanımlayalım.

Öyle bir λ fonksiyonu tanımlamak istiyoruz ki, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir $\mathfrak{M}$ sınıfı üzerinde tanımlı olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlasın:

i) λ, $\mathbb{R}$ nin her bir E altkümesi üzerinde tanımlı yani,

$$\mathfrak{M} = P(\mathbb{R}),$$

ii) Her bir I aralığı için $\lambda(I) = l(I)$,

iii) Eğer (E_n) bir ayrık dizi ve λ bunların her biri üzerinde tanımlı ise

$$\lambda(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(E_n),$$

iv) λ öteleme altında invaryant yani, λ fonksiyonu, E ve

$$E + y = \{x + y : x \in E\}$$

kümeleri üzerinde tanımlı olduğunda

$$\lambda(E + y) = \lambda(E)$$

olsun.

Bu dört özelliği sağlayan bir küme fonksiyonu tanımlamak mümkün değildir. Bu güne kadar ilk üç şartı sağlayan bir küme fonksiyonu bilinmemektedir. Bu nedenle bunlardan birinden vazgeçmek gerekmektedir.

Son üç şartı bırakıp ilk şartı değiştirmek oldukça faydalıdır. Burada yapılacak değişiklik λ fonksiyonunu tüm alt kümeler üzerinde tanımlamayıp daha dar bir $\sigma-$ cebiri üzerinde tanımlamaktır. Yani, $\mathfrak{M}$ olarak $P(\mathbb{R})$ kuvvet kümesini değil, üzerinde λ fonksiyonunu tanımlayabileceğimiz uygun bir $\sigma-$cebiri almaktır. Şimdi bu fonksiyonu inşa etmeye başlayalım.

2.2. Örnek (I_k), $\mathbb{R}$ nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi,

$$\tau_A = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup I_k\right\}$$

olsun. $P(\mathbb{R})$ üzerinde

$$\lambda^* = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k) : I_k \in \tau_A\right\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* bir dış ölçüdür. Bu dış ölçüye **Lebesgue dış ölçüsü** adı verilir.

Şimdi, Lebesgue dış ölçüsünün bazı özelliklerini verelim.

2.4. Teorem Lebesgue dış ölçüsü $\mathbb{R}$ nin her bir alt aralığına onun uzunluğunu karşılık getirir. Yani, $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık ise

$$\lambda^*(I) = l(I)$$

dir.

$\mathbb{R}^n$ deki bir I aralığı, $I_1, I_2, ..., I_n$ ler $\mathbb{R}$ nin alt aralıkları olmak üzere,

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n = \{(x_1, x_2, .., x_n) : x_i \in I_i, i = 1, 2, .., n\}$$

tipindedir. Bu I aralığının hacmi bu n aralığın uzunlukları çarpımı olarak tanımlanır ve $V(I)$ ile gösterilir. I_i aralıklarının hepsi açık ise I ya bir açık aralık, hepsi kapalı ise I ya bir kapalı aralık denir.

(I_k), $\mathbb{R}^n$ nin açık ve sınırlı alt aralıklarının bir dizisi ve

$$\tau_A{}^n = \left\{(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}$$

olsun.

$$\lambda^*(A)=\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty}V(I_k):I_k\in\tau_A{}^n\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\lambda*$ fonksiyonu (boyut gerekli olduğunda λ_n^* ile gösterilir) $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir dış ölçü olup $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü adını alır.

2.5. Teorem $\mathbb{R}^n$ üzerindeki Lebesgue dış ölçüsü her bir aralığa onun hacmini karşılık getirir.

2.2. Sonuç A sayılabilir bir küme ise $\lambda*(A)=0$ dır.

2.3. Sonuç $[0,1]$ kümesi sayılamayan bir kümedir.

Lebesgue ölçüsü $P(X)$ kuvvet kümesi üzerinde tanımlandığında sayılabilirdir ancak toplanabilir değildir. Dış ölçünün tanımlı olduğu kümelerin sınıfı daraltılarak bu sağlanabilir.

2.6. Tanım X bir küme ve $\mu*$ da X üzerinde bir dış ölçü olsun. Eğer, X in her bir A alt kümesi için

$$\mu*(\mathrm{A})=\mu*(A\cap E)+\mu*(A\cap E^c)$$

ise X in E alt kümesi $\mu*$**-ölçülebilir** ($\mu*$ ye göre ölçülebilir) denir.

$\mu*$ fonksiyonunun alt toplamsallık özelliği de denilen $\mu*(\bigcup A_k)\leq\sum\mu*(A_k)$ özelliğinden X in bütün E ve A alt kümeleri için

$$\mu*(\mathrm{A})\leq\mu*(A\cap E)+\mu*(A\cap E^c)$$

olacağından bir E kümesinin $\mu*$-ölçülebilir olup olmadığını anlamak için her bir $A\subset X$ için,

$$\mu*(\mathrm{A})\geq\mu*(A\cap E)+\mu*(A\cap E^c)$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterlidir.

Bir μ^* dış ölçüsüne göre ölçülebilen $A \subset X$ kümelerinin sınıfı $\mathfrak{M}(X, \mu^*)$ ile gösterilir. λ^* Lebesgue dış ölçüsüne göre ölçülebilen, $\mathbb{R}$ nin alt kümelerinin bir sınıfı kısaca $\mathfrak{M}$ ile gösterilir. $\mathfrak{M}$ nin bir cebir ve $\sigma-$cebiri olduğu açıktır.

Lebesgue dış ölçüsü olan λ^* ın, $\mathfrak{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$ sınıfına da $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ sınıfına da olan kısıtlanmasına **Lebesgue ölçüsü** denir ve λ ile gösterilir.

2.6. Teorem Her bir Borel kümesi λ^* ölçülebilirdir.

İspat. $\mathfrak{M}$ bir $\sigma-$cebiri ve $(a, +\infty) \in \mathfrak{M}$ olduğundan

$$(-\infty, a] = (a, +\infty)^c \in \mathfrak{M}$$

dır. Böylece her bir $(-\infty, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-\infty, b - \frac{1}{n})$ aralığı ölçülebilirdir. Şu halde, her bir $(a,b) = (-\infty, b) \cap (a, +\infty)$ açık aralığı $\mathfrak{M}$ ye aittir. (a,b) aralıklarını kapsayan $\sigma-$cebirlerinin en küçüğü $\mathfrak{B}(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\mathfrak{B}(\mathbb{R}) \subset \mathfrak{M}(\mathbb{R}, \lambda^*)$$

bulunur.

2.1.5 Ölçülebilir Fonksiyonlar

2.7. Tanım $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun.

$f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} .$$

2.2. Lemma $(X,\mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay olsun. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için aşağıdaki önermeler denktir.

a) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $A_\alpha = \{x \in X : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$

b) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $B_\alpha = \{x \in X : f(x) \leq \alpha\} \in \mathcal{A}$

c) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $C_\alpha = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A}$

d) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ için $D_\alpha = \{x \in X : f(x) < \alpha\} \in \mathcal{A}$

İspat. A_α ile B_α birbirlerinin tümleyeni olduğundan kümelerden biri $\mathcal{A}$ ya ait olduğunda diğeri de olur. Dolayısıyla, a) ile b) dektir. Benzer şekilde c) ile d) de denktir.

Şimdi, a) ile c) önermelerinin denk olduğunu gösterelim:

a) doğru olsun. Bu durumda, her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \left\{x \in X : f(x) > \alpha - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{A}$$

olur.

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_{\alpha-\frac{1}{n}} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f^{-1}(]\alpha - \frac{1}{n}, +\infty[) = f^{-1}(\bigcap_{n=1}^{\infty}]\alpha - \frac{1}{n}, +\infty[)$$

$$= f^{-1}(]\alpha, +\infty[) = \{x \in X : f(x) \geq \alpha\} = C_\alpha$$

olduğundan $C_\alpha \in \mathcal{A}$ olur. Bu durumda, $a) \Rightarrow c)$ dir.

Benzer şekilde, $A_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_{\alpha+\frac{1}{n}}$ olacağından $c) \Rightarrow a)$ olur. O halde, $a) \equiv c)$ dir.

2.3. Örnek Bir E kümesi için

$$\chi_E = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \notin E \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan χ_E fonksiyonuna E kümesinin **karakteristik fonksiyonu** denir. E ölçülebilir olduğunda χ_E fonksiyonu ölçülebilirdir. Gerçekten,

$$\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} = \begin{cases} x, & \alpha < 0 \\ E, & 0 \le \alpha < 1 \\ \varnothing, & 1 \le \alpha \end{cases}$$

olduğundan $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\{x \in X : \chi_E(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$ dır.

2.8. Tanım $(X, \mathcal{A})$ bir ölçülebilir uzay ve $A \in \mathcal{A}$ olsun.

$f : A \to [-\infty, +\infty]$ fonksiyonu ölçülebilirdir $\Leftrightarrow$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için

$$f^{-1}\big((\alpha, +\infty]\big) = \{x \in A : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A}$$

X üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli $\mathcal{A}-$ölçülebilir bütün fonksiyonların kümesi $\mathrm{M}(X, \mathcal{A})$ ile gösterilir. Eğer, $f \in \mathrm{M}(X, \mathcal{A})$ ise

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > n\}$$

$$B = \{x \in X : f(x) = -\infty\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) \le n\} = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X : f(x) > -n\} \right)^C$$

olacağından A ve B ölçülebilirdir.

2.7. Teorem Genişletilmiş reel değerli bir f fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart

$$A = \{x \in X : f(x) = +\infty\}, \quad B = \{x \in X : f(x) = -\infty\}$$

kümelerinin ölçülebilir ve

$$f_1(x)=\begin{cases} f(x), & x\notin A\cup B \\ 0, & x\in A\cup B \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan f_1 fonksiyonunun ölçülebilir olmasıdır.

2.9. Tanım $\mathfrak{B}(\mathbb{R}^k)$ Borel cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona **Borel ölçülebilir fonksiyon** veya **Borel fonksiyonu** adı verilir.

$\mathfrak{M}(\mathbb{R},\lambda^*)$ $\sigma-$cebirine göre ölçülebilen bir fonksiyona **Lebesgue ölçülebilir fonksiyon** denir.

$\mathbb{R}$ nin Borel kümesi olmayan fakat Lebesgue ölçülebilir alt kümeleri mevcut olduğundan, $\mathbb{R}$ de her bir Borel ölçülebilir fonksiyon Lebesgue ölçülebilirdir.

2.10. Tanım f, X den $\overline{\mathbb{R}}$ ye bir fonksiyon olsun.

$$f^+=\max\{f(x),0\}$$

$$f^-=\max\{-f(x),0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonları da X üzerinde tanımlı ve negatif olmayan fonksiyonlardır. f^+ fonksiyonuna f nin **pozitif parçası**, f^- fonksiyonuna da f nin **negatif parçası** adı verilir.

Bu tanım göz önüne alındığında,

$$f=f^+-f^-\ ,\ |f|=f^++f^-$$

$$f^+=\frac{1}{2}\left(|f|+f\right)\ ,\ f^-=\frac{1}{2}\left(|f|-f\right)$$

olacağı açıktır.

2.8. Teorem $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ fonksiyonunun ölçülebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının ölçülebilir olmasıdır.

2.1.6 İntegral

A) Basit Fonksiyonların İntegrali

2.11. Tanım Görüntü kümesi sonlu sayıda ve farklı elemanlardan oluşan

$$\varphi : X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonuna bir **basit fonksiyon** adı verilir. Burada görüntü kümesinin bu değerleri sonlu olmak zorundadır.

Bir reel değerli basit φ fonksiyonu $a_k \in \mathbb{R}$ ve χ_{E_k}, E_k kümesinin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} = a_1 \chi_{E_1} + a_2 \chi_{E_2} + \cdots + a_n \chi_{E_n} \qquad (2.1)$$

biçiminde yazılabilir. Eğer, φ fonksiyonu X üzerinde tanımlı ise $\bigcup_{k=1}^{n} E_k = X$ dır. Bu E_k kümelerinin seçimi tek olmadığından φ nin (2.1) tipindeki gösterimi tek değildir. Eğer, $a_1, a_2, ..., a_m$ sayıları φ nin X üzerinde aldığı farklı değerler ve

$$E_k = \{ x \in X : f(x) = a_k \}$$

seçilirse E_k kümeleri ayrık olur. Bu durumda,

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} a_k \chi_{E_k}$$

gösterimine φ fonksiyonunun **standart gösterimi** denir. X üzerinde tanımlı, reel değerli, $\mathcal{A}$ ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi $S = S(X,\mathcal{A})$, S deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi S^+ ile gösterilir.

2.12. Tanım $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı olsun. a_k lar negatif olmayan reel sayılar, $A_1, A_2, ..., A_n$ ler $\mathcal{A}$ ya ait ayrık kümeler olmak üzere,

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k = X$$

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{E_k} \tag{2.2}$$

gösterimine sahip bir $\varphi \in S^+$ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k) \tag{2.3}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Bu tanıma göre φ nin μ ölçüsüne göre integrali, ya negatif olmayan bir sayı ya da μ ölçüsünün sonlu olmayan bir ölçü olması haline karşılık gelen $+\infty$ değeridir.

B) Pozitif Fonksiyonların İntegrali

2.13. Tanım $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M^+(X,\mathcal{A})$ olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali

$$\int_X f d\mu = \sup\left\{ \int_X \varphi d\mu : \varphi \in S^+ \text{ ve } \varphi \le f \right\} \tag{2.4}$$

genişletilmiş reel sayısıdır. $E \in \mathcal{A}$ olsun. f nin μ ye göre E üzerindeki integrali,

$$\int_X f\,d\mu = \int_X f.\chi_E\,d\mu \tag{2.5}$$

sayısıdır.

2.9. Teorem $f,g \in M^+(X,\mathcal{A})$ ve $E,F \in \mathcal{A}$ olsun.

a) Her $x \in X$ için $f(x) \le g(x)$ ise $\int_X f\,d\mu \le \int_X g\,d\mu$ dir.

b) $E \subset F$ ise $\int_E f\,d\mu \le \int_F f\,d\mu$ dir.

2.10. Teorem (Monoton Yakınsaklık Teoremi) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X,\mathcal{A})$ daki fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. (f_n) dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise

$$\int_X f\,d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \tag{2.6}$$

dır.

İspat. (f_n) ölçülebilir fonksiyonların bir dizisi olduğundan f de ölçülebilirdir. $f_n \le f$ olacağından Teorem 2.9 (a) dan

$$\int_X f_n\,d\mu \le \lim_{n\to\infty} \int_X f\,d\mu$$

yazılabilir. Buradan da

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n\,d\mu \le \int_X f\,d\mu \tag{2.7}$$

bulunur. Şimdi bu eşitsizliğin tersini elde etmeye çalışacağız. $\alpha \in (0,1)$ ve φ de $0 \le \varphi \le f$ bağıntısını sağlayan bir ölçülebilir basit fonksiyon olsun.

$$A_n = \{x \in X : f_n(x) \ge \alpha\varphi(x)\}$$

denirse $A_n \in \mathcal{A}$ dır. (f_n) monoton artan olduğundan

$$A_n \subset A_{n+1} \text{ ve } \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = X$$

dir. Teorem 2.9 ‘a göre

$$\int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \int_{A_n} f_n d\mu \leq \int_X f_n d\mu$$

yazılabilir.

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = X$$

olacağından

$$\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} \alpha\varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \Rightarrow \alpha.\int_X \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

bulunur. Her $\alpha \in (0,1)$ için bu eşitsizlik sağlandığından

$$\int_X \varphi d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

olur. Bu kümenin tüm elemanları bir sayıdan büyük değilse, onun supremumu da o sayıdan büyük olamaz. O halde,

$$\int_X f d\mu \leq \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{2.8}$$

dir. (2.7) ve (2.8) den (2.6) elde edilir.

2.1. Not Monoton yakınsaklık teoremindeki dizinin artan olması şartı kaldırılamaz. (f_n) dizisinin monoton olmaması halinde ise nasıl bir bağıntının mevcut olduğunu aşağıdaki teorem ortaya koymaktadır.

2.11. Teorem (Fatou Lemması) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve (f_n) de $M^+(X,\mathcal{A})$ daki fonksiyonların bir dizisi ise

$$\int_X \liminf_{n\to\infty} f_n d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \tag{2.9}$$

dır.

2.12. Teorem (Beppo-Levi Teoremi) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $\sum f_k$ da X üzerinde tanımlı $[0,+\infty]$ değerli, ölçülebilir fonksiyonların bir serisi olsun. Bu takdirde,

$$\int_X \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k \right) d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_X f_k d\mu \right) \tag{2.10}$$

dır.

2.1.7 İntegrallenebilen Fonksiyonlar

2.14. Tanım $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M(X,\mathcal{A})$ olsun. Eğer $\int_X f^+ d\mu$ ve $\int_X f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f fonksiyonu X üzerinde μ ye göre **integrallenebilir**dir denir ve bu integral

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \tag{2.11}$$

reel sayısıdır. Eğer, $E \in \mathcal{A}$ ise f nin μ ye göre E üzerindeki integrali

$$\int_E f d\mu = \int_E f^+ d\mu - \int_E f^- d\mu \tag{2.12}$$

biçiminde tanımlanır. X üzerinde μ ölçüsüne göre integrallenebilen fonksiyonların sınıfı $\mathcal{L} = \mathcal{L}\ X, \mathcal{A}, \mu$ ile gösterilir.

Bu integral tanımında $X = \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A} = \mathfrak{B}(\mathbb{R}^n)$ ve $\mu = \lambda$ Lebesgue ölçüsü alınırsa elde edilen integrale **Lebesgue integrali** denir.

2.13. Teorem (Lebesgue İntegralinin Mutlak İntegrallenebilme Özelliği)

$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in M$ olsun. Bu takdirde,

$$f \in \mathcal{L} \iff |f| \in \mathcal{L}$$

dır ve bunların biri sağlandığında

$$\left| \int_X f d\mu \right| \leq \int_X |f| d\mu$$

olur.

İspat. İntegrallenebilme tanımından $f \in \mathcal{L}$ olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- fonksiyonlarının sonlu integrale sahip olmasıdır. $|f| = f^+ + f^-$ olduğundan $|f|$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart f^+ ve f^- nın integrallenebilir olmasıdır. Dolayısıyla, f nin integrallenebilmesi $|f|$ nin integrallenebilir olmasına denktir. f integrallenebilir olduğunda

$$\left| \int_X f d\mu \right| = \left| \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu \right| \leq \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu = \int_X |f| d\mu$$

bulunur.

2.15. Tanım $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. Eğer, bir önerme, ölçüsü sıfır olan bir küme veya kendisi A ya ait olmadığında, sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanan bir kümenin tümleyeni üzerinde doğru ise o önerme **hemen hemen her yerde doğrudur** denir. Hemen hemen her yerde deyimi kısaca h.h.y. biçiminde yazılır.

Bir $p(x)$ önermesinin doğru olmadığı x noktalarının kümesi, sıfır ölçülü bir küme veya sıfır ölçülü bir küme tarafından kapsanıyorsa, $p(x)$ önermesi hemen hemen her x için doğrudur denir.

2.4. Sonuç $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\mathcal{A}-$ölçülebilir olsun.

$$\int_X |f| d\mu = 0 \quad \Leftrightarrow \text{ hemen hemen her yerde } f = 0 \text{ dır.} \tag{2.13}$$

2.5. Sonuç $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to [-\infty,+\infty]$ fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir olsun. Bu takdirde hemen her $x \in X$ için $|f(x)| < +\infty$ dur.

2.14. Teorem $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı $f \in \mathcal{L}$ ve $g \in \mathrm{M}$ olsun.

$$|g| \le |f| \quad \Rightarrow \quad g \text{ integrallenebilirdir}$$

ve

$$\int_X |g| d\mu \le \int_X |f| d\mu \tag{2.14}$$

dır.

2.6. Sonuç $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve f ile g, X üzerinde ölçülebilir, $[-\infty,+\infty]$-değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer hemen hemen her x için $f(x) = g(x)$ ise $\int_X f d\mu$ ve $\int_X g d\mu$ integrallerinden birinin mevcut olması halinde diğeri de mevcuttur ve

$$\int_X f d\mu = \int_X g d\mu$$

dir.

2.7. Sonuç $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve $f \in \mathrm{M}$ olsun. f nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{L}$ de reel değerli ve hemen hemen her yerde f ye eşit bir fonksiyonun var olmasıdır.

2.15. Teorem (Lebesgue Yakınsaklık Teoremi) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı, $g: X \to [-\infty,+\infty]$ integrallenebilen bir fonksiyon ve f, f_1, f_2 … de X üzerinde $\mathcal{A}$ - ölçülebilir $[-\infty,+\infty]$- değerli fonksiyonlar olsunlar. Eğer, hemen hemen her x için

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (2.15)

b) $\forall n \in \mathrm{N}$ için $|f_n(x)| \le g(x)$ (2.16)

ise f ve f_n fonksiyonları integrallenebilirdir ve

$$\lim_{n\to\infty} \int_X f_n \, d\mu = \int_X f \, d\mu$$

dır.

2.8. Sonuç (Sınırlı Yakınsaklık Teoremi) $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n \in \mathcal{L}(\mathrm{X},\mathcal{A},\mu)$ olsun. (f_n) dizisi bir f fonksiyonuna hemen hemen yakınsak, hemen hemen her yerde $|f_n| \le K$ ve μ sonlu ise f integrallenebilirdir ve

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu \ .$$

2.9. Sonuç (f_n) ölçülebilir fonksiyonların monoton artan ve negatif olmayan bir dizisi olsun. Eğer, (f_n) hemen hemen her yerde sınırlı bir f fonksiyonuna yakınsak ve μ sonlu ise f integrallenebilirdir ve

$$\int_X f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int_X f_n d\mu$$

dır.

