T.C
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YENİ TİP KONNEKSİYONLAR İLE RİEMANN SUBMERSİYONLAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Hakan Demir

ŞUBAT 2021

YENİ TİP KONNEKSİYONLAR İLE RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Hakan DEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DANIŞMAN
Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ŞUBAT 2021

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu, bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Hakan DEMİR

YENİ TİP KONNEKSİYONLAR İLE RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Yüksek Lisans Tezi

Hakan DEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Şubat 2021

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde Riemann manifoldu ile ilgili temel kavramlar incelendikten sonra Riemann manifoldlarının alt manifoldları, semi-simetrik metrik konneksiyon ve quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımları sunuldu. Son olarak Riemann submersiyonları incelendi. İkinci bölümde Semi simetrik metrik konneksiyon ile tanımlı Riemann submersiyonunda temel tensörler elde edildi; buna bağlı olarak bu konneksiyona ait teoremler ispatlandı. Ayrıca iki manifold arasındaki submersiyondan faydalanarak eğrilik özellikleri karşılaştırıldı. Sön bölümde quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Riemann submersiyonunda temel tensörler ve temel teoremler ispatlandı, vertical ve horizantal uzaylarda eğrilikler incelendi.

Sayfa Adedi	:	58
Anahtar Kelimeler	:	Riemann submersiyon, temel tensör, eğrilik, semi simetrik metrik konneksiyon, quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon distribüsyon, vektör demeti.
Danışman	:	Dr. Öğr. Üyesi Ramazan SARI

NEW TYPE CONNECTIONS WITH RIEMANN SUBMERSIONS

M.Sc. Thesis

Hakan Demir

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

Fabruary 2021

ABSTRACT

In the first part of this three-part study, after examining the basic concepts of Riemannian manifolds, the definitions of sub-manifolds, semi-symmetric metric connection and quarter symmetric non-metric connection are presented. Finally, Riemann submersions are introduced. In the second chapter, fundamental tensors in Riemann submersion defined by semi-symmetric metric connection are obtained, and theorems belonging to this connection are proved accordingly. In addition, curvature properties were compared using submersion between the two manifolds. In the last chapter, fundamental tensors and fundamental theorems are proved in Riemann submersion with quarter symmetric non metric connection, curvatures in vertical and horizontal spaces are examined.

Page Number : 58
Key Words :Riemann submersion, fundamental tensor, curvatures semi-symmetric metric connection, quarter symmetric non metric connection, distribution, vector bundle.
Supervisor : Asist. Prof. Dr. Ramazan SARI

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmada; iki Riemann manifoldu arasında tanımlı Riemann submersiyonu farklı konneksiyonlarla incelenmiş ve sonuçları üzerinde durulmuştur. Semi simetrik metrik konneksiyon ve quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Riemann submersiyonları için O'Neill tensörleri tanımlanmış ve buna bağlı olarak türev özellikleri elde edilmiştir. Ayrıca her iki konneksiyonlu Riemann submersiyonunda temel eğrilik özellikleri araştırılmıştır.

Bu tezin hazırlanmasında çalışmalarım süresince beni destekleyen, bana yön veren ve yazımı sırasında değerli zamanını ayırarak yardım eden tez danışmanım sayın Dr. Öğr. Üyesi Ramazan Sarı'ya teşekkür ederim. Bu dönem boyunca her konuda desteklerini esirgemeyen eşim Meryem Demir ve çocuklarım Zeynep, Mustafa ve Ali Çınar Demir'e sonsuz teşekkür eder sevgilerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET iv

ABSTRACT...v

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR...vi

İÇİNDEKİLER vii

SİMGELER DİZİNİ viii

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 4

2.1. Riemann Manifold..4

2.2 İmmersiyonlar 7

2.3. Riemann Submersiyonlar 9

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE TANIMLI RİEMANN SUBMERSİYONLAR..13

3.1. Temel Tensörler 13

3.2.Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon İle Tanımlı Riemann Submersiyonunda Eğrilik Özellikleri...24

4. QUARTER-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYON İLE TANIMLI RİEMANN SUBMERSİYONLAR 42

4.1.Temel Tensörler 43

4.2.Quarter-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyon İle Tanımlı Riemann Submersiyonda Eğrilik Özellikleri...50

5. SONUÇ VE ÖNERİLER..55

KAYNAKLAR 56

ÖZGEÇMİŞ 58

SİMGELER DİZİNİ

Simgeler	**Açıklama**
M	Diferensiyellenebilir manifold
g	Riemann metriği
$C^{\infty}(M,\mathbb{R})$	M de $\mathbb{R}$ ye diferensiyellenebilir fonksiyonlar
T_pM	M nin p noktasındaki teğet uzayı
$\chi(M)$	Vektör alanlarının uzayı
ψ_*	Türev dönüşümü
∇	Lineer konneksiyon
R	Riemann eğrilik tensörü
K	Riemann- Chiristoffel eğrilik tensörü
$[,]$	Lie Braket (parantez operatörü)
$\ker\psi_*$	Dikey distribüsyon
$\ker\psi_*^{\perp}$	Yatay distribüsyon
$\Vert\ \Vert$	Norm
T	Dikey tensör alanı
A	Yatay tensör alanı
η	1-form
φ	(1,1) tipinde tensör alanı

1. GİRİŞ

Diferensiyel geometrinin en önemli kavramlarından birisi manifold kavramıdır. Manifoldlar teorisi incelenirken kullanılan en etkili yöntemlerden birisi, diğer manifoldda uygun bir dönüşüm tanımlamaktır. Bu dönüşümler sayesinde manifoldların geometrisi ve temel özellikleri daha iyi anlaşılmaktadır. Bu noktada karşımıza iki temel dönüşüm çıkmaktadır. Bunlar, immersiyon ve submersiyonlardır. İmmersiyon teorisi diferensiyel geometride en çok incelenen konularından biridir.

Riemann manifoldlar arasındaki temel dönüşümlerden olan izometrik immersiyon Riemann metrik ve Jacobien matrisle ifade edilir. İzometrik immersiyonlar Gauss'un yüzeyler üzerine olan çalışmaları ile başladı. Üç boyutlu Öklidyen uzaydaki her yüzey aynı zamanda ek boyutu bir olan bir izometrik immersiyondur. Ek boyutun birden fazla olması durumu altmanifold olarak adlandırılır. 1950'li yıllardan itibaren araştırmacılar altmanifoldlar üzerine yoğunlaşmaya başladı ve 1973 yılına kadar yapılan çalışmalar Chen tarafından bir kitapta bir araya getirildi (Chen,1973). Literatüre eklenen bu çalışmadan sonra altmanifoldlar teorisi büyük ivme kazanarak daha farklı alanlarda incelenmeye başlandı. Ardından bu teori kompleks manifoldlara, kontakt manifoldlara ve kuaterniyon manifoldlara taşındı.

İzometrik immersiyonların submersiyonlardaki karşılığı olan Riemann submersiyonlar ilk defa O'Neill ve Gray tarafından 1966 ve 1967 yıllarında birbirinden bağımsız olarak tanımlandı ve çalışıldı (O'Neill, 1966), (Gray, 1967). Bu tür dönüşümler esas olarak negatif eğrilikli manifoldların inşası için tanımlandı, fakat daha sonra bu tür dönüşümlerin manifoldları karşılaştırmada çok kullanışlı olduğu görüldü. O'Neill, Riemann submersiyonlar için iki temel tensör alanı tanımlamış ve bu tensörlerin, izometrik immersiyonlardaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık geldiğini göstermiştir. Bu çalışmalarda görüldü ki submersiyonlar kullanılarak, geometrik özellikleri bilinen bir manifold yardımıyla, esas manifoldun özellikleri çok daha kolay incelenebilmektedir. Bu nedenle submersiyon dönüşümleri başta mühendislik ve fizik olmak üzere birçok bilim dalında kullanılmakta ve geliştirilmektedir.

Riemann submersiyonlar birçok bilim dalında geniş yer tutmaktadır. Matematiksel fizikte özellikle Kaluza-Klein teoride Einstein denklemlerinin genel çözümü için geliştirilen yeni yöntemler harmonik dönüşümlerle ifade edilebilmektedir. Üstelik çözümler için çok genel bir sınıf Riemann submersiyonlar tarafından ifade edilebilmektedir. Ayrıca, Riemann submersiyonlar Yang-mills teori (Bourguignon & Lawson, 1981), supergravity ve superstring teori uygulamaları vardır.2003 yılında Kenedey genelleştirilmiş Einstein-Witten manifoldlar üzerinde Einstein metriklerin varlığını Riemann submersiyonlar kullanarak kanıtlamıştır (Kennedy, 2003). 2004 yılında Falcitelli ve arkadaşları skaler alanda değer alan ilave boyutlu uzayların çözümünü Riemann submersiyonlar kullanarak hesapladılar (Falcitelli, Ianus, & Pastore, 2004).Eğrilik kavramı geometride ve fizikte önemli bir yere sahiptir. Anlık hareket için gerekli kuvvetin büyüklüğü, bir eğrisel yol boyunca sabit hızlı bir cisim Newton yasalarına göre yörüngenin eğriliğinin sabit bir katıdır. Einstein'e göre bir kütle çekim alanındaki bir cismin hareketi, uzay-zamanın eğriliği ile belirlenir.

Diğer taraftan Riemann submersiyonlar medikal görüntülemede projeksiyon olarak (Memoli, Sapiro, & Thompson, 2004), manifoldlar üzerindeki istatistiksel analiz de (Bhattacharya & Patrangenarub, 2002), özellikle son dönemde robotik teoride (Altafini, 2004) sıkça kullanılmaya başlanmıştır.

Bir manifold üzerinde semi simetrik konneksiyon ilk defa 1924 yılında Friedman ve Schouten tarafından tanımlandı. Daha sonra 1932 de Hayden, semi simetrik metrik konneksiyonu tanımladı ve bu konneksiyonun temel özelliklerini çalıştı. 1970 te Yano, semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann manifoldlarını inceledi. Agashi ve Chafle semi simetrik non metrik konneksiyonlu Riemann manifoldları çalıştı ve temel eğrilikleri elde ettiler. 1975 yılında S.Golab, quarter simetrik lineer konneksiyonu tanımladı. 2018 e gelindiğinde Akyol ve Beğendi, Riemann submersiyonlarda farklı konneksiyonları inceleme fikrini ortaya atmışlar ve semi simetrik non metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonları ilk defa tanımlamış ve çalışmışlardır. Bu çalışmalarında Riemann submersiyonlar için temel kavramlar olan O'Neill tensörlerini, bu tensörlerin temel özelliklerini ve eğrilik ilişkilerini semi simetrik metrik olmayan konneksiyon kullanarak incelemişlerdir.(Akyol ve Beğendi,2018).