2.2 VEKTÖR UZAYLARI

2.16. Tanım $(X,\oplus)$ değişmeli grup, $(K,+,\cdot)$ bir cisim olsun.

$$\odot : K \times \mathrm{X} \to \mathrm{X},$$

$$\odot : (a,x) \to a \odot x$$

dış işlemi aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa, X e $(K,+,\cdot)$ cismi üzerinde **vektör uzayı** denir.

V1) $\forall a \in K$ ve $\forall x \in X$ için $a \odot x \in X$ dir.

V2) $\forall a,b \in K$ ve $\forall x,y \in X$ için $a \odot (x \oplus y) = (a \odot x) \oplus (a \odot y)$ dir.

V3) $\forall a,b \in K$ ve $\forall x \in X$ için $(a+b) \odot x = (a \odot x) \oplus (b \odot x)$ dir.

V4) $\forall a,b \in K$ ve $\forall x \in X$ için $(a \cdot b) \odot x = a \odot (b \odot x)$ dir.

V5) $1 \in K$ ve $\forall x \in X$ için $1 \odot x = x$ dir.

$(K,+,\cdot)$ cismi üstündeki X vektör uzayı $((X,\oplus),(K,+,\cdot),\odot)$ şeklinde gösterilir. Burada, eğer $K = \mathbb{R}$ ise X ’e **reel vektör uzayı**, $K = \mathbb{C}$ ise **kompleks vektör uzayı** adı verilir.

2.17. Tanım X bir vektör uzay ve $\varnothing \neq Y \subset X$ olsun. Y, X üzerindeki vektör uzayı işlemlerine göre bir vektör uzayı oluyorsa Y ye X in **alt vektör uzayı** denir.

2.16. Teorem X bir vektör uzay ve $\varnothing \neq Y \subset \mathrm{X}$ olsun. Şayet, her $y_1, y_2 \in Y$ ve $a,b \in K$ için, Y nin alt vektör uzay olması için gerek ve yeter şart $ay_1 + by_2 \in Y$ olmasıdır. $\{\theta\}$ ve X , X vektör uzayının aşikâr alt uzaylarıdır.

2.18. Tanım X bir vektör uzay ve $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{X}$ olsun. $a_1, a_2, ..., a_n \in K$ olmak üzere,

$$a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k$$

toplamına $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{X}$ vektörlerinin **lineer birleşimi** denir. $\varnothing \neq \mathrm{M} \subseteq \mathrm{X}$ ise M den alınan her sonlu sayıdaki vektörlerin lineer birleşimlerinin kümesine M nin **gereni** denir ve $Span\mathrm{M}$ ile gösterilir. $Span\mathrm{M}$, X in bir alt vektör uzayıdır ve bu uzaya M nin ürettiği alt uzay denir.

Örnek 2.4 $i)$ $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli, reel değerli fonksiyonların $C[a,b]$ kümesi üzerinde her $f_1, f_2 \in C[a,b]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için,

$$\left(f_1 + f_2\right)(x) = f_1(x) + f_2(x) \text{ ve } \left(\alpha f_1\right)(x) = \alpha f_1(x)$$

işlemlerine göre $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$ii)$ $r \geq 0$ bir doğal sayı olmak üzere $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı r-inci mertebeye kadar sürekli türevlenebilir fonksiyonların kümesi $C^{(r)}[a,b]$, $i)$ şıkkındaki vektör uzayı işlemlerine göre (ki bu işlemlere fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma işlemleri denir) $\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör uzayıdır.

$iii)$ $[a,b]$ aralığı üzerinde sınırlı tüm reel değerli fonksiyonların kümesi $B[a,b]$, $i)$ şıkkındaki işlemlere göre bir reel vektör uzayıdır.

$iv)$ $[a,b]$ aralığında integrallenebilen tüm fonksiyonların kümesi $R[a,b]$, $i)$ şıkkındaki işlemlere göre bir reel vektör uzayıdır.

2.2.1 Normlu Uzaylar

2.19. Tanım X, K cismi üzerinde bir vektör uzay olsun.

$$\|.\| : \mathrm{X} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$$

dönüşümü her $x, y \in \mathrm{X}$ ve her $\alpha \in K$ için,

$|N1|$ $\|x\| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \theta$,

$|N2|$ $\|\alpha x\| = |\alpha| . \|x\|$,

$|N3|$ $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlarsa bu dönüşüme X üzerinde bir **norm** ve $(\mathrm{X}, \|.\|)$ ikilisine de **normlu uzay** adı verilir. Buradaki $|N1|$, $|N2|$ ve $|N3|$ aksiyomlarına **norm aksiyomları** denir.

2.3. Lemma $(\mathrm{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay ve $x, y, x_1, x_2, ..., x_n \in \mathrm{X}$ olsun. Bu durumda,

a) $\big| \|x\| - \|y\| \big| \leq \|x - y\|$

b) $\left\| \sum_{k=1}^{n} x_k \right\| \leq \sum_{k=1}^{n} \|x_k\|$

dır.

2.20. Tanım $(\mathrm{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n), X de bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $n, m > n_\varepsilon$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

olacak şekilde ε a bağlı bir n_ε sayısı varsa (x_n) ye X de bir **Cauchy dizisi** denir.

2.17. Teorem a) Normlu uzayda bir yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir.

b) Normlu uzayda her Cauchy dizisi sınırlıdır.

c) (x_n) normlu uzayda bir Cauchy dizisi olsun. $(x_n) \to x_0$ ise (x_{n_k}), (x_n) dizisinin bir alt dizisi olmak üzere (x_{n_k}) dizisi de x_0 noktasına yakınsar.

d) (x_n) ve (y_n) bir normlu uzayda iki Cauchy dizisi ise $(x_n + y_n)$ de bir Cauchy dizisidir.

Özel olarak $\mathrm{X} = \mathbb{R}$ (veya $\mathrm{X} = \mathbb{C}$) olmak üzere, $\|x\| = |x|$ olarak tanımlanırsa $\mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) deki her Cauchy dizisi yakınsaktır. Ancak bu özellik herhangi bir norm için geçerli değildir.

2.2.2 Banach Uzayları

2.21. Tanım $(\mathrm{X}, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. X deki her Cauchy dizisi yakınsak ise o uzaya **Normlu Tam Uzay** veya **Banach Uzayı** denir.

2.4. Lemma Bir X normlu vektör uzayının tam olması için gerek ve yeter şart, normlu yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır.

2.6. Örnek $\mathrm{X} = \mathbb{R}^n$ (veya $\mathrm{X} = \mathbb{C}^n$) olmak üzere bu uzaylar,

$$\|x\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ ,$$

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \ 1 \le p < +\infty \ ,$$

$$\|x\|_\infty = \max\left\{ |x_i| : i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

normlarına göre birer Banach uzayıdır. Bu uzayları sırasıyla $\mathbb{R}_1^n = \left(\mathbb{R}^n; \|.\|_1\right)$, $\mathbb{R}_p^n = \left(\mathbb{R}^n; \|.\|_p\right)$ ve $\mathbb{R}_\infty^n = \left(\mathbb{R}^n; \|.\|_\infty\right)$ ile gösteririz.

2.7. Örnek $K = \mathbb{R}$ ve $K = \mathbb{C}$ olmak üzere $\left(C[a,b], K\right)$ vektör uzayı

$$\| f \|_\infty = \max\left\{ \left| f(x) \right| : x \in [a,b] \right\}$$

normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.8. Örnek $K = \mathbb{R}$ ve $K = \mathbb{C}$ olmak üzere $\left(C^{(r)}[a,b], K\right)$ vektör uzayı

$$\| f \|_{C^{(r)}[a,b]} = \sum_{i=0}^{r} \left\| f^{(i)} \right\|_{C[a,b]}$$

$\left(f^{(0)}(x) = f(x) \right)$ normuna göre bir Banach uzayıdır.

2.9. Örnek $K = \mathbb{R}$ ve $K = \mathbb{C}$ olmak üzere K daki $x = (x_n) = (x_1, x_2, ...)$ şeklindeki tüm dizilerin kümesi K^∞ olsun. Bu küme,

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n) \text{ ve } \alpha(x_n) = (\alpha x_n)$$

işlemlerine göre bir vektör uzaydır.

$$l_\infty = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : (x_n) \text{ sınırlı} \right\}$$

$$c = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : (x_n) \text{ yakınsak} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : \lim_{n \to \infty} x_n = 0 \right\}$$

$$l_p = \left\{ x = (x_n) \in K^\infty : \sum_{k=1}^{\infty} \left| x_i \right|^p \text{ yakınsak} \right\}$$

alt vektör uzaylarını ele alalım. l_∞, c ve c_0 uzayları,

$$\|x\| = \sup\{|x_i| : i \in \mathbb{N}\}$$

normuna, l_p $(1 \leq p < \infty)$ uzayı da

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_i|^p\right)^{1/p}$$

normuna göre birer Banach uzayıdır.

2.22. Tanım Bir X vektör uzayı üzerinde $\|.\|^{(1)}$ ve $\|.\|^{(2)}$ normları verilmiş olsun. Her $x \in \mathrm{X}$ için,

$$C_1 \|x\|^{(1)} \leq \|x\|^{(2)} \leq C_2 \|x\|^{(1)}$$

olacak şekilde C_1 ve C_2 pozitif sayıları varsa $\|.\|^{(1)}$ ve $\|.\|^{(2)}$ normlarına **denk normlar** denir.

2.18. Teorem Sonlu boyutlu vektör uzaylarda tanımlı tüm normlar birbirine denktir.

2.19. Teorem X bir vektör uzay, $\|.\|^{(1)}$ ve $\|.\|^{(2)}$ de X de birbirine denk olan iki norm olsun. Eğer X , $\|.\|^{(1)}$ normuna göre tam ise $\|.\|^{(2)}$ normuna göre de tamdır.

2.2.3 $L^p(\Omega)$ Uzayları

2.23. Tanım $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $0 < p < \infty$ olmak üzere,

$$\mathcal{L}^p = \left\{ f \in \mathrm{M}(\mathrm{X}, \mathcal{A}) : |f|^p \in \mathcal{L}(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu) \right\} \tag{2.17}$$

kümesine p **-inci kuvvetten integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı** denir.

Bu tanıma göre, $\mathcal{L}^1 = \mathcal{L}$ dir. Çünkü f nin integrallenebilir olması ile $|f|$ nin integrallenebilir olması aynı şeydir.

$$\bullet : K \times \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$$

$f \in \mathcal{L}^p$ ve $\alpha \in K$ için $\alpha f \in \mathcal{L}^p$ dir. Çünkü $|f|^p$ integrallenebilir olduğunda $|\alpha|^p . |f|^p$ de integrallenebilirdir. Dolayısıyla $|\alpha f|^p$ integrallenebilirdir. Ayrıca,

$$\oplus : \mathcal{L}^p \times \mathcal{L}^p \to \mathcal{L}^p$$

$f, g \in \mathcal{L}^p$ için $f + g \in \mathcal{L}^p$ dır. Gerçekten

$$|f+g|^p \leq \left(|f|+|g|\right)^p \leq \left(2.\max\{|f|,|g|\}\right)^p \leq 2^p\left(|f|^p + |g|^p\right)$$

olacağından $|f+g|^p$ integrallenebilir ve dolayısıyla $f+g \in \mathcal{L}^p$ olur. Şu halde, yukarıda tanımlanan skaler çarpma ve toplama işlemlerine göre $\mathcal{L}^p$ bir vektör uzaydır. Bu uzay üzerinde, $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \tag{2.18}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p : \mathcal{L}^p \to \mathbb{R}$ normuna göre $\mathcal{L}^p$ normlu uzayı bir Banach uzayıdır.

2.20. Teorem (Young Eşitsizliği)

$$\varphi : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$$

sürekli, kesin olarak artan ve $\lim_{u \to \infty} \varphi(u) = +\infty$ özelliklerine sahip bir fonksiyon ve $\varphi^{-1} = \psi$ olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için

$$\phi(x) = \int_0^x \varphi(u)du \ , \ \psi(x) = \int_0^x \psi(u)du$$

denirse, her $a,b \in [0,+\infty)$ için

$$a.b \leq \phi(a) + \psi(b) \tag{2.19}$$

dir. Eşitlik sadece $b = \varphi(a)$ olması halinde geçerlidir.

2.21. Teorem (Hölder Eşitsizliği) $p > 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olsun. $f \in \mathcal{L}^p$, $g \in \mathcal{L}^q$ ise $f.g \in \mathcal{L}^1$ dır ve

$$\| f.g \|_1 \leq \| f \|_p . \| g \|_q \tag{2.20}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.22. Teorem (Minkowski Eşitsizliği) $p \geq 1$, $f, g \in \mathcal{L}^p$ ise $f + g \in \mathcal{L}^p$ dir ve

$$\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p \tag{2.21}$$

eşitsizliği geçerlidir.

$\alpha \in \mathbb{R}$ olsun. $\| \alpha . f \|_p = \left(\int |\alpha f|^p d\mu \right)^{1/p} = |\alpha| . \| f \|_p$ dır.

$\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow \int | f |^p d\mu = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$ dır. O halde, $\mathcal{L}^p$ üzerinde tanımlanan $\| . \|_p$ fonksiyonu için,

a) $\| f \|_p = 0 \Leftrightarrow$ hemen hemen her yerde $f = 0$,

b) $\| \alpha . f \|_p = |\alpha| . \| f \|_p$,

c) $\| f + g \|_p \leq \| f \|_p + \| g \|_p$

özellikleri sağlanır ki bu $\| . \|_p$ fonksiyonunun $\mathcal{L}^p$ üzerinde bir yarı norm olduğunu gösterir. $\mathcal{L}^p$ üzerinde

$$f \approx g \iff \text{hemen hemen her yerde } f = g$$

biçiminde tanımlanan $\approx$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır. Dolayısıyla, bu bağıntı $\mathcal{L}^p$ uzayını denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıflarının kümesi $\mathrm{L^p}$ ile gösterilir. O halde $\mathrm{L^p}$ nin elemanları $[f]$ biçimindeki denklik sınıflarıdır. $\mathrm{L^p}$ uzayı,

$$[f]+[g]=[f+g]\ ,\ \lambda.[f]=[\lambda f]$$

şeklinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. $p \geq 1$ olmak üzere,

$$\|[f]\|_p = \|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

biçiminde tanımlanan $\|.\|_p$ fonksiyonu $\mathrm{L^p}$ üzerinde bir normdur.

Her ne kadar $\mathrm{L^p}$ nin elemanları denklik sınıfları ise de onları denklik sınıflarının temsilci elemanlarıyla göstermek mümkündür.

2.23. Teorem (Riesz-Fischer Teoremi) $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $1 \leq p < +\infty$ olsun. $\mathrm{L^p}(\mathrm{X}, \mathcal{A}, \mu)$ uzayı

$$\|f\|_p = \left(\int_X |f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

normu altında tamdır.

2.24. Teorem (İntegraller için Minkowski Eşitsizliği) $1 \leq p < \infty$ olsun. $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ üzerinde f nin ölçülebilir olduğunu yani, hemen hemen her $y \in \mathbb{R}^n$ için $f(\cdot, y) \in L^p(\mathbb{R}^m)$ ve bu $y \to \|f(\cdot, y)\|_{p,\mathbb{R}^m}$ fonksiyonunun $L^1(\mathbb{R}^n)$ ye ait olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $x \to \int_{\mathbb{R}^n} f(x, y)dy$ fonksiyonu $L^p(\mathbb{R}^m)$ ye aittir ve

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x,y)\,dy \right|^p dx \right)^{1/p} \le \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |f(x,y)|^p\,dx \right)^{1/p} dy$$

dır. Bu ise

$$\left\| \int_{\mathbb{R}^n} f(\cdot,y)\,dy \right\|_{p,\mathbb{R}^m} \le \int_{\mathbb{R}^n} \|f(\cdot,y)\|_{p,\mathbb{R}^m}\,dy$$

olması demektir.

2.2.4 $L^\infty(\Omega)$ Uzayları

Ω ölçülebilir kümesi üzerinde tanımlı olan ve u ölçülebilir fonksiyonu verilsin. ε ile ölçümü sıfır olan tüm $E \subset \Omega$ altkümeler sistemini gösterelim. $K : \varepsilon \to (-\infty, +\infty]$ küme fonksiyonunu

$$K(E) := \sup_{x \in \Omega/E} u(x)$$

eşitliği ile tanımlayalım (bazı E kümeleri için $K(E) := +\infty$ da olabilir). Eğer en az bir $E \subset \Omega$ için $K(E)$ sonlu ise, o halde $K(E)$ küme fonksiyonunun ε üzerinde minimum değerini aldığı ispat edilebilir. Bu durumda, $\min\limits_{E \in \varepsilon} K(E)$ sayısına u fonksiyonunun **esaslı maksimumu** denir ve $vrai \max\limits_{t \in \Omega} u(t)$ ile gösterilir:

$$vrai \max_{t \in \Omega} u(t) := \min_{E \in \varepsilon} \{ \sup_{x \in \Omega/E} \{u(x)\} : E \subset \Omega \text{ sıfır ölçümlü kümedir} \}.$$

Eğer $vrai \max\limits_{\Omega} |u(t)| < +\infty$ ise u fonksiyonuna esaslı sınırlı fonksiyon denir. Ω üzerinde esaslı sınırlı olan u fonksiyonlarının vektör uzayı $L^\infty(\Omega)$ ile gösterilir. Ayrıca,

$$\|u\|_{\infty} = ess\sup_{x\in\Omega}|u(x)|$$

ile tanımlanan $\|u\|_{\infty}$ fonksiyonelinin $L^{\infty}(\Omega)$ üzerinde bir norm olduğu kolayca kontrol edilebilir. Bunun yanı sıra, Hölder Eşitsizliği ve özelliklerini $p=1, q=\infty$ ve $p=\infty, q=1$ durumlarını kapsayacak şekilde genişletebiliriz.

2.25. Teorem (İnterpolasyon Eşitsizliği) $1\le p<q<r$ olsun, böylece $0<\theta<1$ şartını sağlayan herhangi θ için

$$\frac{1}{q} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{r}$$

dir. Eğer, $u\in L^{p}(\Omega)\cap L^{r}(\Omega)$ ise bu durumda $u\in L^{q}(\Omega)$ dır ve

$$\|u\|_{q} \le \|u\|_{p}^{\theta}.\|u\|_{r}^{1-\theta}$$

eşitsizliği sağlanır.

2.26. Teorem ($L^{p}(\Omega)$ Uzayları için Gömülme Teoremi) $vol(\Omega)=\int_{\Omega} 1dx<\infty$ ve $1\le p\le q\le\infty$ olduğunu kabul edelim. Eğer $u\in L^{q}(\Omega)$ ise bu durumda $u\in L^{p}(\Omega)$ ve

$$\|u\|_{p} \le \left(vol(\Omega)\right)^{(1/p)-(1/q)}\|u\|_{q}$$

dır. Bu nedenle,

$$L^{q}(\Omega)\to L^{p}(\Omega)$$

olur. Eğer $u\in L^{\infty}(\Omega)$ ise bu durumda

$$\lim_{p\to\infty}\|u\|_{p} = \|u\|_{\infty}$$

dır. Son olarak, eğer $1 \leq p < \infty$ için $u \in L^p(\Omega)$ ise ve burada her p için

$$\|u\|_p \leq K$$

olacak şekilde bir K sabiti varsa bu durumda, $u \in L^\infty(\Omega)$ ve

$$\|u\|_\infty \leq K$$

olur.

2.10. Sonuç $1 \leq p \leq \infty$ ve herhangi bir Ω bölgesi için

$$L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$$

dır.

2.2.5 İç Çarpım ve Hilbert Uzayı

2.24. Tanım $K = \mathbb{C}$ olmak üzere X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer,

$$< \cdot > : \mathrm{X} \times \mathrm{X} \to \mathrm{K}$$

fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa bu fonksiyona X üzerinde bir **iç çarpım** ve X ‘e **iç çarpım uzayı (ÖnHilbert uzayı)** denir.

i_1 : Her $x \in \mathrm{X}$ için, $< x, x > \geq 0$ ve $< x, x > = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ dır.

i_2 : Her $x, y \in \mathrm{X}$ için, $< x, y > = \overline{< y, x >}$ dır.

i_3 : Her $x, y \in \mathrm{X}$ ve $\alpha \in \mathrm{K}$ için, $< \alpha x, y > = \alpha < x, y >$ dır.

i_4 : Her $x, y, z \in \mathrm{X}$ için, $< x + y, z > = < x, z > + < y, z >$ dır.

i_3 ve i_4 şartları 1. değişkene göre iç çarpım fonksiyonunun lineer olduğunu gösterir. İç çarpımın yukarıdaki şartlarından aşağıdakiler yazılabilir.

a) $K=\mathbb{R}$ ise $<x,y>=<y,x>$ dir.

b) $<\alpha x+\beta y,z>=\alpha<x,z>+\beta<y,z>$ dir.

c) $<x,\alpha y>=\bar{\alpha}<x,y>$ dir.

d) $<x,\alpha y+\beta z>=\bar{\alpha}<x,y>+\bar{\beta}<x,z>$ dir.

d) şıkkı iç çarpım fonksiyonunun 2. değişkene göre eşlenik lineer olduğunu gösterir.

2.10. Örnek $x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$) olmak üzere,

$$<x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k \text{ (veya } <x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_k\bar{y}_k \text{)}$$

olarak tanımlanırsa $<\cdot>$, $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$) de bir iç çarpım ve $\mathbb{R}^n$(veya $\mathbb{C}^n$) bir iç çarpım uzayıdır.