Bu tezde ilk defa semi simetrik metrik konneksiyon ve quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon yardımıyla Riemann submersiyonlar incelendi. Riemann submersiyonlar için temel tensörler olan O’ Neill tensörleri her iki konneksiyon için tanımlandı ve temel özellikleri araştırıldı. Bu konneksiyonlar için vertical ve horizantal uzayın türev özellikleri çalışıldı. Yine bu konneksiyonlar için vertical ve horizantal uzayda Riemann eğrilikleri elde edildi.

Tezin ikinci bölümünde, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılması için konu ile ilgili temel kavramlara değinildi ve buna bağlı olarak bazı tanım ve teoremlere yer verildi.
Üçüncü bölümde semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonlar tanıtıldı. O’Neill tarafından tanımlanan temel tensörler semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonlar için tanımlandı ve buradan hareketle temel özellikler incelendi. Ardından semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonların vertical ve horizantal uzayları için Riemann eğrilikleri incelendi. Tezin dördüncü bölümde ise quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Riemann submersiyonlar incelendi. O’Neill tensörleri quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon için tanımlandı ve bu tensörlere bağlı olarak Riemann submersiyonun temel özellikleri araştırıldı. Son olarak bu konneksiyon için vertical ve horizantal uzaylarda temel eğrilik özellikleri incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde Riemann manifoldu için gerekli temel bilgiler ve Riemann manifoldu kavramları tanıtılmıştır. İkinci bölümde alt manifoldlara değinilerek immersiyon ve izometrik immersiyon kavramları kısaca açıklanmıştır. Üçüncü bölümde semi-simetrik metrik konneksiyon ve quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımı ve bazı özellikleri tanıtılmıştır. Bu bölümde ayrıca submersiyon ve Riemann submersiyon kavramlarına yer verilerek O'Neill tarafından tanımlanan temel tensörler sunulmuştur.

2.1. Riemann Manifold

Tanım 2.1.1 Diferensiyellenebilir bir manifold *N* olsun. *N* üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(N)$ ve *N* den $\mathbb{R}$ ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(N,\mathbb{R})$ olmak üzere

$$g:\chi(N)\times\chi(N)\to C^\infty(N,\mathbb{R})$$

dönüşümü bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye N üzerinde bir Riemann metriği veya metrik tensör ve *(N,g)* ikilisine de bir *Riemann manifoldu* adı verilir.(Hacısalihoğlu,1983:24-173)

Tanım 2.1.2. $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$, $\varphi=(f_1, f_2,..., f_m)$ olsun $v_p\in T_p(\mathbb{R}^n)$ için

$$\varphi_{*p}(v_p)=(v_p\left[f_1\right],\ v_p\left[f_2\right],\ ...\ ,v_p\left[f_m\right]\ )_{\varphi_{(p)}}$$

eşitliği ile tanımlı

$$\varphi_{*p}=T_p(\mathbb{R}^n)\to T_{\varphi_{(p)}}\mathbb{R}^m$$

dönüşümüne p noktasındaki *türev dönüşümü* denir (Sabuncuoğlu,2006:12).

Tanım 2.1.3. *N*, diferensiyellenebilir bir manifold, $\chi(N)$ de *N* deki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi olsun. $f\in C^\infty(N,\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[\ ,\ ]:\chi(N)\times\chi(N)\to\chi(N)$$

$$[E,F]\,f=E(F\,f)-F(E\,f)$$

ile tanımlı [,] dönüşümüne *E* ve *F* nin *Lie operatörü* denir. Lie operatör aşağıdaki özellikleri sağlar (Kon ve Yano 1984).

$\forall E,F,G\in\chi(N)$, $a,b\in\mathbb{R}$ ve $\forall f,g\in C^{\infty}(N,\mathbb{R})$ olmak üzere

1. $[E,F]=-[F,E]$

2. $[aE+bF,G]=a[E,G]+b[F,G]$

3. $[[E,F],G]+[[F,G],E]+[[G,E],F]=0$, (Jacobi özdeşliği)

4. $[fE,gF]=f[E,F]+f(Eg)F-g(Ff)E$ dir.

Tanım 2.1.4. N bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere

$$\nabla:\chi(N)\times\chi(N)\to\chi(N)$$
$$(E,F)\to\nabla(E,F)=\nabla_E F$$

fonksiyonu $\forall E,F,G\in\chi(N)$ ve $\forall f\in C^{\infty}(N,\mathbb{R})$ için

1. $\nabla_{E+F}G=\nabla_E G+\nabla_F G$

2. $\nabla_E(F+G)=\nabla_E F+\nabla_E G$

3. $\nabla_{f\,\mathrm{E}}F=f\,\nabla_E F$

4. $\nabla_E f\,F=E[f]F+f\,\nabla_E F$

koşullarını sağlayan ∇ dönüşümüne N diferensiyellenebilir manifold üzerinde bir lineer konneksiyon denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.5. N diferensiyellenebilir bir manifold, N üzerindeki lineer konneksiyon ∇ olmak üzere

$$T:\chi(N)\times\chi(N)\to\chi(N)$$
$$E,F\ \to T(E,F)=\nabla_E F-\nabla_F E-[E,F]$$

şeklinde verilen T tensörüne N manifoldu üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun *torsiyon tensörü* denir (Do Carmo,1992).

Tanım 2.1.6. *N*, bir diferensiyellenebilir manifold, *g*, *N* üzerinde tanımlı Riemann metriği olsun. ∇ konneksiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlarsa bu konneksiyona *Riemann Konneksiyon* veya *Levi-Civita* konneksiyonu denir (O'Neill, 1983).

1. $[E,F]=\nabla_E F-\nabla_F E$

2. $Eg(F,G)=g(\nabla_E F,G)+g(F,\nabla_E G)$

N üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu

$$2g(\nabla_E F,G)=Eg(F,G)+Fg(G,E)-Gg(E,F)$$
$$-g(E,[F,G])+g(F,[G,E])+g(G,[E,F])$$

ile belirlenir. Bu eşitliğe "*Koszul eşitliği''* denir (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.7. *N* bir diferensiyellenebilir manifold, *T* de *N* üzerinde tanımlanan ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü olsun. Eğer $T=0$ olursa ∇ konneksiyonuna *simetriktir* ya da *sıfır torsiyonludur* denir (Do Carmo,1992).

Tanım 2.1.8. *N* bir manifold, *g* de *N* üzerinde tanımlı Riemann metriği olmak üzere $E,F,G\in\chi(N)$ için

$$R:\chi(N)\times\chi(N)\times\chi(N)\to\chi(N)$$

$$(E,F,G)\to R(E,F,G)=R(E,F)G=\nabla_E\nabla_F G-\nabla_F\nabla_E G-\nabla_{[E,F]}G \qquad (2.1.1)$$

olarak tanımlanan *R* tensör alanına ∇ konneksiyonunun *Riemann eğrilik tensörü* denir. (Bootby,1986).Riemann eğrilik tensörü sıfır olan manifolda flat manifold denir. *(N,g)* manifoldu üzerinde tanımlı konneksiyon ∇olmak üzere $\nabla R=0$ ise manifolda lokal simetrik manifold denir. Ayrıca $\forall E,F,G,W\in\chi(N)$ için

i) $R(E,F)G=-R(F,G)E$

ii) $g(R(E,F)G,W)=-g(R(E,F)W,G)$

iii) $g(R(E,F)G,W)=g(R(G,W)E,F)$

iv) $R(E,F)G+R(F,G)E+R(G,E)F=0$ (I. Bianchi Özdeşliği)

özellikleri vardır (O'Neill, 1983).

Tanım 2.1.9. *N* bir manifold, *g* de *N* üzerinde tanımlı Riemann metriği olmak üzere $\forall E,F,G,W\in\chi(N)$ için

$$K:\chi(N)\times\chi(N)\times\chi(N)\times\chi(N)\to C^{\infty}(N,\mathbb{R})$$
$$(E,F,G,W)\to K(E,F,G,W)=g(R(E,F)G,W)$$

şeklinde tanımlı dönüşüme N üzerinde *Riemann- Chiristoffel eğrilik tensörü* denir (Hacısalihoğlu,2003).

Tanım 2.1.10. *N,* n boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\chi(N)=Sp\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olmak üzere

$$Q:TN\to TN$$
$$X\to QX$$
$$QX=\sum_{i=1}^{n}R(x,e_i)e_i$$

şeklinde tanımlı operatöre Ricci *Operatörü* denir. (O'Neill, 1983).
n- boyutlu bir Riemann manifoldu *(N,g)* ve *R* de Riemann eğrilik tensörü olmak üzere
$\forall\ E,F\in\chi(N)$ için

$$S:\chi(N)\times\chi(N)\to C^{\infty}(N,\mathbb{R})$$
$$(E,F)\to S(E,F)=\sum_{i=1}^{n}g(R(F,e_i)e_i,E)$$

şeklinde tanımlı tensöre *Ricci Tensörü* denir.

Tanım 2.1.11**.** *(N,g)* bir Riemann manifold, *g* de *N* üzerinde tanımlı Riemann metriği ve T_pN tanjant uzayın iki boyutlu alt uzayı olmak üzere $\Pi=Sp\{E_p,F_p\}$ tanjant vektörleri için

$$K(E_p\wedge F_p)=\frac{g(R(E_p,F_p)F_p,E_p)}{g(E_p,E_p)g(F_p,F_p)-g(E_p,F_p)^2}$$

ifadesine Π düzleminin *kesitsel eğriliği* denir (O'Neill,1983).

2.2 İmmersiyonlar

Tanım 2.2.1. *n* ve *b* boyutlu iki Riemann manifoldu sırasıyla *N* ve *B* olsun.

$$f:N\to B$$

diferensiyellenebilir dönüşümü için

$$boy(f_*(T_p(N)) = n$$

ise *f* nin $p \in N$ noktasındaki rankı *n* olup *rank (f)=n* ile gösterilir. *Eğer boy(N)=rank(f)* ise *f* ye immersiyon (daldırma) denir. Bu durumda *N* manifolduna da B nin immersed alt manifoldu denir. *f* immersiyonu *1-1* ise *f* ye imbedding (gömme); *N* manifolduna da B nin gömülen alt manifoldu ya da sadece altmanifoldu denir (Hacısalihoğlu, 1983:24-173).