2.11. Örnek $f,g\in\left(C[a,b],K\right)$ ($K=\mathbb{R}$ veya $K=\mathbb{C}$) olmak üzere,

$$<f,g>=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlanırsa $<\cdot>$ bir iç çarpım ve dolayısıyla $\left(C[a,b],K\right)$ da bir iç çarpım uzayıdır.

2.27. Teorem (Cauchy-Schwartz Eşitsizliği) $(\mathrm{X},<\cdot>)$ bir iç çarpım uzayı olsun. Bu durumda, her $x,y\in\mathrm{X}$ için,

$$|<x,y>|^2\leq<x,x>\cdot<y,y>$$

dir.

$\left(\mathrm{X},<\cdot>\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $x\in\mathrm{X}$ olsun. $x\in\mathrm{X}$ vektörünün normu,

$$\|x\|=<x,x>^{1/2}=\sqrt{<x,x>} \tag{2.22}$$

olarak tanımlanır. Bu tanımın norm aksiyomlarını sağladığı gösterilebilir. O halde, $\left(\mathrm{X},<.>\right)$ iç çarpım uzayı (2.22) tanımıyla birlikte bir normlu uzay oluşturur. Buna bağlı olarak Cauchy-Schwartz eşitsizliği,

$$|<x,y>|^2\leq<x,x>\cdot<y,y>\;\Rightarrow\;|<x,y>|\leq\sqrt{<x,x>}.\sqrt{<y,y>}=\|x\|.\|y\|$$

olarak yazılır.

2.5. Lemma $\left(\mathrm{X},<\cdot>\right)$ bir iç çarpım uzayı ve $\|x\|=\sqrt{<x,x>}$ olsun. Bu durumda, her $x,y\in\mathrm{X}$ için,

a) $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$ (Paralelkenar Kuralı)

ve

b) $<x,y>=\dfrac{1}{4}\left[\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2\right]$(Kutupsal Özdeşlik)

eşitlikleri sağlanır.

2.28. Teorem $\left(\mathrm{X},<\cdot>\right)$ bir normlu uzay olsun. Bu uzayın bir iç çarpım uzayı olması için gerek ve yeter şart her $x,y\in\mathrm{X}$ elemanlarının paralelkenar kuralını sağlamasıdır.

2.12. Örnek $\mathbb{R}^n$ vektör uzayı üzerindeki $<x,y>=\sum_{k=1}^{n}x_k y_k$ çarpımıyla $\mathbb{R}^n$ bir iç çarpım uzayıdır. Bu uzay üzerindeki $\|.\|_p$, $1\leq p<+\infty$ normunu düşünelim. $\|.\|_p$ normunun iç çarpım yardımıyla tanımlanabilmesi için paralelkenar kuralını sağlaması gerekir. $\mathbb{R}^n$, $\|.\|_2$ normu ile paralelkenar kuralını sağlarken $p\neq 2$ için $\|.\|_p$

normu ile paralelkenar kuralını sağlamaz. Yukarıdaki teoremden dolayı $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2\right)$ bir iç çarpım uzayı iken $\left(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p\right)$ $p \neq 2$ bir iç çarpım uzayı değildir. Gerçekten, $x = (1,1,0,0,...,0)$, $y = (1,-1,0,0,...,0) \in \mathbb{R}^n$ olmak üzere,

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

olduğu hatırlanırsa,

$$\|x\|_p = 2^{1/p} = \|y\|_p$$

ve

$$x + y = (2,0,0,...,0) \Rightarrow \|x+y\|_p = (2^p)^{1/p} = 2\,,$$

$$x - y = (0,2,0,...,0) \Rightarrow \|x-y\|_p = (2^p)^{1/p} = 2$$

olup

$$\|x+y\|_p^2 + \|x-y\|_p^2 = 4 + 4 = 8 \qquad (2.23)$$

$$2\left(\|x\|_p^2 + \|y\|_p^2\right) = 2\left(2^{2/p} + 2^{2/p}\right) = 4.2^{2/p} \qquad (2.24)$$

(2.23) $\neq$ (2.24) dır.

2.25. Tanım (Hilbert Uzayı) $\left(X, <\cdot>\right)$ iç çarpım uzayı $\|x\| = \sqrt{<x,x>}$ normuna göre (iç çarpım yardımıyla tanımlanan norm metriğine göre) tam ise bu iç çarpım uzayına **Hilbert Uzayı** denir.

2.13. Örnek $\mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$), her $x, y \in \mathbb{R}^n$ (veya $\mathbb{C}^n$) için;

$$<x,y> = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k \quad (\text{veya } <x,y> = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}\,)$$

iç çarpımı ve

$$\|x\|_2 = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{1/2}$$

normuna göre bir Hilbert uzayıdır.

2.14. Örnek $<\cdot> : l_2 \times l_2 \to \mathrm{K}$, $<x, y> = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y_k}$

fonksiyonu l_2 üzerinde bir iç çarpım ve l_2 bir Hilbert uzayıdır.

2.15. Örnek $\left(C[a,b], \|.\|_\infty \right)$ normlu uzayı bir Hilbert uzayı değildir. Çünkü

$$\| f \|_\infty = \max \left\{ | f(x) | : x \in [a,b] \right\}$$

olarak tanımlanan $\|.\|_\infty$ normu iç çarpım yardımıyla tanımlanamaz. Bunu göstermek için, seçilen iki özel fonksiyon için paralelkenar kuralının sağlanmadığını görmek yeter. Bu durumda, $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 1$ ve $g(x) = \dfrac{x-a}{b-a}$ $(a < b)$ olarak alalım.

$$\| f \|_\infty = \max \left\{ | f(x) | : x \in [a,b] \right\} = 1$$

$$\| g \|_\infty = \max \left\{ | g(x) | : x \in [a,b] \right\} = 1$$

ve

$$\left(f + g \right)(x) = f(x) + g(x) = 1 + \frac{x-a}{b-a} \ ,$$

$$\left(f - g \right)(x) = f(x) - g(x) = 1 - \frac{x-a}{b-a}$$

olup

$$\| f+g \|_{\infty} = 2 \text{ ve } \| f-g \|_{\infty} = 1$$

dir. Buna göre,

$$\| f+g \|_{\infty}^2 + \| f-g \|_{\infty}^2 = 4+1=5$$

$$2\left(\| f \|_{\infty}^2 + \| g \|_{\infty}^2 \right) = 2(1+1) = 4$$

dir. Buna ek olarak, $C[a,b]$ vektör uzayı üzerinde,

$$\| f \|_{L^p} = \left(\int_a^b | f(x) |^p \, dx \right)^{1/p}$$

normuna göre $C[a,b]$ tam değildir. Özel olarak; $p=2$ için,

$$\| f \|_{L^2} = \left(\int_a^b | f(x) |^2 \, dx \right)^{1/2}$$

olarak tanımlanırsa $C[a,b]$ yine Banach uzayı değildir. $C[a,b]$ üzerinde

$$< f, g > = \int_a^b f(x) \overline{g(x)} dx$$

ve

$$\| f \|_{L^2}^2 = < f, f >$$

olarak tanımlanırsa $C[a,b]$ bir iç çarpım uzayıdır. Ancak, Hilbert uzayı değildir. Her normlu uzay tamlanabilir teoremi gereği $\left(C[a,b], \|.\|_{L^2} \right)$ uzayı tamlanabilir. Bu uzayın tamlaması $\left(L^2, \|.\|_{L^2} \right)$ ile gösterilir ve L^2 bir Hilbert uzayıdır.

2.11. Sonuç $L^2(\Omega)$ uzayı,

$$< f, g > = \int_{\Omega} f(x)\overline{g(x)}dx$$

iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayıdır. $L^2(\Omega)$ uzayı için Hölder eşitsizliği

$$|< f, g >| \leq \|f\|_2 \|g\|_2$$

şeklinde bilinen Schwartz eşitsizliğidir.

2.2.6 Zayıf Türevler ve Sobolev Uzayları

Sobolev uzayları, elemanları $\mathbb{R}^n$ n- boyutlu Öklid uzayı üzerinde tanımlanmış fonksiyonların ve onların bazı kısmi türevlerini ve bazı integrallenebilme şartlarını karşıladığı bir vektör uzayıdır. Bu uzayların ve onlar arasındaki dönüşümlerin izahı ve geliştirilmesi amacıyla reel ve fonksiyonel analizin ve genel topolojinin bazı mekanizmaları gerekir. Bu amaçla önemli gördüğümüz bazı tanım ve teoremleri bu kısımda vermeye çalışacağız ([1], [2], [22], [43], [45]).

A) Lokal Lebesgue Uzayları

Ölçülebilen ve her kompakt $K \subset \Omega$ kümesi için,

$$\int_K |f|^p \, dx < \infty \tag{2.25}$$

şartını sağlayan fonksiyonların uzayı $L^p_{loc}(\Omega)$ ile gösterilir. Örneğin $\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu $L^1_{loc}\big((0,1)\big)$ uzayının elemanı olup $L^1\big((0,1)\big)$ veya $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ uzayına ait değildir. Her $1 \le p \le \infty$ için

$$L^p(\Omega) \subset L^p_{loc}(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega) \tag{2.26}$$

dir. $L^1_{loc}(\Omega)$ integrallenebilir fonksiyonların en geniş uzayıdır.

2.26. Tanım $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ bir küme olsun.

$$\varphi : \Omega \to \mathbb{C}$$

şeklinde tanımlanan φ fonksiyonu kompakt desteğe sahip ve her mertebeden türevlenebilir ise bu fonksiyona **test fonksiyonu** denir. Test fonksiyonlarının kümesi

$$D(\Omega) = \left\{ \varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{C}) : \operatorname{supp}(\varphi) := \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} \subset \Omega \text{ kompakttır} \right\}$$

şeklinde gösterilir. Burada $\operatorname{supp}(\varphi)$ ile φ nin desteği (support) ifade edilmektedir.

2.16. Örnek $\mathbb{R}^n$ üzerinde

$$\varphi(x) = \begin{cases} c.e^{((|x|^2-1)^{-1})}, & |x| < 1 \\ 0 \qquad\qquad , & |x| \ge 1 \end{cases}$$

fonksiyonu bir test fonksiyonudur.

2.6. Lemma $1 \le p < \infty$ için $D(\Omega)$ test fonksiyonlarının uzayı $L^p(\Omega)$ da yoğundur. Yani, $\overline{\big(D(\Omega)\big)} = L^p(\Omega)$ dir.

2.27. Tanım V ve W , aynı $\mathbb{F}$ skaler cismi üzerinde vektör uzayları olsun. Bir

$$T : V \to W$$

fonksiyonu her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha T(x)+\beta T(y)$$

özelliğini sağlarsa veya buna denk olarak her $\alpha \in \mathbb{F}$ ve $x, y \in V$ için

$$T(x+y)=T(x)+T(y) \text{ ve } T(\alpha x)=\alpha T(x)$$

özelliğini sağlarsa T ye bir **lineer dönüşüm** adı verilir. Burada, $W=\mathbb{F}$ ise o zaman T ye bir **lineer fonksiyonel** denir.

2.28. Tanım (Genelleştirilmiş Fonksiyon)

$$u: D(\Omega) \to \mathbb{C}$$

bir lineer fonksiyonel olmak üzere eğer, u lineer fonksiyoneli $D(\Omega)$ üzerinde

$$n \to \infty \text{ iken } \varphi_n \to \varphi \text{ olduğunda } u(\varphi_n) \to u(\varphi)$$

şartını sağlıyorsa süreklidir denir. Böyle lineer fonksiyonellere genelleştirilmiş fonksiyon adı verilir ve genelleştirilmiş fonksiyonların lineer uzayı $D'(\Omega)$ ile gösterilir.

2.29. Tanım (Lokal İntegrallenebilir Fonksiyonlar) Ω üzerinde hemen hemen her yerde tanımlanmış ve Ω da her $U \subset \Omega$ için $u \in L^1(U)$ şeklinde bir u fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir. Bu durumda, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ yazılır. Her $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonuna karşılık gelen burada bir $T_u \in D'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonu vardır ve

$$T_u(\phi)=\int_\Omega u(x)\phi(x)dx, \quad \phi(x) \in D(\Omega) \tag{2.27}$$

şeklinde tanımlanır. Açık bir şekilde, böyle tanımlanmış bir T_u genelleştirilmiş fonksiyonu, $D(\Omega)$ üzerinde bir lineer fonksiyoneldir. Gerçekten, $D(\Omega)$ üzerinde

$\phi_j \to \phi$ olsun. Bu takdirde, burada bir $K \subset \Omega$ vardır öyle ki her j için $\operatorname{supp}\left(\phi_j - \phi\right) \subset K$ dır. Böylece,

$$\left|T_u(\phi_j) - T_u(\phi)\right| \leq \sup_{x \in K} \left|\phi_j(x) - \phi(x)\right| \int_K \left|u(x)\right| dx$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafı $j \to \infty$ iken sıfıra yakınsadığından K üzerinde $\phi_j \to \phi$ olduğu görülür.

Her $T \in D'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonu, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ için (2.27) de tanımlandığı gibi T_u formunda değildir. Gerçekten, eğer $0 \in \Omega$ ise Ω üzerinde lokal integrallenebilir bir fonksiyon olmayan öyle ki her $\phi \in D(\Omega)$ için

$$\int_\Omega \delta(x)\phi(x)dx = \phi(0)$$

şeklinde bir δ fonksiyoneli söz konusu olabilir. Bununla birlikte, $D(\Omega)$ üzerinde

$$\delta(\phi) = \phi(0) \tag{2.28}$$

şeklinde tanımlanmış δ lineer fonksiyonelinin sürekli ve dolayısıyla Ω üzerinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olduğu kolayca görülebilir.

2.30. Tanım Lokal integrallenebilir bir fonksiyonla türetilmiş genelleştirilmiş fonksiyona **regüler genelleştirilmiş fonksiyon**, aksi bir durumda ise **singüler genelleştirilmiş fonksiyon** denir.

2.31. Tanım (Genelleştirilmiş Fonksiyonun Türevi) $u \in C^1(\Omega)$ ve $\phi \in D(\Omega)$ olsun. ϕ, Ω nın bazı kompakt altkümeleri dışında yok olduğundan, x_j değişkenine göre kısmi integral alınırsa

$$\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial x_j} u(x)\right)\phi(x)dx = -\int_\Omega u(x)\left(\frac{\partial}{\partial x_j}\phi(x)\right)dx$$

eşitliği elde edilir.

Benzer şekilde, eğer $u \in C^{|\alpha|}(\Omega)$ ise bu takdirde $|\alpha|$ kez kısmi integrasyon ile

$$\int_{\Omega} (D^{\alpha}u(x))\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_{\Omega} u(x)D^{\alpha}\phi(x)dx$$

yazılır. Buradan hareketle bir $T \in D'(\Omega)$ genelleştirilmiş fonksiyonun $D^{\alpha}T$ türev tanımı

$$(D^{\alpha}T)(\phi) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi) \tag{2.29}$$

şeklinde elde edilir.

$\phi \in D(\Omega)$ için $D^{\alpha}\phi \in D(\Omega)$ olduğundan $D^{\alpha}T$, $D(\Omega)$ üzerinde bir fonksiyoneldir ve lineer olduğu kolayca görülebilir. Eğer bu fonksiyonun sürekli olduğu gösterilirse Ω üzerinde bir genelleştirilmiş fonksiyon olur. Bunun için, $D(\Omega)$ üzerinde $\phi_j \to \phi$ olduğunu kabul edelim. Bu takdirde, bazı $K \subset \Omega$ için

$$\operatorname{supp}\left(D^{\alpha}(\phi_j - \phi)\right) \subset \operatorname{supp}\left(\phi_j - \phi\right) \subset K$$

dır. Ayrıca, her çoklu index β için $j \to \infty$ iken

$$D^{\beta}\left(D^{\alpha}(\phi_j - \phi)\right) \subset D^{\alpha+\beta}(\phi_j - \phi)$$

K üzerinde düzgün olarak sıfıra yakınsar. Bundan dolayı, $D(\Omega)$ üzerinde $D^{\alpha}\phi_j \to D^{\alpha}\phi$ olup $T \in D'(\Omega)$ olduğundan $\mathbb{C}$ de

$$D^{\alpha}T(\phi_j) = (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi_j) \to (-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi) = D^{\alpha}T(\phi)$$

yazılabilir. Böylece, $D^{\alpha}T \in D'(\Omega)$ olur. (2.29) tanımı $D'(\Omega)$ daki her genelleştirilmiş fonksiyonun, $D'(\Omega)$ da her mertebeden türevlere sahip olduğunu gösterir. Ayrıca, K üzerinde $j \to \infty$ için

$$D^{\beta}(D^{\alpha}(\phi_j-\phi))=D^{\alpha+\beta}(\phi_j-\phi)\to 0$$

dır. Böylece $D(\Omega)$ üzerinde

$$D^{\alpha}\phi_j\to D\phi$$

olur. $T\in D'(\Omega)$ olduğundan $\mathbb{C}$ de,

$$D^{\alpha}T_j(\phi)=(-1)^{|\alpha|}T_j(D^{\alpha}\phi)\to(-1)^{|\alpha|}T(D^{\alpha}\phi)=D^{\alpha}T(\phi)$$

olur ki bu da $D^{\alpha}T\in D'(\Omega)$ olması demektir.

2.17. Örnek $\delta\in D'(\Omega)$ fonksiyonu, (2.28) de tanımlanan Dirac genelleştirilmiş fonksiyonu olmak üzere, $0\in\Omega$ için $D^{\alpha}\delta$ türevi

$$D^{\alpha}\delta(\phi)=(-1)^{|\alpha|}D^{\alpha}\phi(0)$$

şeklindedir.

2.18. Örnek $\Omega=\mathbb{R}$ ve $H\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$ olmak üzere

$$H(x)=\begin{cases}1, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış Heaviside fonksiyonunun T_H genelleştirilmiş fonksiyonuna karşılık gelen $(T_H)'$ türevi δ dır. Bunu görmek için, $\phi\in D(\mathbb{R})$, $[-a,a]$ aralığında desteğe sahip olsun. Bu durumda,

$$(T_H)'(\phi)=-T_H(\phi)=-\int_0^a\phi'(x)dx=\phi(0)=\delta(\phi)$$

olduğu görülür.

2.32. Tanım $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu takdirde, her $\varphi \in C_c^\infty(\Omega)$ için

$$\int_\Omega g(x).\varphi(x)dx = (-1)^{|\alpha|}\int_\Omega f(x)\varphi^{(\alpha)}(x)dx \tag{2.30}$$

şartını sağlayacak şekilde bir $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ fonksiyonu var ise bu fonksiyona f nin **zayıf türevi (genelleştirilmiş türevi)** denir ve $D^\alpha f = g$ şeklinde gösterilir.

2.19. Örnek $n=1$, $\Omega = [-1,1]$ ve $f(x) = 1-|x|$ olsun. Bu durumda, $D^1 f$ zayıf türevi vardır ve

$$g := \begin{cases} 1, & x<0 \\ -1, & x>0 \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Bunu göstermek için, $[-1,1]$ aralığını f nin düzgün olduğu iki aralığa bölelim ve kısmi integrasyon kullanalım:

$$\int_{-1}^{1} f(x)\varphi'(x)dx = \int_{-1}^{0} f(x)\varphi'(x)dx + \int_{0}^{1} f(x)\varphi'(x)dx$$

$$= f\,\varphi\Big|_{-1}^{0} - \int_{-1}^{0}(+1)\varphi(x)dx + f\,\varphi\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1}(-1)\varphi(x)dx$$

$$= -\int_{-1}^{1} f(x)\varphi(x)dx + f(0-)\varphi(0-) - f(0+)\varphi(0+)$$

$$= -\int_{-1}^{1} g(x)\varphi(x)dx$$

dir. Çünkü f, 0 da süreklidir.

2.33. Tanım (Sobolev Uzayı) [45]. k pozitif bir sayı, $1 \leq p \leq \infty$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi olsun. $0 \leq |\alpha| \leq k$ mertebeden bütün zayıf kısmi türevleri $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ olan ve $f : \Omega \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarından oluşan $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayı,

$$W_p^k(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) : \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq k \Rightarrow D^\alpha f \in L^p(\Omega) \right\}$$

şeklinde ifade edilir. Burada türevler için $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ ve $|\alpha| = \sum_1^n \alpha_i$ olmak üzere

$$D^\alpha f = \frac{\partial^{|\alpha|} f}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_n} x_n}$$

notasyonu kullanılır.

$W_p^k(\Omega)$ üzerindeki norm $1 \leq p \leq \infty$ için,

$$\| f \|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega |D^\alpha f|^p dx \right)^{1/p} \tag{2.31}$$

şeklinde, $p = \infty$ için ise

$$\| f \|_{W_\infty^k(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}} |D^\alpha f| \right\} \tag{2.32}$$

şeklinde tanımlanır. $p = 2$ hali karesel integrallenebilir fonksiyonlara karşılık gelip $W_2^k(\Omega) = H^k(\Omega)$ ile gösterilir ve $H^k(\Omega)$ üzerindeki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle_{H^k(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq k} \int_\Omega \partial^\alpha f \partial^\alpha g dx \tag{2.33}$$

şeklinde tanımlanır. Yukarıdaki $k-$yıncı mertebeden genelleştirilmiş türeve sahip f fonksiyonunun Sobolev uzaylarında normu daha sade olarak

$$\| f \|_{W_p^k(\Omega)} = \left(\sum_{j=0}^{k} \int_a^b \left| f^{(k)} \right|^p dx \right)^{1/p}$$

$$= \left(\left| f \right|^p \right)^{1/p} + \left(\left| f' \right|^p \right)^{1/p} + \left(\left| f'' \right|^p \right)^{1/p} + \cdots + \left(\left| f^{(k)} \right|^p \right)^{1/p}$$

şeklinde gösterilebilir.

Şimdi, Ω nın sınırında sıfır olan fonksiyonların Sobolev uzayını tanımlayalım.

2.7. Lemma $W_p^k(\Omega)$ uzayı

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)} = \begin{cases} \left[\sum_{0 \le |\alpha| \le k} \left\| D^\alpha u \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right]^{1/p}, & 1 \le p < +\infty \\ \max_{0 \le |\alpha| \le k} \left\| D^\alpha u \right\|_{L^\infty(\Omega)}, & p = +\infty \end{cases}$$

normuyla birlikte bir Banach uzayıdır. $p \in (1, +\infty)$ için bu uzay düzgün konveks ve yansımalı uzaydır. $H^k(\Omega)$ uzayı

$$< u, v > = \sum_{0 \le |\alpha| \le k} \left(D^\alpha u, D^\alpha v \right)_{L^2(\Omega)}$$

iç çarpımıyla birlikte bir Hilbert uzayıdır.

2.34. Tanım (Sobolev Uzayların Direkt toplamı)

$k \ge 0$ sayısı ve $q > 1$ reel sayısı için Sobolev uzayların $W_q^k(-1,0) \dot{+} W_q^k(0,1)$ direkt toplamı,

$$\|u\|_{q,k} = \|u\|_{W_q^k(-1,0)} + \|u\|_{W_q^k(0,1)}$$

normu ile sırasıyla, $(-1,0)$ ve $(0,1)$ aralıkları üzerinde $W_q^k(-1,0)$ ve $W_q^k(0,1)$ e ait olan $[-1,0) \cup (0,1]$ aralığında tanımlanmış $u = u(x)$ kompleks değerli fonksiyonların Banach uzayı olarak tanımlanır.

2.35. Tanım $C_c^{\infty}(\Omega)$ uzayının $W_p^k(\Omega)$ normuna göre kapanışı $\bar{W}_p^k(\Omega) = \overline{C_c^{\infty}(\Omega)}$ ile gösterilir. Bu uzay çoğu kez Ω nın $\partial\Omega$ sınırında $k-1$ inci mertebeye kadar türevleri sıfır olan $W_p^k(\Omega)$ fonksiyonlarının uzayı olarak tanımlanır.

Negatif dereceli Sobolev uzayları duallik kavramında kullanılır.

2.36. Tanım k pozitif bir sayı, $1 \le p \le \infty$ ve p', p nin Hölder eşleniği olsun. W_p^{-k} Sobolev uzayı $\bar{W}_p^k$ uzayının dual uzayıdır. Yani, $f \in W_p^{-k}$ dönüşümü

$$f : \bar{W}_{p'}^k \to \mathbb{R}, \; f : u \to < f, u > \tag{2.34}$$

sürekli lineer bir dönüşümdür. $f \in W_p^{-k}$ üzerindeki norm

$$\| f \|_{W_p^{-k}(\Omega)} = \sup_{\substack{u \in \bar{W}_{p'}^k \\ u \neq 0}} \frac{< f, u >}{\|u\|} \tag{2.35}$$

ile tanımlanır.

B) Sobolev Uzaylarının Bazı Özellikleri

$C(\bar{\Omega})$ ile Ω bölgesinde düzgün sürekli fonksiyonların uzayını, $C_0(\mathbb{R}^n)$ ile $x \to \infty$ için sıfıra giden $\mathbb{R}^n$ deki fonksiyonların uzayını temsil edelim. Vereceğimiz teoremlerde iki tür bölge ele alınacaktır. $\Omega = \mathbb{R}^n$ ve Ω, $\mathbb{R}^n$ nin $\partial\Omega$ sınırına sahip düzgün, sınırlı ve açık bir alt kümesi. Ayrıca, k pozitif bir tamsayı ve $1 \le p \le \infty$ olarak alınacaktır.

2.29. Teorem (Yoğunluk) $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayı $W_p^k\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayında yoğundur. Ω, $\mathbb{R}^n$ nin açık bir alt kümesi ise $C_c^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)$ uzayı $\bar{W}_p^k(\Omega)$ uzayında yoğundur. Ayrıca, Ω düzgün bir bölge ise $C^\infty\left(\bar{\Omega}\right)$ uzayı $W_p^k(\Omega)$ uzayında yoğundur.

Sobolev uzaylarının en önemli özellikleri, bir fonksiyonun türevlerinin integrallenebilme özelliğinden o fonksiyonun sürekliliği veya integrallenebilemesini açıklayan gömülme teoremleri ile verilir.

2.30. Teorem (Gömülme) Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölge, $p<n$ ve $p*$, p nin Sobolev eşleniği yani, $\dfrac{1}{p*}=\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{n}$ olsun.

a) $u\in W_p^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise $u\in L^{p*}\left(\mathbb{R}^n\right)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L_{p*}\left(\mathbb{R}^n\right)}\le C\|\nabla u\|_{L_p\left(\mathbb{R}^n\right)} \tag{2.36}$$

olacak şekilde $C=C(p,n)$ vardır.

b) $u\in W_p^1(\Omega)$ ve $1\le q\le p*$ ise $u\in L^q(\Omega)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^q(\Omega)}\le C\|\nabla u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{2.37}$$

olacak şekilde $C=C(p,n,\Omega)$ vardır.

2.31. Teorem (Gömülme) Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölge ve $n<p<\infty$ olsun.

a) $u\in W_p^1\left(\mathbb{R}^n\right)$ ise $u\in C_0\left(\mathbb{R}^n\right)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^\infty\left(\mathbb{R}^n\right)}\le C\|\nabla u\|_{L^p\left(\mathbb{R}^n\right)} \tag{2.38}$$

olacak şekilde $C = C(p,n)$ vardır.

b) $u \in W_p^1(\Omega)$ ve $1 \le q \le p*$ ise $u \in L_q(\Omega)$ olur. Yani,

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \le C\|u\|_{W_p^1(\Omega)} \tag{2.39}$$

olacak şekilde $C = C(p,\Omega)$ vardır.

c) $kp > n$ iken $u \in W_p^{k+r}(\Omega)$ ise $u \in C^r(\bar{\Omega})$ olur.

Genel olarak, türevleri düzgün sınırlı olan fonksiyonların kümesi kompakttır. Bu prensibin Sobolev uzayları ile ilgili olan versiyonu Rellich-Kondrachov teoremi olup $W_p^k(\Omega)$ Sobolev uzayının $q < p*$ için $L^q(\Omega)$ uzayına kompakt olarak gömüldüğünü ifade eder. Ω bölgesinin sınırlılığı ve q nun Sobolev eşleniği olan $p*$ dan kesin küçük olması kompaktlık için esastır. $q = p*$ için gömülme süreklidir fakat kompakt değildir.

2.32. Teorem (Rellich-Kondrachov) Ω, $\mathbb{R}^n$ de düzgün, sınırlı, açık bir bölge olsun.

a) $1 \le p \le n$ ve $1 \le q \le p*$ ise $W_p^1(\Omega)$ uzayındaki kümeler $L^q(\Omega)$ uzayında prekompakttır.

b) $p > n$ ise $W_p^1(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $C(\bar{\Omega})$ uzayında prekompakttır.

c) $kp < n$ ve $1 \le q < np/(n-kp)$ ise $W_p^k(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $L^q(\Omega)$ uzayında prekompakttır.

d) $kp > n$ ise $W_p^k(\Omega)$ uzayındaki sınırlı kümeler $C(\bar{\Omega})$ uzayında prekompakttır.

Genel bir $u \in L^p(\Omega)$ fonksiyonu için $u|_{\partial\Omega}$ sınır değerini atamanın anlamı yoktur. Düzgün bir bölgenin $\partial\Omega$ sınırının ölçümü sıfırdır ve L^p uzayındaki fonksiyonlar sıfır ölçümlü kümede farklı değerler alabilen denk fonksiyonlardır. Bu durum Sobolev uzayları için farklıdır. $u \in W_p^k(\Omega)$ ise $k-1/p$. mertebeden küçük veya eşit mertebeden türevler için sınır değeri atanabilir. Bununla birlikte k. mertebeden türevler sadece L^p fonksiyonları oldukları için bu türevler de sınır değerleri tanımlamazlar.

2.33. Teorem (İz) $u \in W_p^1(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ ise $\gamma u = u|_{\partial\Omega}$ olacak şekilde,

$$\gamma : W_p^1(\Omega) \to W_p^{1-1/p}(\partial\Omega)$$

üzerine sınırlı lineer dönüşümü vardır.

2.34. Teorem (Poincare) Ω, sınırlı bir bölge olmak üzere her $u \in \bar{W}_p^1$ fonksiyonu için

$$\|u\|_{L^p} = C\|\nabla u\|_{L^p} \tag{2.40}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Poincare eşitsizliği sıfırdan farklı sabit fonksiyonlar için geçersiz olacağından W_p^1 uzayı değil $\bar{W}_p^1$ uzayı alınmalıdır. Bu değerlendirmenin yararlı bir sonucu $\|\nabla u\|_{L^p}$ normunun $\bar{W}_p^1(\Omega)$ üzerinde denk bir norm tanımlamasıdır. $p=2$ olduğunda $H_0^1(\Omega)$ üzerinde bir iç çarpım olarak

$$< u, v >= \int_{\Omega} \nabla u(x).\nabla v(x) dx \tag{2.41}$$

iç çarpımını alabiliriz.

2.2.7 İnterpolasyon Uzayları

X_0 ve X_1 reel veya kompleks iki Banach uzayı olsun. $X_0 = X_1$ olması demek X_0 ve X_1 nin aynı elemanlara ve eşdeğer normlara sahip olmalarıdır. $X_1 \subset X_0$ ile ise X_1 in X_0 da sürekli gömülebilir ifade edilmektedir. Ayrıca, aşağıda $K = \mathbb{R}$ veya $K = \mathbb{C}$ alınacaktır ([9], [26], [41], [43]).

2.37. Tanım X_0 ve X_1, K üzerinde Banach uzayları olmak üzere, eğer burada $X_0, X_1 \subset Z$ gömülmeleri sürekli olacak şekilde bir Z Hausdorff topolojik vektör uzayı varsa bu durumda (X_0, X_1) çiftine bir **interpolasyon çifti** denir.

2.8. Lemma (X_0, X_1), Banach uzayların bir interpolasyon çifti olmak üzere $X_0 \cap X_1$,

$$\|x\|_{X_0 \cap X_1} = \max\left(\|x\|_{X_0}, \|x\|_{X_1}\right),\ x \in X_0 \cap X_1$$

normuyla birlikte ve $X_0 + X_1$,

$$\|x\|_{X_0 + X_1} = \inf_{x = x_0 + x_1, x_0 \in X_0, x_1 \in X_1} \left(\|x_0\|_{X_0} + \|x_1\|_{X_1}\right),\ x \in X_0 + X_1$$

normuyla birlikte Banach uzayıdırlar.

2.2. Not $j = 0,1$ için $T \in \mathcal{L}\left(X_j, Y_j\right)$ olmak üzere

$$T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$$

lineer operatörünün X_j uzayına kısıtlanışı $T|_{X_j}$ de lineer bir operatördür.

2.38. Tanım (X_0, X_1) ve (Y_0, Y_1) Banach uzayların bir interpolasyon çifti ve X, Y Banach uzayları olsun.

i. Eğer $X_0 \bigcap X_1 \subset X \subset X_0 + X_1$ gömülmeleri sürekli X 'e ise $\left(X_0, X_1\right)$ 'e göre bir **ara (intermediate) uzay** denir.

ii. X ve Y, sırasıyla $\left(X_0, X_1\right)$ ve $\left(Y_0, Y_1\right)$ 'e göre birer ara uzayı iseler, X ve Y, $\left(X_0, X_1\right)$ ve $\left(Y_0, Y_1\right)$ 'e göre **interpolasyon uzayları** olarak adlandırılır. Bu durumda, her $T : X_0 + X_1 \to Y_0 + Y_1$ lineer operatörü için

$$T \in \mathcal{L}\left(X_j, Y_j\right),\ j = 0,1 \ \Rightarrow T\big|_X \in \mathcal{L}\left(X, Y\right)$$

dir.

iii. $X = Y$ ve $\left(X_0, X_1\right) = \left(Y_0, Y_1\right)$ için önceki şartlar sağlanırsa X 'e $\left(X_0, X_1\right)$ 'e göre bir **interpolasyon uzayı** denir.

2.35. Teorem $\left(X_0, X_1\right)$ ve $\left(Y_0, Y_1\right)$ birer interpolasyon çifti olsun. Eğer, $T \in L\left(X_0, X_1\right) \bigcap L\left(Y_0, Y_1\right)$ ise bu durumda, her $\theta \in (0,1)$ ve $p \in [1, \infty]$ için, $T \in L\Big(\left(X_0, Y_0\right)_{\theta,p}, L\left(X_1, Y_1\right)_{\theta,p}\Big) \bigcap L\Big(\left(X_0, Y_0\right)_{\theta}, L\left(X_1, Y_1\right)_{\theta}\Big)$ dır. Ayrıca,

$$\|T\|_{L\left(\left(X_0,Y_0\right)_{\theta,p},\left(X_1,Y_1\right)_{\theta,p}\right)} \le \left(\|T\|_{L\left(X_0,Y_0\right)}\right)^{1-\theta} \left(\|T\|_{L\left(X_1,Y_1\right)}\right)^{\theta} \tag{2.42}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Bu teoremin önemli bir sonucu olarak aşağıdaki sonuç verilebilir.

2.12. Sonuç $\left(X, Y\right)$ bir interpolasyon çifti olsun. $0 < \theta < 1$, $1 \le p \le \infty$ için

$$\|y\|_{\left(X,Y\right)_{\theta,p}} \le c(\theta, p) \|y\|_X^{1-\theta} \|y\|_Y^{\theta}\ ,\ \forall y \in X \bigcap Y$$

olacak şekilde bir $c(\theta, p)$ sayısı vardır.

2.20. Örnek *i*) $0<\alpha<1,\ k\in\mathbb{N}_0$ ve

$$C^0(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}\ \text{sürekli ve sınırlı}\right\}$$

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|$$

$$C^k(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}\ \text{k-defa sürekli türevlenebilir: } \partial_x^\alpha f\in C^0(\mathbb{R}^n),\ \forall|\alpha|\le k\right\}$$

$$\|f\|_{C^k(\mathbb{R}^n)}=\sup_{|\alpha|\le k}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial_x^\alpha f(x)\right|$$

$$C^\alpha(\mathbb{R}^n)=\left\{f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{K}:\ \|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}<\infty\right\}$$

$$\|f\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}=\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|+\sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,\,x\ne y}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

olsun. Bu durumda, $C^\alpha(\mathbb{R}^n)$ uzayı, $C^0(\mathbb{R}^n)$ ve $C^1(\mathbb{R}^n)$ uzaylarının bir ara uzayıdır. Daha açık olarak, her $f\in C^1(\mathbb{R}^n)$ için bir $C>0$ sayısı bulunabilir öyle ki

$$\|T\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^n)}\le C\|T\|_{C^0(\mathbb{R}^n)}^{1-\alpha}\|T\|_{C^1(\mathbb{R}^n)}^{\alpha}$$

dır.

ii) $1\le p\le\infty$ için $L^p(U,\mu)$, (U,μ) ölçü uzayı üzerindeki klasik Lebesgue uzayını göstersin. Bu durumda, $\dfrac{1}{p}=\dfrac{1-\theta}{p_0}+\dfrac{\theta}{p_1}$ şartını sağlayan her $1\le p_0,p_1,p\le\infty$ ve bazı $\theta\in[0,1]$ için $L^p(U,\mu)$ uzayı, $L^{p_0}(U,\mu)$ ve $L^{p_1}(U,\mu)$ uzaylarının bir ara uzayıdır. Bu, genelleştirilmiş Hölder eşitsizliğinden, yani her $f\in L^{p_0}(U,\mu)\cap L^{p_1}(U,\mu)$ için

$$\|f\|_{L^p(U,\mu)}\le\|f\|_{L^{p_0}(U,\mu)}^{1-\theta}\|f\|_{L^{p_1}(U,\mu)}^{\theta}$$

den elde edilebilir.

2.13. Sonuç Son iki eşitsizlik, $Y_j = K$ seçimi ile (2.42) eşitsizliğinin özel bir durumudur. Aşağıdaki teorem ikinci örnekteki $L^p(U,\mu)$ uzayının $\left(L^{p_0}(U,\mu), L^{p_1}(U,\mu)\right)$ 'e göre bir tam interpolasyon uzayı olduğunu gösterir.

2.36. Teorem (Riesz-Thorin İnterpolasyon Teoremi)

$1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, $\theta \in [0,1]$; (U,μ) ve (V,ν) σ-sonlu ölçü uzayları ve $K \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olmak üzere,

$$T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,\nu)\right), \; j = 0,1 \;\Rightarrow\; T\big|_{L^p(U,\mu)} \in \mathcal{L}\left(L^p(U,\mu), L^q(V,\nu)\right)$$

dır. Bunun yanı sıra, her $T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,\nu)\right)$, $j = 0,1$ için

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p, L^q)} \le \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_0}, L^{q_0})}^{1-\theta} \|T\|_{\mathcal{L}(L^{p_1}, L^{q_1})}^{\theta}$$

eşitsizliği sağlanır.

Riesz-Thorin interpolasyon teoreminin uygulanamadığı bazı durumlarda aşağıdaki teorem uygulanabilir.

2.37. Teorem (Marcinkiewicz İnterpolasyon Teoremi)

$1 \le p_0, p_1, q_0, q_1 \le \infty$, $q_0 = q_1$; $\theta \in (0,1)$; (U,μ) ve (V,ν) ölçü uzayları olsun. Ayrıca,

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}$$

olsun ve $p \le q$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,\nu)\right),\ j=0,1 \ \Rightarrow\ T\big|_{L^p(U,\mu)} \in \mathcal{L}\left(L^p(U,\mu), L^q(V,\nu)\right)$$

dir. Üstelik, her $T \in \mathcal{L}\left(L^{p_j}(U,\mu), L^{q_j}(V,\nu)\right),\ j=0,1$ için

$$\|T\|_{\mathcal{L}(L^p,L^q)} \le C_\theta \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_0},L^{q_0}_*)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(L^{p_1},L^{q_1}_*)}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir C_θ sayısı vardır. Burada, $L^q_*(V,\nu)$; $t>0$ için $m(t;f)=\nu\left(\{x \in V : |f(x)|>t\}\right)$, f nin genelleştirilmiş fonksiyonunu göstermek üzere eğer $1 \le q < \infty$ ise

$$L^q_*(V,\nu) = \left\{ f : V \to \mathbb{K} \text{ ölçülebilir } m(t;f) \le \frac{C}{t^q} \text{ her } t>0 \text{ ve herhangi } C>0 \text{ için} \right\}$$

şeklinde tanımlanan zayıf L^q- uzayıdır. Ayrıca, $q=\infty$ ise bu durumda,

$$L^\infty_*(V,\nu) = L^\infty(V,\nu)$$

olur. Dikkat edilirse, $L^q_*(V,\nu)$,

$$\|f\|_{L^q_*} = \sup_{t>0} t m(t;f)^{1/q}$$

kuazinormuyla birlikte bir kuazinormlu uzayıdır.

Burada bir X vektör uzayı üzerindeki bir $\|\cdot\|$ kuazinormu, bir normun sağladığı bütün özellikleri sağlar; bir farkla, her $x,y \in X$ için ve bir $C \ge 1$ sayısı için üçgen eşitsizliği

$$\|x+y\| \le C\left(\|x\|+\|y\|\right)$$

eşitsizliği ile değiştirilir.

2.14. Sonuç $L^q_*(V,\nu)$ notasyonu yerine $L^{q,\infty}(V,\nu)$ notasyonu da kullanılmaktadır.

A) Reel İnterpolasyon Metodu

Burada $\left(X_0, X_1\right)$, Banach uzayların bir interpolasyon uzayı olarak ele alınacaktır.

2.38. Tanım (K-Metot) $t>0$ için, $x \in X_0+X_1$ olmak üzere,

$$K(t,x) \equiv K\left(t,x;X_0,X_1\right)=\inf_{x=x_0+x_1,\, x_0\in X_0,\, x_1\in X_1}\left(\left\|x_0\right\|_{X_0}+t\left\|x_1\right\|_{X_1}\right)$$

dir.

2.9. Lemma Her $x \in X_0+X_1$ için $t \mapsto K(t,x)$ dönüşümü negatif olmayan, artan ve konkavdır. Ayrıca, $t,s>0$ için

$$K(t,x) \leq \max\left(1,\frac{t}{s}\right)K(s,x)$$

eşitsizliği sağlanır.

2.40. Tanım $\theta \in (0,1)$, $1 \leq p \leq \infty$ için $\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p}$ reel interpolasyon uzayı,

$$\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p} := \left\{x \in X_0+X_1 :\ \Phi_{\theta,p}\left(K(\cdot,x)\right)<\infty\right\}$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$\Phi_{\theta,p}\left(K(\cdot,x)\right)=\left\|t^{-\theta}K(t,x)\right\|_{L^p\left((0,\infty),\frac{dt}{t}\right)}$$

$$=\begin{cases}\left(\displaystyle\int_0^\infty\left(t^{-\theta}K(t,x)\right)^p\frac{dt}{t}\right)^{1/p} & ,1\leq p<\infty\\ \displaystyle\sup_{t>0} t^{-\theta}K(t,x) & ,p=\infty\end{cases}$$

dir. $\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p}$ reel interpolasyon uzayının normu,

$$\|x\|_{\theta,p} := \Phi_{\theta,p}\left(K(\cdot,x)\right)$$

ile verilir. Ayrıca, $\theta \in (0,1)$ için (X_0, X_1) interpolasyon uzayının sürekli interpolasyon uzayı,

$$(X_0, X_1)_\theta := \left\{x \in (X_0, X_1)_{\theta,\infty} : \lim_{t\to 0} t^{-\theta} K(t,x) = \lim_{t\to\infty} t^{-\theta} K(t,x) = 0\right\}$$

ile gösterilir.