Tanım 2.2.2. (N, g_n) ve (B, g_b) sırasıyla *n* ve *b* boyutlu Riemann manifoldları

$$f : N \to B$$

immersiyon olsun. $\forall$ E, $F \in \chi(N)$ için

$$g_n(E,F) = g_b(f_*E, f_*F)$$

ise f_* ye *izometrik immersiyon* denir. (Chen,1973).

Tanım 2.2.3. $q \in \mathbb{R}^n$ için $T_q(\mathbb{R}^n)$ uzayından $\mathbb{R}$ ye giden bütün lineer dönüşümlerin kümesi $T^*{}_q(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere bu kümeye $\mathbb{R}^n$ uzayının q noktasındaki kotanjant uzayı denir. Bu uzayın her elemanına bu noktada bir kotanjant vektör denir. $\mathbb{R}^n$ nin bir açık alt kümesindeki bir noktaya bu noktada bir kotanjant vektör karşılık getiren dönüşüme bir kotanjant vektör alanı veya 1-form denir.(Sabuncuoğlu,2006:26)

Tanım 2.2.4. (*N*,*g*) bir Riemann manifoldu, *Y* ve P $\chi(N)$ de vektör alanları ve η 1-form olmak üzere

$$\eta(Y) = g(Y, P)$$

ile tanımlıdır.

Tanım 2.2.5. (*N*,*g*) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall$ *E*, $F \in$ $\chi(N)$ ve $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyon tensörü

$$\tilde{T}(E,F) = \eta(F)E - \eta(E)F \tag{2.2.1}$$

eşitliğini sağlarsa $\tilde{\nabla}$ konneksiyonuna *semi-simetrik konneksiyon* denir. Ayrıca $\tilde{\nabla}$ konneksiyonu

$$\tilde{\nabla} g = 0$$

şartını sağlayan bir Riemann metriğine sahip ise konneksiyona *semi-simetrik metrik konneksiyon* denir. Aksi halde *semi-simetrik metrik olmayan konneksiyon* denir. (Hayden, 1932).

Tanım 2.2.6. E ve F, $\chi(N)$ üzerinde iki vektör alanı, $\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyon tensörü $\tilde{T}$ olmak üzere

$$\tilde{T}(E,F)=\eta(F)\varphi(E)-\eta(E)\varphi(F) \tag{2.2.2}$$

şeklinde yazılabiliyorsa lineer konneksiyona *quarter simetrik konneksiyon* denir. Burada η 1-form ve φ de $(1,1)$ tipinde tensör alanıdır.

$\tilde{\nabla}$, N manifoldu üzerinde bir quarter simetrik konneksiyon olmak üzere

$$\tilde{\nabla}g=0$$

olması durumunda konneksiyona quarter simetrik metrik konneksiyon, aksi halde ise quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon denir.

2.3. Riemann Submersiyonlar

Tanım 2.3.1. (N,g_N) ve (B,g_B) iki Riemann manifoldu arasında

$$\psi:(N,g_N)\rightarrow(B,g_B)$$

diferensiyellenebilir dönüşümü örten ve

$$rank\psi_{*x}=boyB$$

oluyorsa ψ ye $x\in N$ noktasında bir submersiyon denir. $\forall x\in N$ için ψ bir submersiyon ise ψ ye N üzerinde bir submersiyon denir.(Falcıtelli, 2004).

k ve l pozitif tam sayılar ve $k>l$ olmak üzere

$$\psi:\mathbb{R}^{k}\rightarrow\mathbb{R}^{l}$$

dönüşümü

$$\psi:(x_1,x_2,...x_k)\rightarrow(x_1,x_2,...x_l)$$

ile verilsin. Bir noktada

$$\psi_{*x}(v_1,v_2,...v_k)=(v_1,v_2,...v_l)$$

olduğundan ψ_* diferansiyeli örtendir. Dolayısıyla türev dönüşümü bir submersiyondur.

Herhangi bir $x \in B$ için $F_x = \psi^{-1}(x)$ $r = (n-b)-$ boyutlu N nin bir alt manifoldudur. $\psi^{-1}(x)$ alt manifoldlarına submersiyonun lifleri denir.

Herhangi bir $x \in N$ için (N, g_N) deki $\mathcal{V}$ uzayı

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\psi) = çek\psi_{*x} = \left\{ X \in T_x N : \psi_{*x}(X) = 0 \right\} \subset T_x N$$

ve

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_x &= \mathcal{H}_x(\psi) \\ &= \mathcal{V}^{\perp}{}_x \subset T_x N \end{aligned}$$

olarak tanımlanır. Burada $\mathcal{V}_x$ e vertical veya dikey uzay; $\mathcal{V}_x$ vertical uzayının dik tümleyenini $\mathcal{H}_x$ ile gösterirsek $\mathcal{H}_x$ e de ψ nin bu noktadaki horizantal veya yatay uzayı denir. Böylece N, Riemann manifoldu $x \in N$ de

$$\begin{aligned} T_x N &= \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x \\ &= \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^{\perp} \end{aligned}$$

şeklinde ifade edilebilir.

Tanım 2.3.2. $\psi : N \to B$ bir submersiyon olsun. N Riemann manifoldu üzerindeki dikey vektör alanlarının kümesi $\chi^v(N)$; yatay vektör alanlarının kümesi $\chi^h(N)$ ile gösterilir.

Tanım 2.3.3. İki Riemann manifoldu arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

submersiyonu aşağıdaki iki koşulu sağlıyorsa ψ ye bir Riemann submersiyonu denir (Falcıtelli,2004).

i) ψ dönüşümü maksimal ranka sahiptir.

ii) Her $p \in N$ noktasındaki $\psi_*(p)$ dönüşümü yatay vektörlerinin uzunluğunu korur. Yani

$$g_{N(p)}(u,v) = g_{B(\psi(p))}(\psi_{*p}u, \psi_{*p}v) \quad u,v \in \mathcal{H}_p \ , p \in N$$

dir. Bu ise bir $p \in N$ noktasında ψ_* türev dönüşümünün $\mathcal{H}_p$ yatay uzayından $T_{\psi(p)}$ üzerine bir lineer izometri olduğunu söyler.

Örnek 2.3.1

$$\psi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$$

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\rightarrow(\frac{x_1-x_2}{\sqrt{2}},\frac{x_3-x_4}{\sqrt{2}})$$

dönüşümünü inceleyelim. Burada $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$, $\mathbb{R}^4$ ün koordinat sistemini göstermektedir. Dönüşümün jakobyen matrisi ψ_* olmak üzere

$$\psi_*=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan $rank\ \psi_*=boy\mathbb{R}^2=2$ dir. Dolayısıyla ψ dönüşümü bir submersiyondur. Diğer taraftan

$$çek\psi_*=Sp\{V_1=\partial x_1+\partial x_2\ ,\ V_2=\partial x_3+\partial x_4\}$$

$$çek\psi_*^{\perp}=Sp\{Z_1=\partial x_1-\partial x_2\ ,Z_2=\partial x_3-\partial x_4\}$$

yazılabilir. $\mathbb{R}^4$ ve $\mathbb{R}^2$ üzerindeki standart iç çarpımlar $g_{\mathbb{R}^4}$ ve $g_{\mathbb{R}^2}$ ile gösterilirse

$$g_{\mathbb{R}^2}(\psi_*Z_1,\psi_*Z_1)=g_{\mathbb{R}^4}(Z_1,Z_1)$$

$$g_{\mathbb{R}^2}(\psi_*Z_2,\psi_*Z_2)=g_{\mathbb{R}^4}(Z_2,Z_2)$$

olduğundan ψ, bir Riemann submersiyondur.

Önerme 2.3.1. İki Riemann manifoldu arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\rightarrow(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. N üzerindeki E,F vektör alanları B deki E',F' vektör alanlarına $\psi-$bağlı olsun. Bu durumda:

i) $g_N(E,F)=g_B(E',F')\circ\psi$

ii) $h[E,F]$ vektör alanı $[E',F']$ vektör alanına $\psi-$bağlıdır.

iii) $h(\nabla^N{}_E F)$ vektör alanı ve $\nabla^B{}_{E'}F'$, $\psi-$ bağlıdır.

iv) $V\in\mathcal{V}_p$ için $[E,V]$ dikey vektör alanıdır (Falcıtelli, Ianus, Pastore,2004).

Şimdi O'Neill tarafından tanımlanan T ve A temel tensörleri tanımlayalım.

Tanım 2.3.4. (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\rightarrow(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olmak üzere *T* temel tensör alanı

$$T(E,F)=T_E F=h\nabla_{vE}vF+v\nabla_{vE}hF \tag{2.2.5}$$

ve, *A* temel tensör alanı

$$A(E,F)=A_E F=v\nabla_{hE}hF+h\nabla_{hE}vF \tag{2.2.6}$$

ile tanımlanır (O'Neill 1966:459-469). Burada *v* ve *h* sembolleri sırasıyla $\mathcal{V}$ ve $\mathcal{H}$ üzerinde ortogonal projeksiyonlar ∇, *(N,g)* nin Levi-Civita konneksiyonudur (O'Neill, 1966).

Lemma 2.3.1 (N,g_N) ve (B,g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi:(N,g_N)\to(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olmak üzere *T* ve *A* temel tensörleri aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) $T_U V=T_V U$

ii) $A_X Y=-A_Y X$

iii) $A_X Y=\frac{1}{2}v\left[X,Y\right]$

$U,V\in\chi^v(N)$ ve $X,Y\in\chi^h(N)$ dır.(O'Neill 1966:459-469).

Lemma 2.3.2. (N,g_N) ve (B,g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi:(N,g_N)\to(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. Bu durumda A_E ve T_E anti simetrik operatörlerdir. $E,F,G\in\chi(N)$ için

i) $g(T_E F,G)=-g(T_E G,F)$

ii) $g(A_E F,G)=-g(A_E G,F)$

dır(Falcıtelli,Ianus,Pastore, 2004).

3. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON İLE TANIMLI RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde iki Riemann manifoldu arasında tanımlı bir Riemann submersiyon ilk defa semi simetrik metrik konneksiyon ile incelenmiştir.