2.14. Sonuç *i*) $\|\cdot\|_{\theta,p}$ 'nun gerçekten bir norm ve $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ 'nin $X_0 + X_1$ 'in bir lineer alt uzayı olduğu gösterilebilir. Ayrıca $(X_0, X_1)_\theta$, $(X_0, X_1)_{\theta,\infty}$ uzayının kapalı bir alt uzayıdır.

ii) Herhangi $a, \alpha \neq 0$ ve integrallenebilen f fonksiyonu için

$$\int_0^\infty f(at)\frac{dt}{t} = \int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}, \quad \int_0^\infty f(t^\alpha)\frac{dt}{t} = \frac{1}{|\alpha|}\int_0^\infty f(t)\frac{dt}{t}$$

“$\frac{dt}{t}$” ‘ye göre integralin önemli özelliklerindendir.

2.38. Teorem $1 \leq p \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$ olmak üzere (X_0, X_1), (Y_0, Y_1) Banach uzayların interpolasyon çiftleri olsunlar. Bu durumda $(X_0, X_1)_{\theta,p}$ ve $(Y_0, Y_1)_{\theta,p}$, (X_0, X_1) ve (Y_0, Y_1) ‘e göre tam interpolasyon uzaylarıdırlar. Ayrıca, $(X_0, X_1)_\theta$ ve $(Y_0, Y_1)_\theta$, (X_0, X_1) ve (Y_0, Y_1) ‘e göre tam interpolasyon uzaylarıdırlar.

Bu teoremin bir sonucu olarak aşağıdaki Lemma verilebilir.

2.10. Lemma $1 \leq p_1 \leq p_2 \leq \infty$, $\theta \in (0,1)$ olsun. Bu durumda

$$X_0 \cap X_1 \subset (X_0, X_1)_{\theta,p_1} \subset (X_0, X_1)_{\theta,p_2} \subset X_0 + X_1 \tag{2.43}$$

gömülmeleri süreklidir. Ayrıca, $1 \le p < \infty$ için $\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p} \subset \left(X_0, X_1\right)_{\theta}$ dir. Özel olarak $\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p}$ ve $\left(X_0, X_1\right)_{\theta}$, $\left(X_0, X_1\right)$ 'e göre ara uzayıdırlar.

2.11. Lemma Teorem 2.38 deki kabullerin sağlandığını varsayalım ve $X = \left(X_0, X_1\right)_{\theta,p}$, $Y = \left(Y_0, Y_1\right)_{\theta,p}$ olsun. Bu durumda her $T \in \mathcal{L}\left(X_j, Y_j\right),\ j = 0,1$ için

$$T \in \mathcal{L}\left(X_j, Y_j\right),\ j = 0,1 \ \Rightarrow\ T\big|_X \in \mathcal{L}\left(X, Y\right)$$

dır ve

$$\|T\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \le \|T\|^{1-\theta}_{\mathcal{L}(X_0,Y_0)} \|T\|^{\theta}_{\mathcal{L}(X_1,Y_1)}$$

eşitsizliği sağlanır. Benzer ifadenin $X = \left(X_0, X_1\right)_{\theta}$ ve $Y = \left(Y_0, Y_1\right)_{\theta}$ uzayları için de doğru olduğu görülebilir.

2.12. Lemma Herhangi $\theta \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ için $\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p}$ ve $\left(X_0, X_1\right)_{\theta}$ normlu uzayları tamdır.

2.3. Not *i*) $K\left(t, x; X_0, X_1\right) = tK\left(t^{-1}, x; X_1, X_0\right)$ olduğundan her $\theta \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ için

$$\left(X_0, X_1\right)_{\theta,p} = \left(X_1, X_0\right)_{1-\theta,p},\ \left(X_0, X_1\right)_{\theta} = \left(X_1, X_0\right)_{1-\theta}$$

dır.

ii) Eğer $X_1 \subset X_0$ gömülmesi sürekli ise bu durumda $K\left(t, x\right) \le \|x\|_{X_0}$ ve bu nedenle $\theta \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ 'a bağlı olarak herhangi $c_{\theta,p}, C_{\theta,p} > 0$ sabitleri için

$$c_{\theta,p} \|x\|_{\theta,p} \le \|x\|_{X_0} + \left\|t^{-\theta} K\left(t, x; X_0, X_1\right)\right\|_{L^p\left((0,1);\frac{dt}{t}\right)} \le C_{\theta,p} \|x\|_{\theta,p}$$

eşitsizliği sağlanır.

$iii)$ Her $\theta \in (0,1)$, $1 \le p \le \infty$ için eş değer normlarla $(X_0, X_0)_{\theta,p} = X_0$ yazabiliriz. Daha kesin olarak, θ ve p ye bağlı olarak herhangi $c_{\theta,p}, C_{\theta,p} > 0$ sabitleri için

$$c_{\theta,p} \|x\|_{\theta,p} \le \|x\|_{X_0} \le C_{\theta,p} \|x\|_{\theta,p}$$

eşitsizliği geçerlidir.

2.13. Lemma $X_1 \subset X_0$ gömülmesi sürekli olsun. Bu durumda, her $0 < \theta_1 < \theta_2 < 1$ için

$$(X_0, X_1)_{\theta_2,\infty} \subset (X_1, X_0)_{\theta_1,1}$$

yazabiliriz.

Hatırlanırsa, eğer $1 \le p \le \infty$ ve $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ bir bölge ise bu durumda

$$W_p^1(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega) : \nabla f \in L^p(\Omega) \right\}$$

$$\| f \|_{W_p^1(\Omega)} = \| f \|_{L^p(\Omega)} + \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$$

dır. Burada $\nabla f\left(\partial x_1 f, \ldots, \partial x_n f\right)$, f nin zayıf veya genelleştirilmiş türevlerini gösterir.

2.21. Örnek Her $0 < \theta < 1$ ve $1 \le p < \infty$ için eş değer normlarla

$$\left(C(\mathbb{R}^n), C^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,\infty} = C^\theta(\mathbb{R}^n),$$

$$\left(C(\mathbb{R}^n), C^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta} = h^\theta(\mathbb{R}^n),$$

$$\left(L^p(\mathbb{R}^n), W_p^1(\mathbb{R}^n)\right)_{\theta,p} = W_p^\theta(\mathbb{R}^n)$$

yazılır. Burada $h^\theta(\mathbb{R}^n)$, $C^\theta(\mathbb{R}^n)$ üzerindeki normla donatılmış

$$h^{\theta}(\mathbb{R}^n)=\left\{ f\in C^{\theta}(\mathbb{R}^n):\ \lim_{R\to 0^+}\ \sup_{x,y\in\mathbb{R}^n,0<|x-y|\le R}\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^{\theta}}=0\right\}$$

şeklinde tanımlanan küçük Hölder uzayıdır. Ayrıca, $W_p^{\theta}(\mathbb{R}^n)$,

$$W_p^{\theta}(\mathbb{R}^n)=\left\{ f\in L^p(\mathbb{R}^n):[f]_{W_p^{\theta}(\mathbb{R}^n)}<\infty\right\}$$

$$[f]_{W_p^{\theta}(\mathbb{R}^n)}=\left(\int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\frac{|f(x)-f(y)|^p}{|x-y|^{\theta p+n}}\,d(x,y)\right)^{1/p}$$

şeklinde tanımlanan Sobolev-Slobodetskii uzayıdır.

3. BAZI OPERATÖRLER VE ÖZELLİKLERİ

Uygulamalı matematiğin temel birçok probleminde lineerliğin özellikleri paylaşılır. Lineer operatörler ve lineer uzaylar bu problemlerin analizi için kurulan sistemleri genel olarak sağlarlar. Daha karmaşık uygulamalar lineer olmayan operatörlere yol açar. Lineer olmayan operatörlerin analizi için kullanılan araçlar ise ayrıca yeni bir çalışma alanının ortaya çıkmasına sebep olur.

Lineer operatörler, genellikle çözülmüş problemlerin veya en uygun hale getirilmiş fonksiyonların oluşturduğu matematiksel problemleri açıklamak için kullanılır. Bir matematiksel problemin teorik çözümünü incelemek için problemin çözümünde gerekecek operatörlerin özellikleri hakkında fikir sahibi olmalıyız. Bu doğrultuda burada lineer olmayan operatörlere çok değinmeyip lineer operatörler üzerine bazı temel sonuçları gözden geçireceğiz [2], [23], [30], [43].

3.1. Tanım X ve Y boş olmayan kümeler ve $D \subseteq X$ olsun. D deki her bir elemana Y de bir tek eleman karşılık getiren kurala D den Y ye bir **dönüşüm** denir. X ve Y den en az biri vektör uzayı ise bu dönüşüme genellikle **operatör** denir. Eğer A, D den Y ye bir operatör ise

$$A : D \subseteq X \to Y$$

yazılır. Bu tanımda geçen D ‘ye A nın **tanım kümesi** denir ve $D(A)$ ile gösterilir.

$$R(A) = \{ y \in Y \mid y = A(x), x \in D(A) \}$$

kümesine de A operatörünün **değer(veya görüntü) kümesi** denir. A operatörünün yaptığı işlem,

$$A : D(A) \subset X \to R(A) \subset Y$$

veya $A : X \to Y$ şeklinde gösterilir. Tanıma dikkat edilirse $D(A) \neq X$ veya $R(A) \neq Y$ olabilir.

3.2. Tanım $A: X \to Y$ operatörü, $E \subset X$ ve $F \subset Y$ alt kümeleri verilmiş olsun.

$$A(E) = \{A(x) \mid x \in E\}$$

kümesine E nin **görüntüsü** ve

$$A^{-1}(F) = \{x \in X \mid A(x) \in F\}$$

kümesine de F nin **ters görüntüsü** denir.

3.3. Tanım $A, B: X \to Y$ operatörleri verilsin. Eğer $D(A) = D(B) = D$ ve her $x \in D$ için $A(x) = B(x)$ ise A ve B operatörleri **eşittir** denir ve $A = B$ yazılır. Eğer $D(A) \subset D(B)$ ve her $x \in D(A)$ için $A(x) = B(x)$ ise A operatörüne B nin kısıtlaması denir ve $A = B|_{D(A)}$ ile gösterilir.

3.4. Tanım $A: X \to Y$ bir operatör ve $b \in Y$ olmak üzere her $x \in X$ için, $A(x) = b$ ise A operatörüne **sabit operatör**, $A(x) = x$ ise A operatörüne **birim operatör** denir ve genellikle I ile gösterilir.

3.5. Tanım $A: X \to Y$ operatörü verilmiş olsun. Eğer, $A(x) = Y$ ise A ya **örten operatör** aksi halde, A ya **içine operatör** denir. Her $x_1, x_2 \in X$ için

$$x_1 \neq x_2 \;\Rightarrow\; A(x_1) \neq A(x_2)$$

ise A ya **birebir operatör** denir.

3.6. Tanım X ve Y normlu uzaylar ve $A: X \to Y$ bir operatör olsun.

$\forall \varepsilon > 0$ ve her $x \in B(x_0, \delta) \subset D(A)$ için $\|x - x_0\| < \delta$ olduğunda $\|A(x) - A(x_0)\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa A ya **sürekli operatör** denir.

3.7. Tanım X ve Y normlu uzaylar ve $A: D(A) \subset X \to R(A) \subset Y$ operatörü verilsin. Eğer, A operatörü $D(A)$ daki her sınırlı alt kümeyi (X e göre sınırlı),

$R(A)$ nın sınırlı bir alt kümesine (Y ye göre), götürüyorsa A **ya sınırlı operatör** adı verilir.

3.8. Tanım X ve Y aynı K cismi üzerinde iki vektör uzay ve $A: X \to Y$ bir operatör olsun. Eğer, $D(A)$, X in alt vektör uzayı ve her $x, y \in D(A)$, her $\alpha, \beta \in K$ için,

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A ya **lineer operatör** denir.

3.1. Örnek $C^{(1)}(A)$, A açık kümesi üzerinde türevlenebilir fonksiyonların vektör uzayı olmak üzere,

$$A: C^{(1)}(A) \subset C(A) \to C(A), \; A(f) = f'$$

olarak tanımlanan A operatörü lineerdir. Gerçekten, $f, g \in C^{(1)}(A)$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$A(\alpha f + \beta g) = (\alpha f + \beta g)' = \alpha f' + \beta g' = \alpha A(f) + \beta A(g)$$

dir.

3.2. Örnek $A: C[a,b] \to \mathbb{R}$, $A(f) = \int_a^b f(x)dx$ olarak tanımlanan A operatörü lineerdir. Gerçekten, $f, g \in C[a,b]$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} A(\alpha f + \beta g) &= \int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)dx = \int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \\ &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx = \alpha A(f) + \beta A(g) \end{aligned}$$

dir.

3.1. Teorem $A: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer, A bir tek noktada sürekli ise her noktada süreklidir.

İspat. A operatörü bir $x_0 \in D(A)$ noktasında sürekli olsun. $x \in D(A)$ olmak üzere, (x_n), $D(A)$ da x e yakınsayan bir dizi olsun. Bu durumda,

$$x_n \to x \Rightarrow x_n - x = \theta$$

dır. Buradan,

$$x_n - x + x_0 \to \theta + x_0 = x_0$$

olur. A lineer olduğundan

$$A(x_n - x + x_0) \to A(x_0)$$

$$\Rightarrow A(x_n) - A(x) + A(x_0) \to A(x_0)$$

$$\Rightarrow A(x_n) - A(x) \to \theta'$$

$$\Rightarrow A(x_n) \to A(x)$$

dır. O halde, A, $x \in D(A)$ da sürekli ve x keyfi olduğundan A, $D(A)$ da süreklidir.

Demek ki, lineer operatörler ya uzayın tamamında süreklidir ya da tamamında süreksizdir.

3.1. Sonuç $A: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer, A, θ noktasında (θ, X in birim elemanı) sürekli ise A tüm uzayda süreklidir.

3.9. Tanım $A: X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Eğer, her $x \in D(A)$ için,

$$\|A(x)\| \leq C\|x\| \tag{3.1}$$

olacak şekilde $C > 0$ sayısı mevcut ise A ya $D(A)$ da **sınırlı lineer operatör** denir. Eğer, $D(A) = X$ ise A ya **sınırlı lineerdir** denir.

3.1. Not Sınırlı lineer operatör kavramı, sınırlı lineer dönüşüm kavramından farklıdır. Hatırlanırsa bir $f : X \to Y$ dönüşümü her $x \in X$ için $\|f(x)\| \leq K$ $(K > 0)$ şartını sağlıyorsa bu dönüşüme X de sınırlıdır deniyordu. Buna göre, mesela $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $A(x) = x$ operatörü bir dönüşüm olarak sınırlı değil iken lineer operatör olarak (3.1) şartını sağlar. Yani, sınırlıdır. Gerçekten, her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\|A(x)\| = |A(x)| = |x|$$

dir (Burada, $C = 1$ dir).

3.2. Teorem $A : X \to Y$ bir lineer operatörünün $D(A)$ da sınırlı olması için gerek ve yeter şart A operatörünün $D(A)$ da sürekli olmasıdır.

3.10. Tanım $A : D(A) \subset X \to Y$ sınırlı bir lineer operatör olsun. Bu durumda, $\forall x \in D(A)$ için,

$$\|A(x)\| \leq K\|x\|$$

olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı vardır. $x \neq \theta$ olmak üzere yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafı $\|x\|$ ile bölünürse,

$$\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} \leq K, \quad x \neq \theta$$

olur. Şimdi, bu son eşitsizliği sağlayan en küçük K sayısını düşünelim. Bu en küçük K sayısı,

$$K_{\min} = \sup\left\{\frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : x \neq \theta, x \in D(A)\right\}$$

dir. Bu en küçük K sayısına A **operatörünün normu** denir ve $\|A\|$ ile gösterilir. Yani, $K_{\min} = \|A\|$ dır. A operatörünün normu ayrıca,

$$\begin{aligned}
\|A\| &= \sup\left\{ \frac{\|A(x)\|}{\|x\|} : \; x \in D(A), x \neq \theta \right\} \\
&= \sup\{\|A(x)\| : \|x\| = 1\} \\
&= \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\} \\
&= \sup\{\|A(x)\| : \|x\| < 1\} \\
&= \inf\{K : \; \|A(x)\| \leq K\|x\|, x \in D(A)\}
\end{aligned}$$

olarak da tanımlanır.

3.11. Tanım $A : D(A) \subset X \to Y$ operatörü verildiğinde özel olarak $Y = \mathbb{R}$ (veya $\mathbb{C}$) ise A ya **fonksiyonel** denir. Eğer, A lineer ise A ya **lineer fonksiyonel** denir.

3.12. Tanım $A : D(A) \subset X \to R(A) \subset Y$ birebir lineer operatörü verilsin.

$$A^{-1} : R(A) \to D(A), \; A^{-1}(y) = x \;\Leftrightarrow\; A(x) = y$$

şeklinde tanımlı A^{-1} operatörüne A nın **ters operatörü** denir. Buna göre, $\forall x \in D(A)$ için $(A^{-1}A)(x) = x$ ve $\forall y \in R(A)$ için $(AA^{-1})(y) = y$ dir.

3.13. Tanım $A : D(A) \subset X \to Y$ lineer operatörü verilsin.

$$\c{C}ekA = \{x \in D(A) : A(x) = \theta\}$$

kümesine A **operatörünün çekirdeği(sıfır uzayı)** denir. A lineer olduğundan $A(\theta) = \theta'$ olup $\theta \in \c{C}ekA$ dır. Dolayısıyla, $\c{C}ekA \neq \varnothing$ dir.

3.14. Tanım X ve Y iki normlu uzay olsun. X den Y ye tanımlı tüm lineer operatörlerin kümesi

$$L(X,Y) = \{A : X \to Y \mid A \text{ lineer}\}$$

ile gösterilir. $L(X,Y)$ kümesi, her $A_1, A_2 \in L(X,Y)$ ve $\alpha \in K$ için,

$$(A_1 + A_2)(x) = A_1(x) + A_2(x) \quad \text{ve} \quad \alpha(A_1)(x) = \alpha A_1(x)$$

işlemlerine göre bir vektör uzayıdır. X den Y ye tanımlı tüm lineer ve sınırlı operatörlerin kümesi

$$C(X,Y) = \{A : X \to Y \mid A \text{ lineer ve sınırlı}\}$$

ile gösterilir. Bu $C(X,Y)$ kümesi, $L(X,Y)$ vektör uzayının bir alt vektör uzayıdır.

3.3. Teorem X ve Y aynı cisim üzerinde iki normlu vektör uzay ve $C(X,Y)$ de X den Y ye tanımlı tüm lineer ve sınırlı operatörlerin vektör uzayı olsun. Bu durumda, $C(X,Y)$,

$$\|A\| = \sup\{\|A(x)\| : \|x\| \leq 1\}$$

normuna göre bir normlu uzaydır. Ayrıca, Y nin tam olması yani Banach uzayı olması halinde $C(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır.

3.2. Sonuç Teoreme dikkat edilirse, Y tam olmak üzere X tam yani Banach uzayı olmasa bile $C(X,Y)$ bir Banach uzayıdır. Özel olarak $Y = \mathbb{R}$ veya $Y = \mathbb{C}$ alınırsa, $\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ tam olduğundan $C(X,\mathbb{R})$ ve $C(X,\mathbb{C})$ uzayları X tam olmasa bile birer Banach uzayıdır. Bu uzaya, X in **dual uzayı (sürekli duali)** denir ve X^* ile gösterilir. Demek ki, $X^* = C(X,\mathbb{R})$ birinci dual uzayı bir Banach uzayıdır.

3.1 Kompakt Operatörler

V, sonlu boyutlu bir lineer uzay ve $A : V \to V$ operatörü lineer olduğunda $Au = w$ denklemi iyi gelişmiş bir çözüm teorisine sahiptir. Burada elde edilen sonuçları sonsuz boyutlu uzaylara genişletmek için kompakt operatör kavramını ifade edeceğiz.

3.4. Teorem (Genişleme Teoremi) V, bir normlu uzay olsun ve $\hat{V}$ de onun tamamlanışını göstersin. W bir Banach uzayı olmak üzere $L \in \mathcal{L}(V,W)$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, burada

$$\hat{L}v = Lv, \ \forall v \in V$$

ve

$$\|\hat{L}\|_{\hat{V},W} = \|L\|_{V,W}$$

şeklinde tanımlanmış bir tek $\hat{L} \in \mathcal{L}(\hat{V},W)$ operatörü vardır. Bu $\hat{L}$ operatörü L operatörünün bir genişlemesi olarak adlandırılır.

3.5. Teorem (Düzgün Sınırlılık Prensibi) $\{L_n\}$ bir V Banach uzayından bir W normlu uzayında tanımlı sınırlı lineer operatörlerin bir dizisi olsun. Her $v \in V$ için $\{L_n v\}$ dizisinin sınırlı olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\sup_n \|L_n\| < \infty$$

dır. Bu teorem genel olarak düzgün sınırlılık prensibi olarak adlandırılır.

3.15. Tanım V ve W Banach uzayları ve $K : V \to W$ operatörü lineer olsun. Bu durumda, eğer

$$\left\{Ku \mid \|u\|_V \le 1\right\}$$

kümesi W da kompakt bir kapanışa sahipse K operatörü kompakttır denir. Bu, her sınırlı $\{u_n\} \subset V$ dizisi için bir $\{Ku_n\}$ dizisinin W da herhangi bir noktaya yakınsak olan bir alt diziye sahip olduğunu söylemek ile eşdeğerdir. Kompakt operatörler ayrıca tam sürekli operatörler olarak da adlandırılır.

3.1. Lemma Aşağıdaki şartlar sağlandığını kabul edelim.

$i)$ E ve G Banach uzayları olmak üzere $E \subset G$ sürekli gömülebilir,

$ii)$ Bir B operatörü, E den F Banach uzayına sınırlı ve herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\|B\|_F \leq \varepsilon \|u\|_E + C(\varepsilon)\|u\|_G , \ u \in E .$$

Bu durumda, B operatörü, E den F ye kompakttır.

3.2. Lemma Aşağıdaki şartlar sağlandığını kabul edelim.

$i)$ E ve G bazları bulunan birer Banach uzaylarıdır ve E yansımalıdır,

$ii)$ $E \subset G$ gömülmesi her yerde yoğun ve süreklidir,

$iii)$ F bir Banach uzayı olmak üzere, E den F ye tanımlanan B operatörü, kompakttır.

Bu durumda, herhangi $\varepsilon > 0$ için

$$\|Bu\|_F \leq \varepsilon \|u\|_E + C(\varepsilon)\|u\|_G , \ u \in E$$

olacak şekilde $C(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunur (Bu lemmaların ispatı S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un [45, altbölüm 1.2.7] de bulunabilir). Literatürde bu iki Lemma operatörlerin kompaktlık kriteri olarak bilinir.

3.2 İntegral Operatörü

3.16. Tanım Sürekli olan her $f(x)$ fonksiyonu için

$$Lf(x) = \int_a^b k(x,\zeta)\, f(\zeta)\, d\zeta$$

şeklinde tanımlanan L operatörüne, çekirdeği $k(x,\zeta)$ olan bir **integral operatör** denir.

Bu tanıma göre,

$$L^{-1}f(x)=\int_a^b G(x,\zeta)\,f(\zeta)\,d\zeta$$

olduğundan L^{-1} operatörü, çekirdeği $G(x,\zeta)$ Green fonksiyonu olan bir integral operatörüdür.

3.3 Fredholm Operatörü

Bir operatörün Fredholm operatörü olma özellikleri araştırılırken genellikle S. G. Krein, H. Triebel ve Isabelle Titeux- Ya. Yakubov' un kitapları göz önüne alınmıştır [22], [42], [43].

3.17. Tanım E ve F birer Banach uzayı olsun. $D(A)$ tanım kümesi, $R(A)$ değer kümesi, F', F nin eşlenik uzayı ve $D(A)\subset E$ olmak üzere $A:E\to F$ operatörü verilsin.

$$Au=0$$

homojen denkleminin çözümlerinin kümesi, A operatörünün çekirdeği (kernel) olarak adlandırılır ve $\ker A$ ile gösterilir. O halde,

$$\ker A:=\{u|u\in D(A),\ Au=0\}$$

dır. $R(A)$ üzerinde F' den 0 a eşit gelen fonksiyonların kümesi ise A operatörünün cokernel i olarak adlandırılır ve $co\ker$ ile gösterilir. Bu nedenle,

$$co\ker A := \{ v' \mid v' \in F',\ \langle Au, v' \rangle = 0,\ u \in D(A) \}$$

dır. Bu tanımlamalardan sonra, eğer E den F ye bir A operatörü,

$i)$ $R(A)$, F de kapalıdır,

$ii)$ $\ker A$ ve $co\ker A$ sırasıyla E ve F' nün sonlu boyutlu alt uzaylarıdır,

$iii)$ $\dim \ker A = \dim co\ker A$

şartlarını sağlarsa **Fredholm operatörü** denir.

3.6. Teorem (Geometrik Seriler Teoremi) V bir Banach uzayı ve $L \in \mathcal{L}(V)$ olsun.

$$\|L\| < 1$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $I - L$, V üzerinde örtendir ve onun tersi

$$(I - L)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} L^n$$

sınırlı lineer operatördür ve

$$\left\| (I - L)^{-1} \right\| = \frac{1}{1 - \|L\|}$$

dır.

3.4 Rezolvent Operatörü

V bir kompleks Banach uzayı, $V = C(D)$ $\|\cdot\|_{\infty}$ düzgün normuyla bir D kapalı kümesi üzerinde sürekli kompleks değerli fonksiyonların bir kümesi ve $L : V \to V$ operatörü sınırlı lineer bir operatör olsun. Geometrik seriler teoreminden eğer $|\lambda| > \|L\|$ ise bu durumda

$$(\lambda - I)^{-1} : V \to V$$

şeklinde bir sınırlı lineer operatör vardır.

3.18. Tanım V bir kompleks Banach uzayı ve $L : V \to V$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Eğer $(\lambda - I)^{-1} : V \to V$ bir sınırlı lineer operatör olarak varsa bu durumda $\lambda \in \mathbb{C}$, L operatörünün rezolvent kümesine ait olduğu söylenir. Bu küme $\rho(L)$ ile gösterilir ve $(\lambda - I)^{-1}$ operatörü **rezolvent operatör** olarak adlandırılır.

3.5 Pozitif Operatörler

3.19. Tanım A bir Banach uzayı ve Λ operatörü, $D(\Lambda) \subset A$ şeklinde yoğun bir bölgede Λ operatörünün görüntüsü A da bulunacak şekilde tanımlanmış bir kapalı lineer operatör olsun. Eğer $(-\infty, 0]$, Λ operatörünün rezolvent kümesine ait ve burada bir $C \geq 0$ sayısı için

$$\left\|(\Lambda - tE)^{-1}\right\| \leq \frac{C}{1+|t|}, \ t \in (-\infty, 0]$$

eşitsizliği sağlanır ise bu durumda Λ operatörüne **pozitif operatör** denir.

3.6 Gömülme Operatörü

Tanım 3.20. E Banach uzayından F Banach uzayına giden bre-bir ve cebirsel işlemleri koruyan $J : E \to F$ dönüşümü verilmişse, o halde E, F ye gömülmüştür denir. Bu halde $J(E)$ ile E aynı uzaylar olarak kabul edilir ve bu anlamda $E \subset F$ yazılır. J operatörüne ise **gömülme operatörü** denir.

$J : E \to F$ gömülme operatörü sürekli(kompakt) olduğunda $E \subset F$ gömülmesi de sürekli(kompakt) gömülme olarak adlandırılır. Eğer, $J(E)$ görüntü kümesi her yerde yoğun ise $E \subset F$ gömülmesi de her yerde yoğundur denir.

4. SINIR DEĞER PROBLEMLERİ

Fizik alanında özellikle mekanikte uygulaması sıkça görülen geçiş şartlı bazı sınır değer problemlerinin kök fonksiyonlarının tamlığı ve izomorfizmi ile ilgili çalışmalardan biri I. Titeux ve Ya. Yakubov tarafından yapılmıştır [42]. Ayrıca sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin izomorfizmi, koersitivliği ve Fredholm operatör ile ilgili, S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un çok sayıda çalışması ve kitapları bulunmaktadır. Bu matematikçiler aynı zamanda sınır şartlarında spektral parametre bulunan sınır değer problemlerinin soyut bir teorisini kurmuşlardır [45-47].

Sınır değer problemleri bir diferensiyel operatör olarak yazılabildiğinden diferensiyel operatörlerin tanıtılmasına sınır değer problemlerini ele alarak başlayacağız. Burada göz önüne aldığımız kaynaklar, literatürde önemli bir yere sahip olan Naimark M.A. ve S. Yakubov ile Ya. Yakubov un kitaplarının da arasında bulunduğu ([3], [19], [22], [30], [31], [45]) kaynaklarıdır.

4.1 Diferensiyel Denklemler

Bazı statik problemlere dayalı denklemlerin çözümlerini cebirsel metotlarla bulabiliriz. Ancak doğal olaylarda zamana göre değişim içeren problemlerin çözümü, olaydaki değişen nicelikleri birbirine bağlayan denklemlerin çözülmesi suretiyle elde edilir. Herhangi bir olaydaki bir durum, bir veya birden fazla değişkene bağlı olabilir. Tek değişkene bağlı bir olaya ait matematiksel denklemin kurulup çözülmesi, tek değişkenli fonksiyonlar teorisinin bilinmesi gerektirmektedir. Tabii ki bu teorinin içindeki esas hedef bir y bağımlı değişkeninin bir x bağımsız değişkenine göre değişimi olan $\frac{dy}{dx} = y'$ türevini içeren denklemlerin çözülebilmesidir. Benzer şekilde birden çok değişkene bağlı bir olaya ait matematiksel denklemin kurulup çözülebilmesi için de çok değişkenli fonksiyonlar teorisine ihtiyaç vardır. Burada ki esas amaç da çok değişkenli fonksiyonlar yardımıyla kurulan ve kısmi türevli denklemeler olarak bilinen denklemlerin çözülebilmesidir.

4.1. Tanım [19]. $\mathbb{F}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ve $\mathbb{F}^m$ üzerindeki norm Euclid normu olmak üzere

$$f : D \subseteq \mathbb{R} \times \left(\mathbb{F}^m\right)^{n+1} \to \mathbb{F}^m,\ m \geq 1,\ n \geq 1\left(m, n \in \mathbb{N}\right)$$

fonksiyonu yardımıyla tanımlanan

$$f\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), ..., y^{(n)}(x)\right) = 0 \tag{4.1}$$

denklemine **adi (bayağı) diferensiyel denklem** denir. O halde adi diferensiyel denklem, bir bağımlı değişken, bir bağımsız değişken ve bağımlı değişkenin bağımsız değişkene göre türevlerini içeren bir denklemdir.

$$y : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{F}^m$$

şeklinde tanımlanan n inci mertebeden türevlere sahip $y(x)$ fonksiyonu, (4.1) denklemini sağlarsa bu fonksiyona **denklemin çözümü** denir. Eğer (4.1) denkleminden $y^{(n)}$ açık olarak çözülebiliyorsa bu denklem

$$y^{(n)}(x) = \varphi\left(x, y(x), y'(x), y''(x), y'''(x), ..., y^{(n-1)}(x)\right) \tag{4.2}$$

biçiminde yazılabilir. Burada φ

$$\varphi : \Omega \subseteq \mathbb{R} \times \left(\mathbb{F}^m\right)^n \to \mathbb{F}^m \tag{4.3}$$

şeklinde tanımlı olan sürekli bir fonksiyondur. $m > 1$ olması halinde $y(x) \in \mathbb{F}^m$ fonksiyonu vektör değerli bir fonksiyon olup y ve türevlerinin $1 \times m$ tipinde bir vektör olduğu görülür. O halde $m > 1$ için (4.2) denklemi bir diferensiyel denklem sistemini gösterir.

4.2. Tanım (4.1) denklemi

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

veya

$$a_n \frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2 y}{dx^2} + a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x),\ a_n \neq 0$$

şeklinde de gösterilebilir. $a_i \ (i = 1, 2, ..., n)$ katsayılarının sabit veya x in fonksiyonu olup olmamasına göre bu denklem sabit katsayılı veya değişken katsayılı diferensiyel denklem olarak adlandırılır. Eğer $f(x) = 0$ ise denkleme **homojen (ikinci tarafsız) diferensiyel denklem**, $f(x) \neq 0$ ise denkleme **homojen olmayan (ikinci taraflı) diferensiyel denklem** denir.

4.3. Tanım [19]. Diferensiyel denklemler, türevlerin önündeki katsayılara göre de sınıflandırılmaya tabi tutulurlar. Türevlerin önündeki katsayıları sabit olan denklemler **sabit katsayılı denklemler**, katsayıları değişken olan denklemler de **değişken katsayılı denklemler** adını alırlar.

4.4. Tanım $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $(a_1, a_2, ..., a_n) \in D$ olsun.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, ..., a_k + h, ..., a_n) - f(a_1, a_2, ..., a_n)}{h}$$

limiti mevcut ise bu limite f fonksiyonunun x_k değişkenine göre $(a_1, a_2, ..., a_n)$ noktasındaki kısmi türevi denir ve

$$\frac{\partial f(a_1, a_2, ..., a_n)}{\partial x_k} \quad \text{veya} \quad f_{x_k}(a_1, a_2, ..., a_n)$$

şeklinde gösterilir.

4.5. Tanım Birden çok bağımsız değişkeni, en az bir bağımlı değişkeni ve bu bağımlı değişkenlerin bağımsız değişkenlere göre kısmi türevlerini içeren bir denkleme **kısmi türevli diferensiyel denklem** denir.

4.2 Sınır Değer Problemleri

$a_1, a_2, ..., a_n$ $(a_n \neq 0)$ sabit reel sayılar olmak üzere bir $[a,b]$ aralığında tanımlı

$$l(y) = a_n y^{(n)} + ... + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \tag{4.4}$$

sabit katsayılı lineer homojen diferensiyel denklemini göz önüne alalım. Burada, y fonksiyonu $[a,b]$ aralığında n-inci mertebeye kadar sürekli türevlenebilen $(y \in C^{(n)})$ bir fonksiyondur. $y_1, y_2, ..., y_n$ fonksiyonları (4.4) denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve $c_1, c_2, ..., c_n$ keyfi sabitler olmak üzere (4.4) denkleminin genel çözümünün

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + ... + c_n y_n \tag{4.5}$$

şeklinde yazıldığını biliyoruz.

Bu y fonksiyonu ve $(n-1)$-inci mertebeye kadar türevlerinin $a \leq x \leq b$ aralığının sınır noktalarındaki değerleri

$$y(a), y'(a), y''(a), ..., y^{(n-1)}(a); y(b), y'(b), y''(b), ..., y^{(n-1)}(b)$$

olmak üzere, bu ifadelerin lineer birleşimlerinden oluşan

$$\begin{aligned}
U_1(y) &= \alpha_{11} y(a) + \alpha_{12} y'(a) + ... + \alpha_{1n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{11} y(b) + \beta_{12} y'(b) + ... + \beta_{1n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
U_2(y) &= \alpha_{21} y(a) + \alpha_{22} y'(a) + ... + \alpha_{2n} y^{(n-1)}(a) + \beta_{21} y(b) + \beta_{22} y'(b) + ... + \beta_{2n} y^{(n-1)}(b) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_m(y) &= \alpha_{m1} y(a) + \alpha_{m2} y'(a) + ... + \alpha_{mn} y^{(n-1)}(a) + \beta_{m1} y(b) + \beta_{m2} y'(b) + ... + \beta_{mn} y^{(n-1)}(b) = 0
\end{aligned} \tag{4.6}$$

sistemini göz önüne alalım ve bu sitemi daha sade olarak

$$U_k(y)=0\,,\ k=1,2,...,m \tag{4.7}$$

şeklinde gösterelim.

4.6. Tanım (4.6) ve (4.7) sistemine (4.4) denkleminin **sınır şartları** denir. Bu sistemdeki her bir denklem bir sınır şartı ve $U_1,U_2,...,U_m$ lineer birleşimleri de sınır formları olarak adlandırılır. (4.4) homojen denklemi ile bu denkleme ait (4.7) sınır şartları birlikte düşünüldüğünde

$$\begin{aligned} &l(y)=0 \\ &U_k(y)=0,\ k=1,2,...,m \end{aligned} \tag{4.8}$$

şeklinde ifade edilen probleme de **homojen sınır değer problemi** denir.

4.7. Tanım $f(x)$, $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyon ve f_k sabit sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned} &l(y)=f(x) \\ &U_k(y)=f_k,\ k=1,2,...,m \end{aligned}$$

sistemine **homojen olmayan sınır değer problemi** denir.

4.8. Tanım Homojen sınır değer probleminin daima bir $y=0$ çözümü vardır. Bu çözüme problemin **aşikâr (trivial) çözümü** denir. Problemin sıfırdan farklı çözümlerine de **aşikâr olmayan çözümleri** denir.

Şimdi, (4.7) sınır şartları ve $l(y)$ diferensiyel ifadesinin tanım bölgesindeki her bir y fonksiyonuna $l(y)=u$ olacak şekilde bir u değerinin karşılık geldiği kabul edilirse (4.8) sınır değer problemi L ile gösterilen bir lineer operatör yardımıyla

$$Ly=u$$

biçiminde yazılabilir. Yani, bu eşitlik

$$Ly = (l(y), U_1(y), U_2(y), ..., U_m(y)) = u \qquad (4.9)$$

anlamındadır.

4.9. Tanım (4.9) şeklinde ifade edilen L operatörüne, $l(y)$ diferensiyel ifadesi ve (4.7) sınır şartları tarafından üretilen **diferensiyel operatör** denir. Buna göre, (4.8) sınır değer problemi ile L diferensiyel operatörü eşdeğer olup

$$Ly = 0$$

şeklinde yazılabilir.

Buradan, bir diferensiyel ifadenin farklı sınır şartları altında farklı diferensiyel operatör üreteceği anlaşılmaktadır. Bu durumda, $l(y)$ diferensiyel ifadesinin ürettiği en geniş lineer diferensiyel operatör sınır şartlarının olmadığı durumdur. Bu operatör L_1 ile gösterilen ve

$$L_1 : C^{(n)}[a,b] \to C^{(n)}[a,b], D(L_1) = C^{(n)}[a,b], L_1 y = l(y)$$

şeklinde tanımlanan operatördür. $l(y)$ diferensiyel ifadesinin ürettiği en dar lineer diferensiyel operatör ise sınır ifadelerinin hepsinin sıfır olduğu yani,

$$y(a) = y'(a) = ... = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = ... = y^{(n-1)}(b) = 0$$

olduğu durumda ürettiği operatördür. O halde, bu operatör L_0 ile gösterilen ve

$$L_0 : C^{(n)}[a,b] \to C^{(n)}[a,b],$$

$$D(L_0) = \left\{ y \in C^{(n)}[a,b] \middle| y(a) = y'(a) = ... = y^{(n-1)}(a) = y(b) = y'(b) = ... = y^{(n-1)}(b) = 0 \right\}$$

şeklinde tanımlanan bir operatördür. Buna göre, (4.8) sınır değer probleminin ürettiği diğer tüm diferensiyel operatörler L_0 ve L_1 operatörleri arasındadır yani,

$$L_0 \subset L \subset L_1$$

olmaktadır.

4.3 Özdeğer Parametreli Sınır Değer Problemleri

$$l(y) = a_n(x)\frac{d^n y}{dx^n} + a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + a_2(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_0(x)y$$

ve λ reel veya kompleks bir parametre olmak üzere,

$$l(y) = \lambda y \qquad (4.10)$$

$$U_k(y) = 0,\ k = 1, 2, ..., m \qquad (4.11)$$

sınır değer problemini göz önüne alalım. Bu sınır değer probleminin ürettiği L diferensiyel operatörüne göre (4.10) problemi

$$Ly = \lambda y \text{ veya } (L - \lambda \mathrm{I})y = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada, $(L - \lambda \mathrm{I})y = 0$ denkleminin sıfırdan farklı bir çözümünün olmasını sağlayan λ sayısına L **operatörünün özdeğeri** denir.

4.10. Tanım (4.10)-(4.11) sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatör L olmak üzere bu operatörün özdeğerine **problemin özdeğeri**, bu özdeğere karşılık gelen sıfırdan farklı y $(y \neq 0)$ fonksiyonlarına da bu **problemin özfonksiyonları** denir.

4.1. Not Operatörün tanımlandığı lineer uzay fonksiyon uzayı olduğunda özvektör yerine özfonksiyon kavramı kullanılır.

4.11. Tanım (4.10)-(4.11) şeklinde verilen bir sınır değer problemine diferensiyel denkleminde özdeğer parametresi bulunan **özdeğer parametreli homojen sınır değer problemi** adı verilir.

4.2. Not λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar kümesi sonlu boyutlu olan bir lineer uzay oluşturur. Bu uzayın boyutu, (4.10)-(4.11) sınır değer probleminin λ özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır.

4.1. Teorem Aynı bir λ özdeğerine karşılık gelen y_1 ve y_2 özfonksiyonlarının lineer birleşimi de bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olur.

İspat. y_1 ve y_2 özfonksiyon ise

$$L(y_1) = \lambda y_1 \quad \text{ve} \quad L(y_2) = \lambda y_2$$

olduğundan c_1 ve c_2 herhangi skaler olmak üzere,

$$\begin{aligned} L(c_1y_1 + c_2y_2) &= L(c_1y_1) + L(c_2y_2) \\ &= c_1L(y_1) + c_2L(y_2) \\ &= c_1\lambda y_1 + c_2\lambda y_2 \\ &= \lambda(c_1y_1 + c_2y_2) \end{aligned}$$

olur ki bu da $c_1y_1 + c_2y_2$ ifadesinin özfonksiyon olduğunu gösterir.

Şimdi özdeğerlerin belirlenmesi için aşağıdaki durumları inceleyelim.

A) $m \neq n$ olsun.