3.1. Temel Tensörler

(N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

bir Riemann submersiyon; ∇, N üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $E, F, P \in \chi(N)$ için

$$\tilde{\nabla}_E F = \nabla_E F + \eta(F)E - g(E,F)P \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlı konneksiyonu alalım.
$\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyonu

$$\tilde{T}(E,F) = \tilde{\nabla}_E F - \tilde{\nabla}_F E - [E,F]$$

olduğundan (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{T}(E,F) &= (\nabla_E F + \eta(F)E - g(E,F)P) - (\nabla_F E + \eta(E)F - g(F,E)P) - [E,F] \\ &= \nabla_E F - \nabla_F E - [E,F] + \eta(F)E - \eta(E)F\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\tilde{T}(E,F) = T(E,F) + \eta(F)E - \eta(E)F$$

yazılabilir. ∇,Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$\tilde{T}(E,F) = \eta(F)E - \eta(E)F$$

elde edilir. Dolayısıyla (3.1.1) denklemindeki $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyon, semi-simetrik konneksiyondur.
Diğer taraftan

$$(\tilde{\nabla}_E g)(F,G) = \tilde{\nabla}_E g(F,G) - g(\tilde{\nabla}_E F, G) - g(F, \tilde{\nabla}_E G)$$

$$\tilde{\nabla}_E g(F,G) = g(\tilde{\nabla}_E F,G) + g(F,\tilde{\nabla}_E G)$$

$$= g(\nabla_E F + \eta(F)E - g(E,F)P,G)$$

$$+ g(F,\nabla_E G + \eta(G)E - g(E,G)P)$$

yazılabilir. Buradan metriğin özelliğini kullanarak

$$\tilde{\nabla}_E g(F,G) = g(\nabla_E F,G) + \eta(F)g(E,G) - g(E,F)\eta(G)$$

$$+g(F,\nabla_E G) + \eta(G)g(F,E) - g(E,G)\eta(F)$$

$$= g(\nabla_E F,G)+g(F,\nabla_E G)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_E g(F,G) = 0$$

elde edilir ki bu durumda (3.1.1)'de tanımlı konneksiyon semi simetrik metrik konneksiyondur.

Şimdi O'Neill tarafından Riemann submersiyonlar için verilen T ve A tensörlerini semi-simetrik metrik konneksiyon için tanımlayalım.

(N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$, N üzerinde bir semi-simetrik metrik konneksiyon olmak üzere $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ tensörleri

$$\tilde{T}(E,F) = \tilde{T}_E F = h\tilde{\nabla}_{vE} vF + v\tilde{\nabla}_{vE} hF \tag{3.1.2}$$

ve

$$\tilde{A}(E,F) = \tilde{A}_E F = v\tilde{\nabla}_{hE} hF + h\tilde{\nabla}_{hE} vF \tag{3.1.3}$$

şeklindedir.

Teorem 3.1.1. (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ; ∇, N üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $E, F \in \chi(N)$ için

$$\text{i)}\ \tilde{T}_E F = T_E F + \eta(hF)vE - g(vE, vF)hP \qquad (3.1.4)$$

ve

$$\text{ii)}\ \tilde{A}_E F = A_E F + \eta(vF)hE - g(hE, hF)vP \qquad (3.1.5)$$

şeklindedir.

İspat.
$\forall\ E, F \in \chi(N)$ için (3.1.2) ifadesinde (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{T}_{\hat{E}} F = h(\nabla_{vE} vF + \eta(vF)vE - g(vE, vF)P + v(\nabla_{vE} hF + \eta(hF)vE - g(vE, hF)P)$$

yazılabilir. Buradan

$$\tilde{T}_E F = h\nabla_{vE} vF + \eta(vF)h(vE) - g(vE, vF)hP + v\nabla_{vE} hF + \eta(hF)v(vE) - g(vE, hF)vP$$

olduğundan

$$\tilde{T}_E F = T_E F + \eta(hF)vE - g(vE, vF)hP$$

elde edilir.
Benzer şekilde $\forall\ E, F \in,\ \chi(N)$ için (3.1.3) denkleminde (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{A}_E F = v(\nabla_{hE} hF + \eta(hF)hE - g(hE, hF)P) + h(\nabla_{hE} vF + \eta(vF)hE - g(hE, vF)P)$$

yazılabilir. Buradan

$$\tilde{A}_E F = A_E F + \eta(vF)hE - g(hE, hF)vP$$

elde edilir.
O'Neill tensörlerinin tanımından biliyoruz ki T ve A tensörleri anti-simetriktir. $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyon ile tanımlı $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ tensörlerinin simetriklik durumunu inceleyelim.

Lemma 3.1.1 (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \rightarrow (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon olsun. $\forall\ E, F, G \in \chi(N)$ için

$$i) g(\tilde{T}_E F, G) = g(\tilde{T}_E G, F) + 2g(T_E F, G) + \eta(hF)g(vE, vG) - \eta(hG)g(vE, vF)$$

$$- g(vE, vF)g(hP, hG) + g(vE, vG)g(hP, hF) \qquad (3.1.6)$$

ii) $g(\tilde{A}_E F,G)=g(\tilde{A}_E G,F)+2g(A_E G,F)+2\eta(vF)g(hE,hG)-2\eta(vG)g(hE,hG)$ (3.1.7)

şeklindedir.

İspat.

$\forall E,\ F,\ G\in\ \chi(N)$ için (3.1.4) eşitliği kullanılırsa

$$g(\tilde{T}_E F,G)=g((T_E F+\eta(hF)vE-h(g(vE,vF)P),G)$$

$$=g(T_E F,G)+g(\eta(hF)vE,G)-g(h(g(vE,vF)P),G)$$

yazılabilir. *G=vG+hG* olduğundan

$$g(\tilde{T}_E F,G)=g(T_E F,vG)+g(T_E F,hG)+g(\eta(hF)vE,vG)+g(\eta(hF)vE,hG)$$

$$-g(h(g(vE,vF)P,vG)-g(h(g(vE,vF)P,hG)$$

veya

$$g(\tilde{T}_E F,G)=g(T_E F,G)+\eta(hF)g(vE,vG)-g(vE,vF)g(hP,hG) \qquad (3.1.8)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(\tilde{T}_{\hat{E}} G,F)=g(T_E G+\eta(hG)vE-h(g(vE,vG)P,F)$$

$$=g(T_E G,F)+g(\eta(hG)vE,F)-g(h(g(vE,vG)P,F)$$

yazılabilir. *F=vF+hF* olduğundan

$$g(\tilde{T}_E G,F)=g(T_E G,F)+g(\eta(hG)vE,vF)-g(h(g(vE,vG)P,vF)$$

$$-g(h(g(vE,vG)P,hF)$$

olup,buradan

$$g(\tilde{T}_E F,G)=-g(T_E F,G)+\eta(hG)g(vE,vF)-g(vE,vG)g(hP,hF) \qquad (3.1.9)$$

bulunur. (3.1.8) denkleminden (3.1.9) denklemi çıkarılırsa

$$g(\tilde{T}_E F, G) - g(\tilde{T}_E G, F) = 2g(T_E F, G) + \eta(hF)g(vE, vG) - \eta(hG)g(vE, vF)$$

$$- g(vE, vF)g(hP, hG) + g(vE, vG)g(hP, hF)$$

yazılabilir. Dolayısıyla (i) denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (3.1.5) eşitliği kullanılırsa

$$g(\tilde{A}_E F, G) = g(A_E F, G) + \eta(vF)g(hE, G) - g(hE, hF)g(vP, G)$$

yazılabilir.
$G = vG + hG$ olduğundan

$$g(\tilde{A}_E F, G) = g(A_E F, G) + \eta(vF)g(hE, hG) - g(hE, hF)g(vP, vG) \qquad (3.1.10)$$

bulunur. Diğer taraftan G ve F vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$g(\tilde{A}_E G, F) = g(A_E G, F) + \eta(vG)g(hE, hF) - g(hE, hG)g(vP, vF) \qquad (3.1.11)$$

elde edilir. O halde (3.1.10) denkleminden (3.1.11) denklemi çıkarılırsa

$$g(\tilde{A}_E F, G) = g(\tilde{A}_E G, F) + 2g(A_E F, G) + 2\eta(vF)g(hE, hG) - 2\eta(vG)g(hE, hF)$$

yazılabilir ki buradan (ii) denklemi elde edilir.

Sonuç olarak Levi-Civita konneksiyonu ile tanımlı bir Riemann submersiyonunun aksine $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ temel tensörlerinin anti simetrik olmadıklarını söyleyebiliriz.

Teorem 3.1.2. (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

bir Riemann submersiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ semi simetrik metrik konneksiyonlu submersiyonun temel tensörleri olmak üzere $\forall\ U, W \in \chi^v(N)$ ve $\forall\ X, Y \in \chi^h(N)$ için:

i) $\tilde{T}_U W = \tilde{T}_W U$ (3.1.12)

ii) $\tilde{A}_X Y = \tilde{A}_Y X + 2A_X Y$ (3.1.13)

şeklindedir.

İspat.

$\forall U,W \in \chi^{v}(N)$ için (3.1.4) kullanılırsa

$$\tilde{T}_U W = T_U W + \eta(hW)vU - g(vU, vW)hP \tag{3.1.14}$$

ve

$$\tilde{T}_W U = T_W U + \eta(hU)vW - g(vW, vU)hP \tag{3.1.15}$$

yazılabilir. *U* ve *W* nin yatay parçası olmadığından *(hW)* ve *(hU)* parçaları olmayacaktır. Ayrıca *vU=U* ve *vW=W* dir.

$$T_U W = T_W U$$

özelliğini dikkate alarak (3.1.14) ve (3.1.15) eşitlikleri taraf tarafa çıkarırılırsa

$$\tilde{T}_U W - \tilde{T}_W U = T_U W - T_W U$$

olacağından

$$\tilde{T}_U W = \tilde{T}_W U$$

bulunur.

ii) Diğer taraftan $\forall\ X, Y \in \chi^{h}(N)$ için (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{A}_X Y = A_X Y + \eta(vY)hX - g(hX, hY)vP \tag{3.1.16}$$

ve

$$\tilde{A}_Y X = A_Y X + \eta(vX)hY - g(hY, hX)vP \tag{3.1.17}$$

yazılabilir.

(3.1.16) ve (3.1.17) eşitliklerini taraf tarafa çıkarılırsa $vX = 0$ ve $vY = 0$ ayrıca

$$A_Y X = -A_X Y$$

olduğundan

$$\tilde{A}_X Y - \tilde{A}_Y X = A_X Y - (-A_X Y)$$

veya

$$\tilde{A}_X Y = \tilde{A}_Y X + 2A_X Y$$

elde edilir.

Sonuç: (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon; ∇, *N* üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $U \in \chi^{v}(N)$ ve $X \in \chi^{h}(N)$ için

$$\tilde{T}_U X = T_U X + \eta(hX)vU \tag{3.1.18}$$

$$\tilde{A}_X U = A_X U + \eta(vU)hX \tag{3.1.19}$$

dir.

Teorem 3.1.3. (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon; ∇, N üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ semi simetrik metrik konneksiyonlu submersiyonun temel tensörleri olmak üzere, $\forall\, V,W \in \chi^v(N)$ ve $\forall\, X,Y \in \chi^h(N)$ için

i) $\tilde{\nabla}_V W = \hat{\tilde{\nabla}}_V W + T_V W$ (3.1.20)

ii) $\tilde{\nabla}_V X = h\nabla_V X + T_V X + \eta(X)V$ (3.1.21)

iii) $\tilde{\nabla}_X V = A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V)X$ (3.1.22)

iv) $\tilde{\nabla}_X Y = A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)vP$ (3.1.23)

dır.

İspat.

i) $\forall\ V,W \in \chi^v(N)$ için (3.1.1) eşitliğini kullanılırsa

$$\nabla_V W = v(\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)V + g(V,W)P) + h(\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)V + g(V,W)P)$$

olduğundan

$$\nabla_V W = v\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)V + h\tilde{\nabla}_V W + g(V,W)vP + g(V,W)hP$$

elde edilir. Diğer tarfatan

$$g(V,W)vP + g(V,W)hP = g(V,W)P$$

yazılabileceğinden

$$\nabla_V W = v\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)V + h\tilde{\nabla}_V W + g(V,W)P$$

son eşitlik (3.1.1) de yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_V W = v\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)V + h\tilde{\nabla}_V W + g(V,W)P + \eta(W)V - g(V,W)P$$

veya

$$\tilde{\nabla}_V W = v\tilde{\nabla}_V W + h\tilde{\nabla}_V W$$

bulunur. O halde

$$h\tilde{\nabla}_V W = T_V W$$

ve

$$v\tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_V W$$

olmak üzere

$$\tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_V W + T_V W$$

elde edilir.

ii) Benzer şekilde $\forall\, V,W \in \chi^v(N)$ ve $\forall\, X,Y \in \chi^h(N)$ için (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)V + g(V,X)P = h(\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)V + g(V,X)P) + v(\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)V + g(V,X)P)$$

buradan

$$\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)V + g(V,X)P = h\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)hV + g(V,X)hP + v\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)V + g(V,X)vP$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_V X = h\nabla_V X + T_V X + \eta(X)V$$

elde edilir.

iii) Diğer taraftan $\forall\, V \in \chi^v(N)$ ve $\forall\, X \in \chi^h(N)$ için (3.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$A_X V = h\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)hX + g(X,V)hP$$

yazılabilir.

$$\nabla_X V = h\nabla_X V + v\nabla_X V$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)X + g(X,V)P = h(\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)X + g(X,V)P) + v(\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)X + g(X,V)P$$

$$= h\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)hX + g(X,V)hP + v\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)vX + g(X,V)vP$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_X V = A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V)X$$

elde edilir.

iv) Son olarak $\forall X,Y\in \chi^{h}(N)$ için

$hX = X$ ve $hY = Y$ olduğu dikkate alınır, (3.1.1) ve (3.1.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$A_X Y = v\nabla_X Y$$

yazılabilir. Buradan

$$A_X Y = v\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)vX + g(X,Y)vP$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\nabla_X V = h\nabla_X V + v\nabla_X V$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)X + g(X,Y)P = h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)hX + g(X,Y)hP + v\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)vX + g(X,Y)vP$$

yazılabilir. Böylece

$$A_X Y = v\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)vX + g(X,Y)vP$$

ve

$$g(X,Y)P = g(X,Y)vP + g(X,Y)hP$$

olduğundan

$$\tilde{\nabla}_X Y = A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)vP$$

elde edilir.

Tanım 3.1.1 (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

bir Riemann submersiyon; ∇, N üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonun temel tensörleri olmak üzere, bu temel tensörlerin kovaryant türevleri $\forall\ E,F,H \in \chi(N)$ için

$$(\tilde{\nabla}_E A)_F H = (\tilde{\nabla}_E A)(F,H) = \tilde{\nabla}_E (A_F H) - A_{\tilde{\nabla}_E F}(H) - A_F(\tilde{\nabla}_E H) \qquad (3.1.24)$$

ve

$$(\tilde{\nabla}_E T)_F H = (\tilde{\nabla}_E T)(F,H) = \tilde{\nabla}_E (T_F H) - T_{\tilde{\nabla}_E F}(H) - T_F(\tilde{\nabla}_E H) \qquad (3.1.25)$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.4. (N, g_N) ve (B, g_B) iki Riemann manifoldu olmak üzere

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

bir Riemann submersiyon; ∇, N üzerinde Levi- Civita konneksiyonu ve $\tilde{\nabla}$, semi simetrik metrik konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ semi simetrik metrik konneksiyonlu Riemann submersiyonun temel tensörleri olmak üzere, $X, Y \in \chi^h(N)$ ve $V, W, E \in \chi^v(N)$ için

i) $(\tilde{\nabla}_V A)_W E = -A_{T_V W} E$

ii) $(\tilde{\nabla}_V T)_Y E = -T_{T_V Y + \eta(Y) V} E$

iii) $(\tilde{\nabla}_X A)_W E = -A_{A_X W + \eta(W) X} E$

iv) $(\tilde{\nabla}_X T)_Y E = -T_{A_X Y + g(X,Y) vP} E$

şeklindedir.

İspat.

(3.1.24) den

$$(\tilde{\nabla}_V A)_W E = \tilde{\nabla}_V (A_W E) - A_{\tilde{\nabla}_V W} E - A_W (\tilde{\nabla}_V E)$$

yazabiliriz. A yatay vektör alanı olduğu için yalnızca yatay vektör alanında değer alır. Buradan $\tilde{\nabla}_V (A_W E)$ ve $A_W (\tilde{\nabla}_V E)$ kısımları olmayacağından

$$(\tilde{\nabla}_V A)_W E = -A_{\tilde{\nabla}_V W} E$$

elde edilir. Buradan da (3.1.20) eşitliğini kullanarak

$$(\tilde{\nabla}_V A)_W E = -A_{T_V W} E$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.1.22) den

$$(\tilde{\nabla}_V T)_Y E = \tilde{\nabla}_V (T_Y E) - T_{\tilde{\nabla}_V Y} E - T_Y (\tilde{\nabla}_V E)$$

yazabiliriz. T, dikey vektör alanı olduğu için yalnızca dikey vektör alanında değer alır. Bu durumda $\tilde{\nabla}_V (T_Y E)$ ve $T_Y (\tilde{\nabla}_V E)$ kısımları olmayacağından

$$(\tilde{\nabla}_V T)_Y E = -T_{\tilde{\nabla}_V Y} E$$

elde edilir. Buradan (3.1.21) kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_V T)_Y E = -T_{h\tilde{\nabla}_V Y + T_V Y + \eta(Y) V} E$$

T dikey vektör alanı olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_V T)_Y E = -T_{T_V Y + \eta(Y) V} E$$

bulunur.

$$(\tilde{\nabla}_X A)_W E = \tilde{\nabla}_X (A_W E) - A_{\tilde{\nabla}_X W}(E) - A_W(\tilde{\nabla}_X E)$$

eşitliğinde benzer şekilde A nın yatay vektör alanı olduğu dikkate alınır ve (3.1.22) kullanılırsa $\tilde{\nabla}_X (A_W E)$ ve $A_W(\tilde{\nabla}_X E)$ kısımları olmayacağından

$$(\tilde{\nabla}_X A)_W E = -A_{\tilde{\nabla}_X W} E$$

yazılır. Buradan (3.1.22) kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X A)_W E = -A_{A_X W + v\tilde{\nabla}_X W + \eta(W)X} E$$

elde edilir. Buradan da dikey kısım olmayacağından

$$(\tilde{\nabla}_X A)_W E = -A_{A_X W + \eta(W)X} E$$

elde edilir.

Son olarak (3.1.25) den

$$(\tilde{\nabla}_X T)_Y E = \tilde{\nabla}_X (T_Y E) - T_{\tilde{\nabla}_X Y}(E) - T_Y(\tilde{\nabla}_X E)$$

yazılır. T dikey vektör alanı olduğu için yatay parçalar olmayacaktır. Buradan hareketle

$$(\tilde{\nabla}_X T)_Y E = -T_{\tilde{\nabla}_X Y} E$$

yazılabilir. (3.1.23) kullanılarak

$$(\tilde{\nabla}_X T)_Y E = -T_{A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)vP} E$$

denklemi elde edilir. T nin dikey vektör alanı olduğu dikkate alınırsa

$$(\tilde{\nabla}_X T)_Y E = -T_{A_X Y + g(X,Y)vP} E$$

bulunur.

3.2.Semi-Simetrik Metrik Konneksiyon İle Tanımlı Riemann Submersiyonunda Eğrilik Özellikleri

Bu bölümde iki Riemann manifold arasında semi simetrik metrik konneksiyon ile tanımlı bir Riemann submersiyonun dikey ve yatay uzaylarının eğrilik özellikleri incelenmiştir.

Teorem 3.2.1. (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N, g_N)\to(B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{R}$,semi-simetrik metrik konneksiyonda tanımlı eğrilik tensörü olmak üzere $\forall\ U,V,W,F\in\chi^v(N)$ ve $X\in\chi^h(N)$ için

$$i)\ g(\tilde{R}(U,V)W,F)=g(\hat{R}(U,V)W,F)+g(T_VW,T_UF)-g(T_UW,T_VF)$$

$$+\eta(T_UW)g(U,F)-\eta(T_UW)g(V,F) \qquad (3.2.1)$$

ve

ii) $g(\tilde{R}(U,V)W,X)=g((\tilde{\nabla}_UT_V)W,X)-g((\tilde{\nabla}_VT_U)W,X)$ (3.2.2)

şeklindedir.

İspat.