(4.10) denkleminin lineer bağımsız çözümleri

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), ..., y_n(x,\lambda) \tag{4.12}$$

olsun. Bu çözümler sistemi, (4.10) denkleminin çözümlerinin temel sistemi olarak adlandırılır ve λ parametresine göre analitik (tam) fonksiyonlardır. Buna göre, (4.10) denkleminin genel çözümü

$$y(x,\lambda) = c_1y_1(x,\lambda) + c_2y_2(x,\lambda) + ... + c_ny_n(x,\lambda) \tag{4.13}$$

şeklindedir. (4.13) genel çözümü (4.11) sınır şartlarında yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&U_1(y(x,\lambda)) = c_1U_1(y_1(x,\lambda)) + c_2U_1(y_2(x,\lambda)) + ... + c_nU_1(y_n(x,\lambda)) = 0 \\
&U_2(y(x,\lambda)) = c_1U_2(y_1(x,\lambda)) + c_2U_2(y_2(x,\lambda)) + ... + c_nU_2(y_n(x,\lambda)) = 0 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
&U_m(y(x,\lambda)) = c_1U_m(y_1(x,\lambda)) + c_2U_m(y_2(x,\lambda)) + ... + c_nU_m(y_n(x,\lambda)) = 0
\end{aligned}
$$

sistemi elde edilir. c_i $(i = 1, 2, ..., n)$ bilinmeyenlerine göre bu sistemin katsayılar matrisi,

$$
U(\lambda) = \begin{pmatrix} U_1(y_1(x,\lambda)) & U_1(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_1(y_n(x,\lambda)) \\ U_2(y_1(x,\lambda)) & U_2(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_2(y_n(x,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_m(y_1(x,\lambda)) & U_m(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_m(y_n(x,\lambda)) \end{pmatrix} \tag{4.14}
$$

şeklindedir. $rankU(\lambda) = r$ olmak üzere,

a) (4.10)-(4.11) sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $r < n$ olmasıdır.

b) $m < n$ ise $r < n$ olacağından (4.10)-(4.11) sınır değer problemi λ nın herhangi bir değeri için aşikâr olmayan çözüme sahiptir. Buna göre, $m < n$ olması durumunda λ nın her bir değeri özdeğeridir.

c) $m \geq n$ ise $r < n$ olması için gerek ve yeter şart $U(\lambda)$ matrisinin bütün n-inci mertebeden minörlerinin sıfır olmasıdır. Bu durumda,

i) $U(\lambda)$ matrisinin bütün n-inci mertebeden minörleri sıfır ise $r < n$ olacağından λ nın her bir değeri özdeğeridir.

ii) $U(\lambda)$ matrisinin en az bir n-inci mertebeden minörü sıfırdan farklı ise n-inci mertebeden minörleri sıfır yapan bütün λ değerleri bir özdeğeridir.

B) $m = n$ olsun.

Bu durumda, (4.10)-(4.11) sınır değer problemi

$$
l(y) = \lambda y \tag{4.15}
$$

$$U_k(y)=0,\ k=1,2,...,n \tag{4.16}$$

şeklinde olup (4.14) matrisi de

$$U(\lambda)=\begin{pmatrix} U_1(y_1(x,\lambda)) & U_1(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_1(y_n(x,\lambda)) \\ U_2(y_1(x,\lambda)) & U_2(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_2(y_n(x,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_n(y_1(x,\lambda)) & U_n(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_n(y_n(x,\lambda)) \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

biçimindedir.

4.12. Tanım (4.15)-(4.16) sınır değer probleminin ürettiği diferensiyel operatör L olmak üzere,

$$\Delta(\lambda)=\det U(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1(x,\lambda)) & U_1(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_1(y_n(x,\lambda)) \\ U_2(y_1(x,\lambda)) & U_2(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_2(y_n(x,\lambda)) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ U_n(y_1(x,\lambda)) & U_n(y_2(x,\lambda)) & \cdots & U_n(y_n(x,\lambda)) \end{vmatrix}$$

determinantına L operatörünün veya $Ly=0$ sınır değer probleminin **karakteristik determinantı** denir. L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ determinantının sıfırlarıdır ve bir λ özdeğeri $\Delta(\lambda)$ nın katlı bir sıfırı olabilir.

4.3. Not $y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda),..., y_n(x,\lambda)$ fonksiyonları λ ya göre her bir x değeri için analitik fonksiyonlar olduğundan $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın bir analitik fonksiyonudur. Özdeş olarak sıfırdan farklı olan yani, λ nın bütün özdeğerleri için sıfır olmayan bir analitik fonksiyonun sonlu veya sayılabilir sayıda sıfırı vardır. Bu analitik fonksiyonun sıfırları izole noktalar olup hiçbir sonlu yığılma(limit) noktası bulunmaz. Buna göre, (4.15)-(4.16) sınır değer problemi (L operatörü) için aşağıdaki durumlar söz konusudur:

a) $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları problemin özdeğerleridir.

b) $\Delta(\lambda)\equiv 0$ ise her λ kompleks sayısı problemin özdeğeridir.

c) $\Delta(\lambda)\neq 0$ ise probleme ait özdeğer yoktur.

d) Problemin sonlu sayıda özdeğeri bulunur.

e) Problemin sayılabilir sayıda (λ_n) özdeğerleri bulunur ve

$$\lambda_n \to \infty$$

olur. (λ_n) dizisi yakınsak değildir.

4.2. Teorem Bir λ sayısının L operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter şart $\Delta(\lambda)=0$ olmasıdır.

4.13. Tanım λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun m -inci dereceden sıfırı ise m sayısına λ_0 özdeğerinin **cebirsel katı** denir. λ_0 sayısı (4.15)-(4.16) probleminin bir özdeğeri olmak üzere bu özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerinin sayısına λ_0 özdeğerinin **geometrik katı** veya **özkatı** adı verilir.

4.3. Teorem λ_0 sayısı $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı ise ve λ_0 ın geometrik katı k ve cebirsel katı l olmak üzere $k \le l$ dir.

4.1. Örnek

$$y''+\lambda y=0,\ 0\le x\le l \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned} U_1(y) &= y'(0)=0 \\ U_2(y) &= y(l)=0 \end{aligned} \tag{4.19}$$

sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını bulalım.

1) $\lambda=0$ ise denklem $y''=0$ olacağından genel çözümü,

$$y=c_1x+c_2$$

fonksiyonu ve türevi

$$y'=c_1$$

olduğundan $y'(0)=0$ sınır şartına göre $c_1=0$ olur ve $y(l)=0$ sınır şartına göre $c_2=0$ olduğu için (4.18)-(4.19) sınır değer probleminin sadece $y=0$ aşikâr çözümü vardır. Buna göre, $\lambda=0$ sayısı (4.18)-(4.19) sınır değer probleminin özdeğeri değildir.

2) $\lambda<0$ ise $\lambda=-\alpha^2$ $(\alpha>0)$ olmak üzere (4.18) denkleminin genel çözümü;

$$y=c_1e^{-\alpha x}+c_2e^{\alpha x} \text{ ve türevi } y'=-\alpha c_1e^{-\alpha x}+\alpha c_2e^{\alpha x}$$

olur. $y'(0)=0$ ve $y(l)=0$ sınır şartlarına göre sırasıyla

$$\begin{aligned}&-c_1+c_2=0\\&c_1e^{-\alpha l}+c_2e^{\alpha l}=0\end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu denklem sisteminin katsayılar determinantı,

$$\begin{vmatrix}-1 & 1\\ e^{-\alpha l} & e^{\alpha l}\end{vmatrix}=e^{\alpha l}+e^{-\alpha l}\neq 0$$

olduğundan (4.18)-(4.19) sınır değer probleminin sadece $y=0$ aşikâr çözümü vardır.

3) $\lambda>0$ ise $\lambda=\alpha^2$ $(\alpha>0)$ olmak üzere denklemin genel çözümü;

$$y(x)=c_1\cos\alpha x+c_2\sin\alpha x \tag{4.20}$$

ve türevi

$$y'(x)=-\alpha c_1\sin\alpha x+\alpha c_2\cos\alpha x$$

olur. Verilen sınır şartlarına göre

$$y'(0)=0 \text{ ise } c_2=0$$

$$y(l)=0 \text{ ise } c_1\cos\alpha l=0$$

eşitlikleri bulunur. $c_1 \cos\alpha l = 0$ eşitliğinde $c_1 = 0$ ise sistemin $y = 0$ aşikâr çözümü vardır.

$c_1 \neq 0$ ise $\cos\alpha l = 0$ olacağından

$$\alpha l = (2n-1)\frac{\pi}{2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\alpha = (2n-1)\frac{\pi}{2l}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\lambda_n = \alpha^2 = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

özdeğerleri elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar c_n keyfi sabitler olmak üzere (4.18) denkleminin (4.20) genel çözümüne göre

$$y(x) = c_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

şeklinde bulunur. y fonksiyonu aynı zamanda λ parametresine de bağlı olduğu için

$$y(x, \lambda) = c_n \cos\frac{(2n-1)\pi}{2l}x, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

biçiminde yazılması daha uygun olur.

$$\lambda_n = \alpha^2 = (2n-1)^2 \frac{\pi^2}{4l^2}, \; n = 1, 2, 3, \ldots$$

özdeğerleri için

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots$$

olduğu görülür. Buna göre özdeğerlerin

$$(\lambda_n) = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4l^2}$$

dizisi pozitif terimli artan ıraksak yani,

$$(\lambda_n) \to \infty$$

şeklinde olan bir dizidir.

5. GEÇİŞ ŞARTLARI İLE İLGİLİ LİTERATÜR TARAMASI

Geçiş şartları içeren problemler genellikle fiziksel olaylarda ve tekniğin çeşitli alanlarında oldukça sık karşılaşılan problemlerdir. Katı ortamların ve elektrodinamiğin önemli problemlerinden biri olan farklı dielektrik sabitleri ile ferromanyetik ortamlarda elektromanyetik süreçler üzerine yapılan araştırmalar buna örnek olarak verilebilir. Geçiş şartlı problemlerin katı mekanikte olduğu gibi cismin heterojen malzemelerden oluşması halinde de ortaya çıktığı görülmektedir. Ayrıca, titreşen katlanmış zarlar, farklı malzemelerden oluşan plakalar, elastik çoklu yapıların birleşimleri vb. durumlar için de geçiş şartlı problemlerden bahsedilebilir [11]. Bunun yanı sıra, homojen olmayan ortamlarda ısı transfer problemleri, difraksiyon problemleri ve çeşitli fiziksel transfer problemleri de geçiş şartlı problemlere örnek olarak verilebilir.

Literatürde geçiş şartlı problemlere ait oldukça fazla çalışma ve örnek problemler görülmektedir. Sonsuz iletken bir tabaka boyunca tanımlanan ısı transferi problemleri elektrostatik ve manyetizma da model problemlerdir. Bu konudaki çalışmalara örnek olarak Pham Huy ve Sanchez Palencia tarafından yapılan [16] çalışması verilebilir.

Bu modellerden farklı bir alan olan "hidrolik kırılma" (J. R. Cannon ve G. H. Meyer [12]) tarafından verilmiştir. Geçiş şartları burada, petrol üreten bir haznenin petrol akışını arttırmak için kullanılır.

Geçiş şartlı problemlere termoelastisite problemlerinde de rastlanabilir. Geçiş şartlarının ortamın sürekliliğini ve ona etki eden kuvvetlerin dengesini ifade ettikleri vurgulanmaktadır. Denklemlerin katsayılarındaki süreksizlik, ortamın fiziksel olarak iki farklı malzemeden oluştuğunun bir göstergesidir.

Bütün bu uygulamalarda matematiksel model, en az bir katman (ara yüz) için bir geçiş şartı içeren eliptik ya da parabolik bir sınır değer problemidir [24].

Fizik alanında özellikle mekanikte uygulaması sıkça görülen geçiş şartlı bazı sınır değer problemlerinin kök fonksiyonlarının tamlığı ve izomorfizmi ile ilgili çalışmalardan biri I. Titeux ve Ya. Yakubov tarafından yapılmıştır [42]. Ayrıca sürekli katsayılı sınır değer problemlerinin izomorfizmi, koersitivliği ve Fredholm operatör ile ilgili, S. Yakubov ve Ya. Yakubov' un çok sayıda çalışması ve kitapları bulunmaktadır. Bu matematikçiler aynı zamanda sınır şartlarında spektral parametre bulunan sınır değer problemlerinin soyut bir teorisini kurmuşlardır. [45-48]. Bu çalışmalar, H. Triebel' in "Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators" [43] isimli kitabında verdiği interpolasyon uzayları temel alınarak yapılmıştır. Bu nedenle bu çalışmalarda göz önüne alınan Sobolev uzaylarının interpolasyonu, diferensiyel operatörün tanımlandığı bir fonksiyonel uzay kavramı olarak öne çıkmaktadır.

Son yıllarda, fizik uygulamalarında süreksiz diferensiyel operatör problemleriyle ilgili çalışmaların arttığı gözlemlenmektedir. Bu alanda yapılan araştırmaların kaçınılmazlığı, farklı uygulama problemleriyle ilişkili süreksiz katsayılı denklemler için lokal ve lokal olmayan problemlerin ortaya çıkmasıyla açıklanabilir. Bitsadze A. V. ve Samarskii A. A tarafından [10] da yapılan çalışma, standart olmayan sınır değer problemlerinin sistematik olarak yapıldığı ilk çalışmalardan biridir.

6. DİFERENSİYEL OPERATÖRE AİT BAZI ÖZELLİKLER

Bu kısımda

$$L(\lambda)u := -r(x)u''(x) + \lambda u(x) = f(x), \quad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{6.1}$$

$$\begin{aligned} L_k u = \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) \\ + \gamma_k u^{(m_k)}(1) = f_k, \ (k = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{6.2}$$

şeklinde tanımlanan süreksiz katsayılı ve süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunduran sınır değer problemini göz önüne alacağız. Bu tip problemler fiziksel olarak farklı ortamlarda ısı yayılım problemleri olup standart olmayan problemler olarak da adlandırılmaktadır.

Burada,

$$r(x) = \begin{cases} r_1, & x \in [-1,0) \\ r_2, & x \in (0,1] \end{cases}$$

$r_1 \neq 0$, $r_2 \neq 0$ $(r_1 \neq r_2)$ şeklinde tanımlı sabit bir fonksiyon; λ bir kompleks parametre; α_k, β_k, η_k, γ_k, $(k = 1,2,3,4)$ kompleks katsayılar; $|\alpha_k| + |\beta_k| + |\eta_k| + |\gamma_k| \neq 0$; m_k $(k = 1,2,3,4)$ herhangi tamsayılardır.

6.1 Standart Olmayan Geçiş Şartlı Homojen Denklem

Öncelikle, ikinci mertebeden süreksiz katsayılı

$$L(\lambda)u := -r(x)u''(x) + \lambda u(x) = 0 \tag{6.3}$$

homojen diferensiyel denklemi ve

$$\begin{aligned} L_{k0} u := \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) \\ + \gamma_k u^{(m_k)}(1) = f_k, \ (k = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{6.4}$$

sınır şartlarından oluşan standart olmayan sınır değer probleminin genel çözümünü elde edelim.

Bu kısımda kullanacağımız bazı gösterimler aşağıda belirtilmiştir.

$$\omega_1 := r_1^{-1/2}, \omega_2 := -r_1^{-1/2}, \omega_3 := r_2^{-1/2}, \omega_4 := -r_2^{-1/2} \ ,$$

$$\underline{\omega}:=\min\left\{\arg r_1, \arg r_2\right\},$$

$$\bar{\omega}:=\max\left\{\arg r_1, \arg r_2\right\},$$

$$\theta:=\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{m_1} & \beta_1\omega_2^{m_1} & \eta_1\omega_3^{m_1} & \gamma_1\omega_4^{m_1} \\ \alpha_2\omega_1^{m_2} & \beta_2\omega_2^{m_2} & \eta_2\omega_3^{m_2} & \gamma_2\omega_4^{m_2} \\ \alpha_3\omega_1^{m_3} & \beta_3\omega_2^{m_3} & \eta_3\omega_3^{m_3} & \gamma_3\omega_4^{m_3} \\ \alpha_4\omega_1^{m_4} & \beta_4\omega_2^{m_4} & \eta_4\omega_3^{m_4} & \gamma_4\omega_4^{m_4} \end{vmatrix} \tag{6.5}$$

ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ reel sayısı için λ özdeğerlerinin kümesi

$$B(\varepsilon):=\left\{\lambda \in \mathbb{C} \,\middle|\, \pi + \bar{\omega} + \varepsilon < \arg\lambda < 3\pi + \underline{\omega} - \varepsilon\right\} \tag{6.6}$$

olsun.

$\lambda = \mu^2$ olmak üzere (6.3) denkleminin $u_i = u_i(x,\lambda)$ $(i = 1,2,3,4)$ temel çözümünü

$$u_i(x,\lambda):=\begin{cases} e^{\omega_i\mu(x-a_i)}, & x \in I_i \text{ için} \\ 0 \quad , & x \notin I_i \text{ için} \end{cases} \tag{6.7}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada, $x \in I_1$ için $a_1 = -1$, $a_2 = 0$ ve $x \in I_2$ için $a_3 = 0$, $a_4 = 1$, dır.

Buna göre (6.3) denkleminin genel çözümü

$$u(x,\lambda) = \sum_{k=1}^{4} C_k u_k(x,\lambda)$$

şeklinde yazılabilir.

(6.7) çözümü (6.4) sınır şartlarında yerine yazılırsa C_1, C_2, C_3, C_4 değişkenlerine göre

$$\begin{aligned} &(\omega_1\mu)^{m_k}(\alpha_k + \beta_k e^{\omega_1\mu})C_1 + (\omega_2\mu)^{m_k}(\alpha_k e^{-\omega_2\mu} + \beta_k)C_2 \\ &+(\omega_3\mu)^{m_k}(\eta_k + \gamma_k e^{\omega_3\mu})C_3 + (\omega_4\mu)^{m_k}(\eta_k e^{-\omega_4\mu} + \gamma_k)C_4 = f_k,\ k = 1,2,3,4 \end{aligned} \tag{6.8}$$

lineer fakat homojen olmayan denklemlerin bir sistemi elde edilir.

$\lambda \in B(\varepsilon)$ olduğundan $\omega_i\mu$ 'nün argümentlerinin bulunduğu sektörler

$$\frac{\pi+\varepsilon}{2} < \arg(\omega_i\mu) < \frac{3\pi-\varepsilon}{2},\ i = 1,3$$

ve

$$-\frac{\pi-\varepsilon}{2} < \arg(\omega_i\mu) < \frac{\pi-\varepsilon}{2},\ i=2,4$$

şeklindedir. Sonuç olarak, bu λ özdeğerleri ve yeteri kadar küçük olan $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$(-1)^{k+1}\operatorname{Re}(\omega_k\mu) \le -|\mu||\omega_k|\sin\frac{\varepsilon}{2},\ k=1,2,3,4. \tag{6.9}$$

yazılır.

Bunun sonucu olarak, (6.8) sisteminin katsayılar determinantı

$$\Delta(\lambda) = \lambda^{\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4} m_i}\left(\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{m_1} & \beta_1\omega_2^{m_1} & \eta_1\omega_3^{m_1} & \gamma_1\omega_4^{m_1} \\ \alpha_2\omega_1^{m_2} & \beta_2\omega_2^{m_2} & \eta_2\omega_3^{m_2} & \gamma_2\omega_4^{m_2} \\ \alpha_3\omega_1^{m_3} & \beta_3\omega_2^{m_3} & \eta_3\omega_3^{m_3} & \gamma_3\omega_4^{m_3} \\ \alpha_4\omega_1^{m_4} & \beta_4\omega_2^{m_4} & \eta_4\omega_3^{m_4} & \gamma_4\omega_4^{m_4} \end{vmatrix}\right.$$

$$\left. + e^{\lambda^{\frac{1}{2}}\sum_{i=1}^{4}(-1)^{i+1}m_i}\begin{vmatrix} \beta_1\omega_1^{m_1} & \alpha_1\omega_2^{m_1} & \gamma_1\omega_3^{m_1} & \eta_1\omega_4^{m_1} \\ \beta_2\omega_1^{m_2} & \alpha_2\omega_2^{m_2} & \gamma_2\omega_3^{m_2} & \eta_2\omega_4^{m_2} \\ \beta_3\omega_1^{m_3} & \alpha_3\omega_2^{m_3} & \gamma_3\omega_3^{m_3} & \eta_3\omega_4^{m_3} \\ \beta_4\omega_1^{m_4} & \alpha_4\omega_2^{m_4} & \gamma_4\omega_3^{m_4} & \eta_4\omega_4^{m_4} \end{vmatrix}\right)$$

$$= \lambda^{m/2}(\theta+\psi(\lambda)) \tag{6.10}$$

şeklinde yazılabilir. Burada $m = m_1 + m_2 + m_3 + m_4$ ve eğer,

$$\lambda \in B(\varepsilon) \text{ ve } |\lambda| \to \infty \text{ ise } \psi(\lambda) \to 0 \tag{6.11}$$

dır. $\theta \ne 0$ olduğundan öyle bir $N > 0$ sayısı vardır ki bütün kompleks $\lambda \in B(\varepsilon)$ sayıları ve $|\lambda| > N$ için $\Delta(\lambda) \ne 0$ yazabiliriz. Bu yüzden, bu λ özdeğerleri için (6.8) sistemi tek türlü

$$C_i(\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\sum_{k=1}^{4}\Delta_{ik}(\lambda) f_k\ ,\ i=1,2,3,4$$

çözümüne sahiptir. Burada $\Delta_{ik}(\lambda)$, $\Delta(\lambda)$ determinantının (i,k)-inci elemanının cebirsel komplemanı (tamamlayıcısı) dır. Bu determinant,

$$\Delta_{ik}(\lambda) = (\theta_{ik} + \psi_{ik}(\lambda))\lambda^{(m-m_k)/2} \tag{6.12}$$

şeklinde olup θ_{ik} kompleks sayılar, $\lambda \in B(\varepsilon)$ ve $|\lambda| \to \infty$ için $\psi_{ik} \to 0$ dır. O halde $C_i(\lambda)$ ifadeleri

$$C_i(\lambda) = \sum_{k=1}^{4} \lambda^{-m_k/2} \frac{\theta_{ik} + \psi_{ik}(\lambda)}{\theta + \psi(\lambda)} f_k \ , \ i = 1,2,3,4$$

biçiminde elde edileceğinden (6.3)-(6.4) sınır değer probleminin çözümü

$$u(x,\lambda) = \sum_{i=1}^{4}\sum_{k=1}^{4} \lambda^{-m_k/2} \frac{\theta_{ik} + \psi_{ik}(\lambda)}{\theta + \psi(\lambda)} f_k u_i(x,\lambda) \qquad (6.13)$$

şeklinde bulunur.