$\forall\ U,V,W\in\chi^v(N)$ için (2.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\tilde{R}(U,V,W)=\tilde{\nabla}_U\tilde{\nabla}_VW-\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_UW-\tilde{\nabla}_{[U,V]}W$$

yazılır. Bu denklemde (3.1.20) den

$$\tilde{\nabla}_U\tilde{\nabla}_VW=\tilde{\nabla}_U(\hat{\nabla}_VW+T_VW)$$

yazılır. Buradan

$$\tilde{\nabla}_U\tilde{\nabla}_VW=\tilde{\nabla}_U\hat{\nabla}_VW+\tilde{\nabla}_UT_VW$$

elde edilir. (3.1.20) ve (3.1.21) eşitlikleri kulanılırak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_U\tilde{\nabla}_VW=T_UT_VW+h\tilde{\nabla}_UT_VW+\eta(T_VW)U+T_U\hat{\nabla}_VW+\tilde{\nabla}_U\hat{\nabla}_VW \qquad (3.2.3)$$

bulunur. Benzer şekilde U ile V yer değiştirilerek

$$\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_UW=T_VT_UW+h\tilde{\nabla}_VT_UW+\eta(T_UW)V+T_V\hat{\nabla}_UW+\tilde{\nabla}_V\hat{\nabla}_UW \qquad (3.2.4)$$

ve

$$\nabla_{U,V} W = T_{U,V} W + \nabla_{U,V} W \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

Buradan (3.2.3), (3.2.4) ve (3.2.5) eşitlikleri (2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(U,V)W = T_U T_V W + h\tilde{\nabla}_U T_V W + \eta(T_V W)U + T_U \hat{\nabla}_V W + \tilde{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - T_V T_U W - h\tilde{\nabla}_V T_U W$$

$$- \eta(T_U W)V - T_V \hat{\nabla}_U W - \tilde{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - T_{U,V} W - \nabla_{U,V} W \tag{3.2.6}$$

yazılabilir. Bu denklem $\forall F \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W,F) = g(T_U T_V W,F) + g(h\tilde{\nabla}_U T_V W,F) + g(\eta(T_V W)U,F) + g(T_U \hat{\nabla}_V W,F)$$

$$+ g(\tilde{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W,F) - g(T_V T_U W,F) - g(h\tilde{\nabla}_V T_U W,F) - g(\eta(T_U W)V,F)$$

$$- g(T_V \hat{\nabla}_U W,F) - g(\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_U W,F) - g(T_{[U,V]} W,F) - g(\nabla_{[U,V]} W,F)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W,F) = g(\hat{R}(U,V)W,F) + g(T_V W, T_U F) - g(T_U W, T_V F)$$

$$+ \eta(T_U W) g(U,F) - \eta(T_U W) g(V,F)$$

elde edilir.

Benzer şekilde (3.2.7) eşitliği $\forall\ X \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W,X) = g(T_U T_V W,X) + g(h\tilde{\nabla}_U T_V W,X) + g(\eta(T_V W)U,X)$$

$$+ g(T_U \hat{\nabla}_V W,X) + g(\tilde{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W,X) - g(T_V T_U W,X)$$

$$- g(h\tilde{\nabla}_V T_U W,X) - g(\eta(T_U W)V,X) - g(T_V \hat{\nabla}_U W,X)$$

$$- g(\tilde{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W,X) - g(T_{[U,V]} W,X) - g(\nabla_{[U,V]} W,X)$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W,X) = g(h\tilde{\nabla}_U T_V W,X) + g(T_U \hat{\nabla}_V W,X) - g(h\tilde{\nabla}_V T_U W,X)$$

$$- g(T_V \hat{\nabla}_U W,X) - g(T_{[U,V]} W,X)$$

veya

$$g(\tilde{R}(U,V)W,X)=g((\tilde{\nabla}_U T_V)W,X)-g((\tilde{\nabla}_V T_U)W,X)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.2 (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\to(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{R}$,semi-simetrik metrik konneksiyonda tanımlı eğrilik tensörü olmak üzere $\forall\ V,W,K\in\chi^v(N)$ ve $\forall\ X,Y,Z\in\chi^h(N)$ için

i)

$$\begin{aligned}\tilde{R}(V,W,X,K)&=g(R'(V,W)X,K)+g(T_V h\tilde{\nabla}_W X,K)-g(T_W h\tilde{\nabla}_V X,K)+\eta(h\tilde{\nabla}_W X)g(V,K)\\&-\eta(h\tilde{\nabla}_V X)g(W,K)+g(\hat{\nabla}_V T_W X,K)-g(\hat{\nabla}_W T_V X,K)+g(T_V T_W X,K)\\&-g(T_W T_V X,K)+g(h\tilde{\nabla}_V X,hP)g(W,K)+g(T_V X,vP)g(W,K)+\eta(X)g(V,vP)g(W,K)\\&-g(h\tilde{\nabla}_W X,hP)g(V,K)-g(T_W X,vP)g(V,K)-\eta(X)g(W,vP)g(V,K)-g(T_{[V,W]}X,K)\\&+\mathrm{g}(X,\nabla_V P)g(W,K)-g(X,\nabla_W P)g(V,K)+\eta(X)\eta(V)g(W,K)-\eta(X)\eta(W)g(V,K)\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,V,Y,Z)&=R'(X,V,Y,Z)+g(A_X T_V Y,Z)+\eta(T_V Y)g(X,Z)+\eta(X)\eta(V)g(X,Z)\\&-g(T_V A_X Y,Z)-g(X,Y)g(T_V vP,Z)+\eta(Y)g(A_V X,Z)\end{aligned}$$

şeklindedir.

İspat.

i) (2.1.1) eşitliği $\forall\ V,W\in\chi^v(N)$ ve $\forall\ X\in\chi^h(N)$ için yazılırsa

$$\tilde{R}(V,W)X=\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_W X-\tilde{\nabla}_W\tilde{\nabla}_V X-\tilde{\nabla}_{[V,W]}X$$

elde edilir. Bu denklemde (3.1.20) eşitliği kullanılırsa,

$$\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_W X = \tilde{\nabla}_V(h\tilde{\nabla}_W X + T_W X + \eta(X)W)$$

$$= \tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_W X + \tilde{\nabla}_V T_W X + \tilde{\nabla}_V \eta(X)W$$

bulunur. Buradan (3.1.20) ve (3.1.21) kullanılırsa,

$$\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_W X = \tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_W X + \tilde{\nabla}_V T_W X + g(\tilde{\nabla}_V X, P)W + g(X, \tilde{\nabla}_V P)W + \eta(X)\tilde{\nabla}_V W$$

$$= h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_W X + T_V h\tilde{\nabla}_W X + \eta(h\tilde{\nabla}_W X) + \hat{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_W X + T_V h\tilde{\nabla}_W X$$

$$+\mathrm{g}(\tilde{\nabla}_V X, P)W + g(X, \tilde{\nabla}_V P)W + \eta(X)\tilde{\nabla}_V W$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_W\tilde{\nabla}_V X = h\tilde{\nabla}_W h\tilde{\nabla}_V X + T_W h\tilde{\nabla}_V X + \eta(h\tilde{\nabla}_V X)W + \hat{\nabla}_W h\tilde{\nabla}_V X + T_W h\tilde{\nabla}_V X$$

$$+\mathrm{g}(\tilde{\nabla}_W X, P)V + g(X, \tilde{\nabla}_W P)V + \eta(X)\tilde{\nabla}_W V$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[V,W]} X = h\tilde{\nabla}_{V,W} X + T_{V,W} X + \eta(X)[V,W]$$

elde edilir. Ayrıca,

$$h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_W X - h\tilde{\nabla}_W h\tilde{\nabla}_V X - h\tilde{\nabla}_{[V,W]} X = R'(V,W)X$$

olmak üzere

$$\tilde{R}(V,W)X = R'(V,W)X + T_V h\tilde{\nabla}_W X - T_W h\tilde{\nabla}_V X + \eta(h\tilde{\nabla}_W X)V - \eta(h\tilde{\nabla}_V X)W$$

$$+\hat{\nabla}_V T_W X - \hat{\nabla}_W T_V X + T_V T_W X - T_W T_V X + g(h\tilde{\nabla}_V X, hP)W$$

$$+g(T_V X, vP)W + \eta(X)g(V, vP)W - g(h\tilde{\nabla}_W X, hP)V$$

$$- g(T_W X, vP)V - \eta(X)g(W, vP)V - T_{[V,W]} X + g(X, \nabla_V P)W$$

$$+\eta(X)T_V W - g(X, \nabla_W P)V - \eta(X)T_W V + \eta(X)\eta(V)W - \eta(X)\eta(W)V \qquad (3.2.7)$$

bulunur. Elde edilen (3.2.7) denklemi $K \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$\tilde{R}(V,W,X,K)=g(R'(V,W)X,K)+g(T_V h\tilde{\nabla}_W X,K)-g(T_W h\tilde{\nabla}_V X,K)+\eta(h\tilde{\nabla}_W X)g(V,K)$$

$$-\eta(h\tilde{\nabla}_V X)g(W,K)+g(\hat{\nabla}_V T_W X,K)-g(\hat{\nabla}_W T_V X,K)+g(T_V T_W X,K)$$

$$-g(T_W T_V X,K)+g(h\tilde{\nabla}_V X,hP)g(W,K)+g(T_V X,vP)g(W,K)+\eta(X)g(V,vP)g(W,K)$$

$$-g(h\tilde{\nabla}_W X,hP)g(V,K)-g(T_W X,vP)g(V,K)-\eta(X)g(W,vP)g(V,K)-g(T_{[V,W]}X,K)$$

$$+g(X,\nabla_V P)g(W,K)-g(X,\nabla_W P)g(V,K)+\eta(X)\eta(V)g(W,K)-\eta(X)\eta(W)g(V,K)$$

elde edilir.

ii)

$X,Y\in\chi^h(N)$ $V,W\in\chi^v(N)$ olmak üzere (2.1.1) kullanılarak

$$\tilde{R}(X,V)Y=\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_V Y-\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_X Y-\tilde{\nabla}_{[X,V]}Y$$

(3.2.8)

elde edilir. Burada $\tilde{\nabla}_V Y$ kısmı için (3.1.21) ve (3.1.22) ve $\tilde{\nabla}_X Y$ kısmı için (3.1.23) ve (3.1.20) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_V Y=\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y+\tilde{\nabla}_X T_V Y+\tilde{\nabla}_X\eta(Y)V$$

$$=A_X h\tilde{\nabla}_V Y+h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y+g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP+A_X T_V Y+v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+\eta(T_V Y)X+g(\tilde{\nabla}_X Y,P)V+g(Y,\tilde{\nabla}_X P)+g(Y,P)\tilde{\nabla}_X V$$

yazılır. Buradan

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_V Y=A_X h\tilde{\nabla}_V Y+h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y+g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP+A_X T_V Y+v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+\eta(T_V Y)X+g(A_X Y+h\tilde{\nabla}_X Y+g(X,Y)vP,P)V+g(Y,\nabla_X P)$$

$$+\eta(P)X-g(X,P)P)V \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_V\tilde{\nabla}_X Y=\tilde{\nabla}_V A_X Y+\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y+\tilde{\nabla}_V g(X,Y)vP$$

$$=\hat{\nabla}_V A_X Y+T_V A_X Y+h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y+T_V h\tilde{\nabla}_X Y+\eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V$$

$$+g(\tilde{\nabla}_V X,Y)vP+g(X,\tilde{\nabla}_V Y)vP+g(X,Y)\tilde{\nabla}_V vP$$

Gerekli düzenlemelerden sonra,

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X Y = \hat{\nabla}_V A_X Y + T_V A_X Y + h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y + T_V h\tilde{\nabla}_X Y + \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V$$

$$+\mathrm{g}(\mathrm{h}\tilde{\nabla}_V X + T_V X + \eta(X)V, Y)vP + g(X, h\tilde{\nabla}_V Y + T_V Y + \eta(Y)V)vP$$

$$+ g(X,Y)(\hat{\nabla}_V vP + T_V vP) \qquad (3.2.10)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y = h\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y + T_{[X,V]} Y + \eta(Y)[X,V]$$

(3.2.11)

ve

$h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y - h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y - h\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y = R'(X,V)Y$ olmak üzere (3.2.9),(3.2.10) ve (3.2.11) eşitlikleri (3.2.8) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(X,V)Y = R'(X,V)Y + A_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)vP + A_X T_V Y + v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+ \eta(T_V Y)X + g(A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)vP, P)V$$

$$+ g(Y, \nabla_X P + \eta(P)X - g(X,P)P)V + g(Y,P)(A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V)X)$$

$$- \hat{\nabla}_V A_X Y - T_V A_X Y - T_V h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V - \mathrm{g}(\mathrm{h}\tilde{\nabla}_V X, Y)vP - g(T_V X, Y)vP$$

$$- \eta(X) g(V,Y)vP - g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)vP - g(X, T_V Y)vP - \eta(Y) g(X,V)vP$$

$$- g(X,Y)\hat{\nabla}_V vP - g(X,Y)T_V vP - T_{[X,V]} Y - \eta(Y)[X,V]$$

denklemi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{R}(X,V)Y = R'(X,V)Y + A_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)vP + A_X T_V Y + v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+ \eta(T_V Y)X + g(A_X Y, P)V + g(h\tilde{\nabla}_X Y, P)V + g(X,Y)V + g(Y, \nabla_X P)V$$

$$+ g(Y,X)V - \eta(X)\eta(Y)V + \eta(Y)A_X V + \eta(Y)v\tilde{\nabla}_X V + \eta(Y)\eta(V)X$$

$$- \hat{\nabla}_V A_X Y - T_V A_X Y - T_V h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V - g(h\tilde{\nabla}_V X, Y)vP$$

$$- g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)vP - g(X,Y)\hat{\nabla}_V vP - g(X,Y)T_V vP - T_{[X,V]} Y - \eta(Y)[X,V] \qquad (3.2.12)$$

elde edilir. (3.2.12) ifadesi $Z \in \chi^h(N)$ ile çarpılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{R}(X,V,Y,Z) = R'(X,V,Y,Z) + g(A_X T_V Y, Z) + \eta(T_V Y) g(X,Z) + \eta(X)\eta(V) g(X,Z)$$

$$- g(T_V A_X Y, Z) - g(X,Y) g(T_V vP, Z) + \eta(Y) g(A_V X, Z)$$

elde edilir.

Teorem 3.2.3. (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{R}$,semi-simetrik metrik konneksiyonda tanımlı eğrilik tensörü olmak üzere $\forall\ X, Y, Z, H \in \chi^h(N)$ $\forall\ V \in \chi^v(N)$ için

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,H) = g(R'(X,Y)Z,H) + g(A_Y Z, A_X H) + \eta(A_Y Z)g(X,H)$$

$$- g(A_X Z, A_Y H) - \eta(A_X Z)g(Y,H) + 2g(A_Z H, A_X Y) \qquad (3.2.13)$$

ve

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,V) = g(A_Y Z, A_X V) + g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z, V) + g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z, V)$$

$$- g(A_X Z, A_Y V) - g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z, V) - g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z, V) \qquad (3.2.14)$$

şeklindedir.

İspat.

$\forall\ X, Y, Z \in \chi^h(N)$ için (2.1.1) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)Z = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z - \tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z \qquad (3.2.15)$$

yazılır. Buradan (3.1.23) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = \tilde{\nabla}_X (A_Y Z + h\tilde{\nabla}_Y Z + g(Y,Z)vP)$$

$$= \tilde{\nabla}_X A_Y Z + \tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_Y Z + g(\tilde{\nabla}_X Y, Z)vP + g(Y, \tilde{\nabla}_X Z)vP + g(Y,Z)\tilde{\nabla}_X P$$

bulunur. Buradan (3.1.22) ve (3.1.23) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = A_X A_Y Z + v\tilde{\nabla}_X A_Y Z + \eta(A_Y Z)X + A_X h\tilde{\nabla}_Y Z + h\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z + g(X, h\tilde{\nabla}_Y Z)vP$$

$$+ g(A_X Y, Z)vP + g(h\tilde{\nabla}_X Y, Z)vP + g(X,Y)g(vP,Z)vP + g(Y, A_X Z)vP$$

$$+ g(Y, \tilde{\nabla}_X Z)vP + g(X,Z)g(Y,vP)vP + g(Y,Z)\tilde{\nabla}_X P \qquad (3.2.16)$$

yazılabilir. Benzer şekilde *X* ile *Y* yer değiştirilirse

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = A_Y A_X Z + v\tilde{\nabla}_Y A_X Z + \eta(A_X Z)Y + A_Y h\tilde{\nabla}_X Z + h\tilde{\nabla}_Y h\tilde{\nabla}_X Z \qquad (3.2.17)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = A_{[X,Y]}Z + h\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{3.2.18}$$

bulunur.

$$h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_Y Z - h\tilde{\nabla}_Y h\tilde{\nabla}_X Z - h\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z = R'(X,Y)Z$$

olmak üzere,(3.2.16), (3.2.17) ve (3.2.18) denklemleri (3.2.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)Z = {} & R'(X,Y)Z + A_X A_Y Z + v\tilde{\nabla}_X A_Y Z + \eta(A_Y Z)X + A_X h\tilde{\nabla}_Y Z \\ & - A_Y A_X Z - v\tilde{\nabla}_Y A_X Z - \eta(A_X Z)Y - A_Y h\tilde{\nabla}_X Z - A_{[X,Y]}Z \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

bulunur.

(3.2.19) eşitliği $\forall H \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,H) = {} & g(R'(X,Y)Z,H) + g(A_X A_Y Z,H) + g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,,H) + g(\eta(A_Y Z)X,H \\ & + g(\eta(A_Y Z)X,H) + g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,H) - g(A_Y A_X Z,H) - g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,H) \\ & - g(\eta(A_X Z)Y,H) - g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,H) - g(A_{[X,Y]}Z,H) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,H) = {} & g(R'(X,Y)Z,H) + g(A_Y Z, A_X H) + \eta(A_Y Z)g(X,H) \\ & - g(A_X Z, A_Y H) - \eta(A_X Z)g(Y,H) + 2g(A_Z H, A_X Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan (3.2.9) eşitliği $\forall V \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,V) = {} & g(R'(X,Y)Z,V) + g(A_X A_Y Z,V) + g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V) + g(\eta(A_Y Z)X,V) \\ & + g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V) - g(A_Y A_X Z,V) - g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V) - g(\eta(A_X Z)Y,V) \\ & - g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V) - g(A_{[X,Y]}Z,V) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,V) = {} & g(R'(X,Y)Z,V) + g(A_Y Z, A_X V) + g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V) + \eta(A_Y Z)g(X,V) \\ & + g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V) - g(A_X Z, A_Y V) - g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V) - \eta(A_X Z)g(Y,V) \\ & - g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V) - g(A_{[X,Y]}Z,V) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılrsa,

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(X,Y)Z,V) = {} & g(A_Y Z, A_X V) + g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V) + g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V) \\ & - g(A_X Z, A_Y V) - g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V) \; - g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V) \end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.2.4. (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\rightarrow(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{R}$,semi-simetrik metrik konneksiyonda tanımlı eğrilik tensörü olmak üzere $\forall\ V,W\in\chi^v(N)$ ve $\forall\ X,Y\in\chi^h(N)$ için

$i)$ $\tilde{R}(V,W,X,Y)=R'(V,W,X,Y)+g(T_WX,T_VY)-g(T_VX,T_WY)+\eta(X)g(T_VW,Y)-\eta(X)g(T_WV,Y)$

$ii)$ $\tilde{R}(V,X,W,Y)=R'(V,X,W,Y)+g(h\tilde{\nabla}_VA_XW,Y)+g(T_VA_XW,Y)+g(\hat{\nabla}_VW,P)g(X,Y)$

$$+g(T_VW,P)g(X,Y)+g(W,P)g(h\tilde{\nabla}_VX,Y)-g(A_X\hat{\nabla}_VW,Y)-\eta(\hat{\nabla}_VW)g(X,Y)$$

$$-g(h\tilde{\nabla}_XT_VW,Y)-g(T_{[V,X]}W,Y)+g(W,\nabla_VP)g(X,Y)+g(W,V)g(X,Y)$$

$$-\eta(V)\eta(W)g(X,Y)$$

$iii)$ $\tilde{R}(X,V,Y,W)=R'(X,V,Y,W)+g(A_Xh\tilde{\nabla}_VY,W)+g(X,h\tilde{\nabla}_VY)g(vP,W)+g(v\tilde{\nabla}_XT_VY,W)$

$$+g(A_XY,vP)g(V,W)+g(h\tilde{\nabla}_XY,hP)g(V,W)+g(X,Y)g(V,W)$$

$$+g(Y,\nabla_XP)g(V,W)+g(Y,X)g(V,W)-\eta(X)\eta(Y)g(V,W)$$

$$+\eta(Y)g(v\tilde{\nabla}_XV,W)-g(\hat{\nabla}_VA_XY,W)-g(T_Vh\tilde{\nabla}_XY,W)-\eta(h\tilde{\nabla}_XY)g(V,W)$$

$$-g(h\tilde{\nabla}_VX,Y)g(vP,W)-g(X,h\tilde{\nabla}_VY)g(vP,W)-g(X,Y)g(\hat{\nabla}_VvP,W)$$

$$-g(T_{[X,V]}Y,W)$$

$iv)$ $\tilde{R}(X,Y,V,W)=g(R'(X,Y,V,W)-g(A_YV,A_XW)+g(A_XV,A_YW)+g(X,A_YV)\eta(W)$

$$-g(Y,A_XV)\eta(W)+\eta(V)g(A_XY,W)-\eta(V)g(A_YX)W$$

İspat.