6.1. Teorem $\theta \neq 0$ ise $\varepsilon > 0$ ve $\lambda \in B(\varepsilon)$ olmak üzere öyle bir $N > 0$ sayısı vardır ki $|\lambda| > N$ ve $l \geq \max\{2, \max\{m_1, m_2, m_3, m_4\} + 1\}$ için (6.3)-(6.4) probleminin $u(x,\lambda)$ çözümü için

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u\|_{q,k} \leq C(\varepsilon) \sum_{\upsilon=0}^{4} |\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} |f_\upsilon| \qquad (6.14)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat.

(6.13) çözümü göz önüne alındığında her $l \geq 0$ tam sayısı için

$$\left\|u^{(l)}\right\|_{L_q(-1,1)} \leq C \sum_{k=1}^{4} \left(|\lambda|^{(l-m_k)/2} |f_k| \sum_{i=1}^{4} \|u_i(.,\lambda)\|_{L_q(\Omega_i)} \right) \qquad (6.15)$$

eşitsizliği elde edilir. Ayrıca, (6.7) den $\lambda \in B(\varepsilon)$ ve $|\lambda| \to \infty$ için

$$\begin{aligned} \|u_1(.,\lambda)\|_{L_q(-1,0)}^q &= \int_{-1}^{0} e^{q\operatorname{Re}(\omega_1\mu)(x+1)} dx \leq \int_{-1}^{0} e^{-q|\mu||\omega_1|\sin(\varepsilon/2)(x+1)} dx \\ &= (-q|\mu||\omega_1|\sin(\varepsilon/2))^{-1}(e^{-q|\mu||\omega_1|\sin(\varepsilon/2)} - 1) \\ &\leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1/2q} \end{aligned} \qquad (6.16)$$

yazılabilir.

Benzer bir yol takip edilerek, $\lambda \in B(\varepsilon)$ ve $|\lambda| \to \infty$ için

$$\|u_1(.,\lambda)\|_{L_q(\Omega_i)}^q \leq C(\varepsilon)|\lambda|^{-1/2q} \ , \ i = 2,3,4 \qquad (6.17)$$

olduğu görülür. bu eşitsizlikler (6.15) de yerine yazılırsa

$$\left\| u^{(l)} \right\|_{L_q(-1,1)}^{q} \le C(\varepsilon) \sum_{k=1}^{4} |\lambda|^{(l-m_k-1/q)/2} \, |f_k| \tag{6.18}$$

eşitsizliği bulunur. (6.15)-(6.18) eşitsizliklerinden (6.14) elde edilir.

6.2 Homojen Olmayan Sınır Değer Problemin Fredholm Olma Özelliği

$l \ge 0$ olmak üzere

$$\mathcal{L}: W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \to W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$$

$\mathcal{L}$ lineer diferensiyel operatörü

$$\mathcal{L}u = (-r(x)u'', L_1u, L_2u, L_3u, L_4u) \tag{6.19}$$

şeklinde tanımlanmış olsun.

6.2. Teorem $\mathcal{L}$ lineer operatörü sınırlı ve Fredholm operatörüdür.

İspat. $W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1)$ Sobolev uzayının direkt toplamını göz önüne alalım.

$$\mathcal{L}_0 u = (-r(x)u'' + \lambda_0 u, L_{10}u, L_{20}u, L_{30}u, L_{40}u)$$

ve

$$\mathcal{L}_1 u = \left(-\lambda_0 u, (L_1 - L_{10})u, (L_2 - L_{20})u, (L_3 - L_{30})u, (L_4 - L_{40})u\right)$$

şeklinde gösterelim. Burada $\lambda_0 \in B(\varepsilon)$, göz önüne alınan sektörde yeterince büyük kompleks sayılardır. Teorem 6.1 den dolayı

$$\mathcal{L}_0 : W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \to W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$$

şeklinde tanımlı $\mathcal{L}_0$ lineer operatörü bir izomorfizmdir. Ayrıca,

$$\mathcal{L}_1 : W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \to W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$$

$\mathcal{L}_1$ operatörünün kompakt olduğu kolayca görülebilir. Bu durumda, lineer operatörler için $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1$ Fredholm pertürbasyon teoremi uygulanabilir. Fredholm pertürbasyon teoremine göre eğer $\mathcal{L}_0$ operatörünün tersinebilir ve $\mathcal{L}_1$ operatörünün kompakt olduğu gösterilebilirse bu durumda $\mathcal{L}$ operatörünün Fredholm operatörü olma özelliğini sağladığı söylenir. O halde, $\mathcal{L}_0$ operatörü bir izomorfizm (ve böylece tersinebilir) ve $\mathcal{L}_1$ operatörü kompakt olduğundan $\mathcal{L}$ operatörü Fredholm operatörüdür. Ayrıca, $\mathcal{L}$ operatörünün sınırlı olduğu (operatörlerin kompaktlık kriterlerinden) açıktır. O halde, ispat tamamlanır.

6.3 Geçiş Şartlı Homojen Olmayan Sınır Değer Problemin İzomorfizmi

(6.1)-(6.2) problemini göz önüne alalım. Yani,

$$\mathcal{L}(\lambda)u := -r(x)u''(x) + \lambda u(x) = f(x) \tag{6.20}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{k0}u &:= \alpha_k u^{(m_k)}(-1) + \beta_k u^{(m_k)}(-0) + \eta_k u^{(m_k)}(+0) \\ &+ \gamma_k u^{(m_k)}(1) = f_k,\ (k = 1,2,3,4) \end{aligned} \tag{6.21}$$

şeklinde tanımladığımız süreksiz katsayılı ve süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunduran standart olmayan sınır değer problemini göz önüne alalım. Ayrıca, bu sınır değer problemine ait diferensiyel operatörü

$$\mathcal{L}_0 u = (L(\lambda)u, L_{10}u, L_{20}u, L_{30}u, L_{40}u) \tag{6.22}$$

şeklinde tanımlayalım.

6.3. Teorem $\theta \neq 0$ ve $l \geq 0$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı için burada öyle bir $N > 0$ vardır öyle ki yeteri kadar büyüklükte her $\lambda \in B(\varepsilon)$ kompleks sayıları için $|\lambda| > N$ olduğunda

$$\mathcal{L}_0(\lambda) : W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1) \to W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$$

şeklinde tanımlanan $\mathcal{L}_0(\lambda)$ operatörü bir izomorfizmdir ve bu λ lar için

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u\|_{q,k} \leq C(\varepsilon)\left(\|f\|_{q,l-2} + |\lambda|^{(l-2)/2} \|f\|_{L_q} + \sum_{\upsilon=1}^{4} |\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} |f_\upsilon| \right) \tag{6.23}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $\mathcal{L}_0(\lambda)$ lineer bir operatör olduğundan $W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1)$ den $W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$ üzerine sürekli olduğu açıktır. $\left(f(x), f_1, f_2, f_3, f_4\right)$, $W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$ Sobolev uzayının herhangi bir elemanı olsun. (6.20)-(6.21) probleminin $u(x,\lambda) = u_1(x,\lambda) + u_2(x,\lambda)$ toplamı şeklindeki $u(x,\lambda)$ çözümlerini araştıracağız. $I_1 = (-1,0)$ ve $I_2 = (0,1)$ kısa gösterimlerini kullanalım. $\upsilon = 1,2$ için $f_\upsilon(x)$ ile I_υ aralığı üzerinde $f(x)$ in kısıtlaması gösterilecektir.

$\tilde{f}_\upsilon(.) \in W_q^{l-2}(\mathbb{R})$, $f_\upsilon(.) \in W_q^{l-2}(I_\upsilon)$ nin bir genişlemesi olsun öyle ki bu uzantı operatörü $\upsilon = 1,2$ için $S_\upsilon f_\upsilon := \tilde{f}_\upsilon$, $W_q^{l-2}(I_\upsilon)$ den $W_q^{l-2}(\mathbb{R})$ içine sınırlıdır. Burada, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ dur.

İlk olarak, $\upsilon = 1,2$ için,

$$-r_\upsilon(x)u''(x) + \lambda u(x) = \tilde{f}_\upsilon(x), x \in \mathbb{R} \tag{6.24}$$

denklemlerini göz önüne alalım. [45] deki Teorem 3.2.1 uygulandığında bu denklemin bir tek $\tilde{u}_{1\upsilon} = \tilde{u}_{1\upsilon}(.,\lambda) \in W_q^l(\mathbb{R})$ çözümünün olduğu görülür ve $u_{1\upsilon}(x,\lambda)$ (I_υ aralığı üzerinde $\tilde{u}_{1\upsilon}(x,\lambda)$ nin kısıtlaması), her $\lambda \in B(\varepsilon)$ kompleks sayıları için

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u_{1\upsilon}\|_{W_q^k(I_\upsilon)} \le C(\varepsilon)\left(\|f\|_{W_q^{l-2}(I_\upsilon)} + |\lambda|^{(l-2)/2} \|f\|_{L_q(I_\upsilon)}\right), \ \upsilon = 1,2 \tag{6.25}$$

eşitsizliğini sağlar. Sonuç olarak,

$$u_1(x,\lambda) = \begin{cases} u_{11}(x,\lambda), & x \in (-1,0) \\ u_{12}(x,\lambda), & x \in (0,1) \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $u_1(x,\lambda) \in W_q^l(-1,0) \dotplus W_q^l(0,1)$ fonksiyonu (6.20) denklemini sağlar. Bu çözüm açısından aşağıdaki sınır değer problemi inşa edilebilir.

$$-r(x)u''(x) + \lambda u(x) = 0, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1] \tag{6.26}$$

$$\mathcal{L}_{k0}u = f_k - \mathcal{L}_{k0}u_1(.,\lambda), \ k = 1,2,3,4. \tag{6.27}$$

Teorem 6.1 gereğince tanım aralığında yeteri büyüklükte her $\lambda \in B(\varepsilon)$ kompleks sayıları için bu problemin $W_q^l(-1,0) \dotplus W_q^l(0,1)$ e ait tek bir $u_2 = u_2(x,\lambda)$ çözümü vardır ve bu λ değerleri için

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u_2\|_{q,k} \le C(\varepsilon) \sum_{\upsilon=1}^{4} |\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} \left(|f_\upsilon| + |L_{\upsilon 0}u_1|\right) \tag{6.28}$$

eşitliği geçerlidir. Teorem 6.1 ve ([45], Teorem 1.7.7/2) dikkate alınırsa, her $\lambda \in B(\varepsilon)$ ve $l \ge 0$ için,

$$\begin{aligned} |\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} |L_{\upsilon 0}u_1| &\le C|\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} \|u_1\|_{C^{m_\upsilon}[-1,0]+C^{m_\upsilon}[0,1]} \\ &\le C\left(|\lambda|^{1/2} \|u_1\|_{q,0} + \|u_1\|_{q,l}\right) \end{aligned}$$

$$\leq C(\varepsilon)\left(\| f\|_{q,l-2} + |\lambda|^{(l-2)/2} \| f\|_{q,0}\right) \tag{6.29}$$

eşitliği yazılabilir. (6.28) ve (6.29) dan aşağıdaki eşitlik kolay bir şekilde görülebilir.

$$\sum_{k=0}^{l} |\lambda|^{(l-k)/2} \|u_2\|_{q,k} \leq C(\varepsilon)\left(\| f\|_{q,l-2} + |\lambda|^{(l-k)/2} \| f\|_{q,0} + \sum_{\upsilon=1}^{4} |\lambda|^{(l-m_\upsilon-1/q)/2} | f_\upsilon| \right). \tag{6.30}$$

$u(x,\lambda) = u_1(x,\lambda) + u_2(x,\lambda)$ olarak tanımlanan $u(x,\lambda)$ fonksiyonunun, göz önüne alınan (6.20)-(6.21) probleminin çözümü olduğunu görmek kolaydır. (6.25) ve (6.30) eşitliklerini dikkate alarak bu çözüm için gerekli olan (6.23) eşitliğinin geçerli olduğunu görebiliriz. (Dahası, (6.23) eşitliğinden çözümün tekliği de söylenir.)

Diğer taraftan, Teorem 6.2 gereğince $\mathcal{L}$ operatörü, $W_q^l(-1,0) \dot{+} W_q^l(0,1)$ den $W_q^{l-2}(-1,0) \dot{+} W_q^{l-2}(0,1) \dot{+} \mathbb{C}^4$ üzerine Fredholm operatörü olmasından dolayı tersinebilirdir. Buradan da izomorfizm olduğu açıktır. Bu da ispatı tamamlar.

7. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında, Sobolev uzayların direkt toplamında göz önüne almış olduğumuz süreksiz katsayılı ve süreksizlik noktasında geçiş şartları bulunduran sınır şartlarına sahip sınır değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği gösterilmiştir. Bunun devamında standart olmayan bu sınır değer problemi yardımıyla üretilen lineer diferensiyel operatörün sınırlılığı ve hangi şartlar altında Fredholm operatörü olabileceği incelenmiştir. Buradan hareketle diferensiyel operatörün Fredholm operatörü ve birebir olmasından izomorfizm olduğu da verilen teoremle ispatlanmıştır.

Bizim bu çalışmamızın devamında, diferensiyel denkleminde eliptik, hiperbolik veya parabolik operatörler bulunduran problemler kurulabilir. Diğer taraftan sınır şartlarına çok noktalı şartlar, fonksiyoneller veya sınırsız lineer operatörler yazılması suretiyle de farklı nonlokal sınır değer problemleri oluşturulabilir. Bu tip sınır değer problemleri yardımıyla üretilen diferensiyel operatörün özellikleri için benzer çalışmalar yapılabilir.

8. KAYNAKLAR

[1] Adams, R.A. Sobolev spaces. ***Academic Press***, New York., 1975.

[2] Adams R. A. and Fournier J. J. F., Sobolev Spaces, Second Edition, Department of Mathematics, ***The University of British Columbia***, Vancouver, Canada. 2002.

[3] Akın, Ö. Bilgisayar Destekli ve Matematiksel Modellemeli Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri. ***Palme Yayıncılık***, Ankara.(Çeviri: Adwards&Penney), 2005.

[4] Aliev B. A. , Yakubov Ya., Elliptic-differential operator problems with a spectral parameter in both the equation and boundary-operator conditions. ***Advances in Differential Equations***, Vol. 11, Num. 10 1081-1110., 2006.

[5] Aliev B. A., Yakubov Ya.. Second order elliptic-differential-operator equations with unbounded operator boundary conditions in UMD Banach spaces, ***Integr. Equ. Oper. The***. 69,269-300., 2011.

[6] Atkinson K. and W. Han, Theoretical Numerical Analysis: A Functional Analysis Framework, Texts in Applied Mathematics 39, DOI: 10.1007/978-1-4419-0458-4_2, **©** ***Springer Science + Business Media, LLC***, 2009.

[7] Balcı M., Reel Analiz, Sürat Üniversite Yayınları, 2013.

[8] Belton A. C. R., Functional Analysis, ***Lady Margaret Hall Oxford***, 2004.

[9] Bergh J. and Löfström J., Interpolation Spaces. ***Springer***, Berlin, Heidelberg, New York, 1976.

[10] Bitsadze A. V. and Samarskii A. A.,. On some simplest generalizations of linear elliptic problems, ***Dokl. Akad. Nauk***, SSSR 185, 398-400., 1969.

[11] Borsuk M., Transmission Problems for Elliptic Second-Order Equations in Non-Smooth Domains, ***Springer***, Basel AG, 2010.

[12] Cannon J. R. And Meyer G. H., On Diffusion İn A Fractured Medium, ***SIAM J. Appl. Math***. 20, 434+L8, 1971.

[13] Demengel F., Demengel G., Functional Spaces for the Theory of Elliptic Partial Differential Equations, Universitext, DOI 10.1007/978-1-4471-2807-6 2, © ***Springer-Verlag, London Limited***, 2012.

[14] Grisvard, P., Elliptic Problems in Nonsmooth Domains. ***Pitman***, Boston., 1985.

[15] Hans-Dieter Alber, Lecture Notes on Linear Partial Differential Equations, ***Technische Universit□at Darmstadt SS***, 2012.

[16] Huy H. P. - Sanchez P., Phenom ´ enes des transmission ` a` travers des couches minces de conductivite´ elev ´ ee´ , ***J. Math. Anal. Appl***. 47, 284-309, 1974.

[17] Kandemir M. Irregular boundary value problems for elliptic differential-operator equations with discontinuous coefficients and transmission conditions. ***Kuwait Journal of Science and Engineering*** 39 (1A), 71-97, 2012.

[18] Kandemir M., Nonlocal boundary value problems with transmission conditions, ***Gulf Journal of Mathematics*** Vol:3, Issue 1, 1-17, 2015.

[19] Kandemir M., Diferensiyel Denklemler, ***Pegem Akademi Yayıncılık***, Ankara, 2015.

[20] Kandemir M., Mukhtarov O. Sh. and Yakubov, Ya. Irregular boundary value problems with discontinuous coefficient and the eigenvalue parameter, ***Mediterranean Journal of Mathematics***, 6: 317-338, 2009.

[21] Kandemir M., Yakubov Ya. Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions, and a linear spectral parameter. ***Israel Journal of Mathematics***, 180: 255-270, 2010.

[22] Krein S. G., Linear Differential Equations in Banach Space, ***Providence***, 1971.

[23] Krein S. G., Linear Equations in Banach Spaces, ***Birkhauser***, 1982.

[24] Lancia M. R., On Some Second Order Transmission Problems, ***The Arabian Journal for Science and Engineering***, Volume 29, Number 2C., 2004.

[25] Lankham I., Nachtergaele B., Schilling A., Linear Span and Bases, ***University of California, Davis***, 2007.

[26] Lunardi A., Interpolation Theory. ***Appunti. Scuola Normale Superiore***, Pisa, 1999.

[27] Mukhtarov O. Sh., Yakubov S. , Problems for ordinary differential equations with transmission conditions. ***Applicable Analysis***, 81, 1033-1064, 2002.

[28] Mukhtarov O. Sh., Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary conditions. ***Turkish J. Math***. 18, No.2:183-192, 1994.

[29] Mukhtarov O. Sh. and Demir H. Coerciveness of the Discontinuous Initial-Boundary Value Problem for Parabolic Equation. ***Israel Journal of Mathematics*** 114: 239-252, 1999.

[30] Naimark M. A., Linear Differential Operators, ***Ungar***, New York, 1967.

[31] Pala Y., Modern Uygulamalı Diferensiyel Denklemler, Ankara, 2006

[32] Reiter M., Schuster A., Fourier Transform & Sobolev Spaces, 2008.

[33] Rudin W., Functional analysis, second edition, ***Mc Graw-Hill***, Inc., New York, [Cited on pages 26, 68 and 94.], 1991.

[34] Rudin W., Real and complex analysis. ***McGraw-Hill***, Book Co., New York, third edition, 1987.

[35] Shakhmurov V. B. Linear and nonlinear abstract elliptic equations with VMO coefficients and applications, ***Fixed Point Theory and Applications***, V. 2013, no 6., 2013.

[36] Shakhmurov V. B. Coercive boundary value problems for degenerate anisotropic equations, ***Izvestiya Vushkh Uchebnykh Zavedenie Matematika***,(8), 69-78., 1989.

[37] Skbachevskii A. L., Nonlocal elliptic problems with a parameter, Math. Sb. 49, 197-206, 1984.

[38] Soykan, Y., Foksiyonel Analiz, ***Nobel Akademi Yayınları***, Ankara, 2012.

[39] Stein, E.M. Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions, ***Princeton University Press***, Princeton, 1970.

[40] Şuhubi E. S., Fonksiyonel Analiz, ***İstanbul Teknik Üniversitesi Vakfı Yayınları***, İstanbul, 2001.

[41] Tartar L., An introduction to Sobolev spaces and interpolation spaces, volume 3 of Lecture Notes of the Unione Matematica Italiana. ***Springer***, Berlin, 2007.

[42] Titeux I., Yakubov Ya., Completeness of root functions for thermal conduction in a strip with piecewise continuous coefficients. Math. Models and Methods in Applied Sciences, 7, No. 7 1035-1050, 1997.

[43] Triebel H., Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators, ***North-Holland Publishing Company***, Amsterdam, New York, Oxford, 1978.

[44] William F. Trench Andrew G. Cowles, Elementary dıfferentıal equatıons wıth boundary value problems, Department of Mathematics Trinity University, San Antonio, Texas, USA, 2013.

[45] Yakubov S., Yakubov Ya., Differential-Operator Equation Ordinary and Partial Differential Equation, ***Chapman and Hall/CRC Boca Raton***, London New York Washington, D. C, 1999.

[46] Yakubov S., A nonlocal boundary value problem for elliptic differential-operator equations and applications. ***Integral Equations and Operator Theory***, 35, 485-506., 1999.

[47] Yakubov Ya., Irregular boundary value problems for ordinary differential equations. Analysis 18, 359-402, 1998.

[48] Yakubov S., Completeness of Root Functions of Regular Differential Operators, Longman, Scientific, Technical, New York, 1994.

9. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

29 Eylül 1989 yılında İstanbul Fatih'te doğdu. İlk ve ortaokul öğrenimini Yunus Emre İlköğretim Okulu'nda, lise öğrenimini ise İzzet Ünver Lisesi (YDA) 'nde tamamladı. 2008 yılında girdiği Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü'nden Ağustos 2012'de Matematikçi unvanıyla mezun oldu. Ocak 2013'te Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı'nda Yüksek Lisans öğrenimine başladı. İngilizce bilmektedir.

İLETİŞİM BİLGİLERİ:

Adres: Amasya Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı, Merkez, Amasya

Elmek: ahmetbuyuk89@gmail.com