i) (3.2.7) eşitliği $Y \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(V,W)X,Y) = g(R'(V,W)X,Y) + g(T_V h\tilde{\nabla}_W X,Y) - g(T_W h\tilde{\nabla}_V X,Y) + \eta(h\tilde{\nabla}_W X)g(V,Y)$$

$$-\eta(h\tilde{\nabla}_V X)g(W,Y) + g(\hat{\nabla}_V T_W X,Y) - g(\hat{\nabla}_W T_V X,Y) + g(T_V T_W X,Y)$$

$$-g(T_W T_V X,Y) + g(h\tilde{\nabla}_V X,hP)g(W,Y) + g(T_V X,vP)g(W,Y) + \eta(X)g(V,vP)g(W,Y)$$

$$-g(h\tilde{\nabla}_W X,hP)g(V,Y) - g(T_W X,vP)g(V,Y) - \eta(X)g(W,vP)g(V,Y)$$

$$-g(T_{[V,W]}X,Y) + \eta(X)g(T_V W,Y) - \eta(X)g(T_W V,Y)$$

olur. Burada gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\tilde{R}(V,W)X,Y) = g(R'(V,W)X,Y) + g(T_V T_W X,Y) - g(T_W T_V X,Y) + \eta(X)g(T_V W,Y) - \eta(X)g(T_W V,Y)$$

bulunur.

ii) $\forall\ V,W \in \chi^v(M)$ ve $\forall\ X \in \chi^h(N)$ için (2.1.1) denklemi yazılırsa

$$\tilde{R}(V,X)W = \tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X W - \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_{[V,X]} W \qquad (3.2.20)$$

Elde edilir. Buradan (3.1.22), (3.1.21) ve (3.1.20) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X W = \tilde{\nabla}_V (A_X W + v\tilde{\nabla}_X W + \eta(W)X)$$

$$= \tilde{\nabla}_V A_X W + \tilde{\nabla}_V v\tilde{\nabla}_X W + \tilde{\nabla}_V \eta(W)X$$

bulunur.

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X W = h\tilde{\nabla}_V A_X W + T_V A_X W + \eta(A_X W) + \hat{\nabla}_V v\tilde{\nabla}_X W + T_V v\tilde{\nabla}_X W$$

$$+\mathrm{g}(\tilde{\nabla}_V W,P)X + g(W,\tilde{\nabla}_V P)X + g(W,P)\tilde{\nabla}_V X$$

$$= h\tilde{\nabla}_V A_X W + T_V A_X W + \eta(A_X W) + \hat{\nabla}_V v\tilde{\nabla}_X W + T_V v\tilde{\nabla}_X W$$
$$+ g(\hat{\nabla}_V \mathrm{W}+\mathrm{T}_V W,P)X + g(W,\tilde{\nabla}_V P)X + g(W,P)\tilde{\nabla}_V \mathrm{X}$$

olur. Buradan da

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X W = h\tilde{\nabla}_V A_X W + T_V A_X W + \eta(A_X W) + \hat{\nabla}_V v\tilde{\nabla}_X W + T_V v\tilde{\nabla}_X W$$

$$+ g(\hat{\nabla}_V \mathrm{W},P)X + g(\mathrm{T}_V W,P)X + g(W,\tilde{\nabla}_V P)X + g(W,P)h\tilde{\nabla}_V X$$

$$+ g(W,P)T_V X + g(W,P)\eta(X)V \qquad (3.2.21)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V W = \tilde{\nabla}_X (\hat{\nabla}_V W + T_V W)$$

$$= \tilde{\nabla}_X \hat{\nabla}_V W + \tilde{\nabla}_X T_V W$$

(3.1.22) ve (3.1.23) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V W &= A_X \hat{\nabla}_V W + v\tilde{\nabla}_X \hat{\nabla}_V W + \eta(\hat{\nabla}_V W)X + A_X T_V W \\ &+ h\tilde{\nabla}_X T_V W + g(X, T_V W)vP \end{aligned} \tag{3.2.22}$$

ve

$$\tilde{\nabla}_{[V,X]} W = \hat{\nabla}_{[V,X]} W + T_{[V,X]} W \tag{3.2.23}$$

bulunur. Ayrıca

$$v\tilde{\nabla}_V v\tilde{\nabla}_X W - v\tilde{\nabla}_X \hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_{[V,X]} W = R'(V, X)W$$

olmak üzere (3.2.21),(3.2.22) ve (3.2.23) eşitlikleri (3.2.20) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}(V, X)W &= R'(V, X)W + h\tilde{\nabla}_V A_X W + T_V A_X W + \eta(A_X W) + T_V v\tilde{\nabla}_X W \\ &+ g(\hat{\nabla}_V W, P)X + g(T_V W, P)X + g(W, \tilde{\nabla}_V P)X + g(W, P)h\tilde{\nabla}_V X \\ &+ g(W, P)T_V X + g(W, P)\eta(X)V - A_X \hat{\nabla}_V W - \eta(\hat{\nabla}_V W)X - A_X T_V W \\ &- h\tilde{\nabla}_X T_V W - g(X, T_V W)vP - T_{[V,X]} W \end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklem $Y \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(V, X)W, Y) &= g(R'(V, X)W, Y) + g(h\tilde{\nabla}_V A_X W, Y) + g(T_V A_X W, Y) \\ &+ \eta(A_X W)g(V, Y) + g(T_V v\tilde{\nabla}_X W, Y) + g(\hat{\nabla}_V W, P)g(X, Y) \\ &+ g(T_V W, P)g(X, Y) + g(W, \tilde{\nabla}_V P)g(X, Y) + g(W, P)g(h\tilde{\nabla}_V X, Y) \\ &+ g(W, P)g(T_V X, Y) + g(W, P)\eta(X)g(V, Y) - g(A_X \hat{\nabla}_V W, Y) \\ &- \eta(\hat{\nabla}_V W)g(X, Y) - g(A_X T_V W, Y) - g(h\tilde{\nabla}_X T_V W, Y) - g(X, T_V W)g(vP, Y) - g(T_{[V,X]} W, Y) \end{aligned}$$

Buradan gerekli hesaplamalar yapıldıktan sonra

$$\begin{aligned} g(\tilde{R}(V, X)W, Y) &= g(R'(V, X)W, Y) + g(h\tilde{\nabla}_V A_X W, Y) + g(T_V A_X W, Y) + g(\hat{\nabla}_V W, P)g(X, Y) \\ &+ g(T_V W, P)g(X, Y) + g(W, P)g(h\tilde{\nabla}_V X, Y) - g(A_X \hat{\nabla}_V W, Y) \quad - \eta(\hat{\nabla}_V W)g(X, Y) \\ &- g(h\tilde{\nabla}_X T_V W, Y) - g(T_{[V,X]} W, Y) + g(W, \nabla_V P)g(X, Y) + g(W, V)g(X, Y) \\ &- \eta(V)\eta(W)g(X, Y) \end{aligned}$$

elde edilir.

iii) $X,Y \in \chi^h(N)$ $V,W \in \chi^h(N)$ olmak üzere (2.1.1) kullanılarak

$$\tilde{R}(X,V)Y = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V Y - \tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_{[X,V]} Y \tag{3.2.24}$$

yazılır. Burada $\tilde{\nabla}_V Y$ kısmı için (3.1.21) ve (3.1.22) ve $\tilde{\nabla}_X Y$ kısmı için (3.1.23) ve (3.1.20) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V Y &= \tilde{\nabla}_X (h\tilde{\nabla}_V Y + T_V Y + \eta(Y)V) \\ &= \tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y + \tilde{\nabla}_X T_V Y + \tilde{\nabla}_X \eta(Y)V\end{aligned}$$

bulunur. Yeniden (3.1.23) ve (3.1.22) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_V Y = {} & A_X h\tilde{\nabla}_V Y + h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)\nu P + A_X T_V Y + \nu\tilde{\nabla}_X T_V Y \\ & + \eta(T_V Y)X + g(\tilde{\nabla}_X Y, P)V + g(Y, \tilde{\nabla}_X P) + g(Y,P)\tilde{\nabla}_X V \\ = {} & A_X h\tilde{\nabla}_V Y + h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X, h\tilde{\nabla}_V Y)\nu P + A_X T_V Y + \nu\tilde{\nabla}_X T_V Y \\ & + \eta(T_V Y)X + g(A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)\nu P, P)V \\ & + g(Y, \nabla_X P + \eta(P)X - g(X,P)P)V\end{aligned} \tag{3.2.25}$$

eşitliği elde edilir. Benzer işlemler yapılarak

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X Y &= \tilde{\nabla}_V (A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)\nu P) \\ &= \tilde{\nabla}_V A_X Y + \tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y + \tilde{\nabla}_V g(X,Y)\nu P\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada tekrar (3.1.20) ve (3.1.21) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_X Y = {} & \hat{\nabla}_V A_X Y + T_V A_X Y + h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y + T_V h\tilde{\nabla}_X Y + \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V \\ & + \mathrm{g}(\tilde{\nabla}_V X, Y)\nu P + g(X, \tilde{\nabla}_V Y)\nu P + g(X,Y)\tilde{\nabla}_V \nu P\end{aligned} \tag{3.2.26}$$

bulunur. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y = h\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y + T_{[X,V]} Y + \eta(Y)[X,V] \tag{3.2.27}$$

ve

$h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_V Y - h\tilde{\nabla}_V h\tilde{\nabla}_X Y - h\tilde{\nabla}_{[X,V]} Y = R'(X,V)Y$ olmak üzere (3.2.25),(3.2.26) ve (3.2.27) denklemleri (3.2.24) denkleminde yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(X,V)Y = R'(X,V)Y + A_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP + A_X T_V Y + v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+\eta(T_V Y)X + g(A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y + g(X,Y)vP,P)V$$

$$+ g(Y,\nabla_X P + \eta(P)X - g(X,P)P)V + g(Y,P)(A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V)X)$$

$$-\hat{\nabla}_V A_X Y - T_V A_X Y - T_V h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V - \mathrm{g}(\mathrm{h}\tilde{\nabla}_V X,Y)vP - g(T_V X,Y)vP$$

$$-\eta(X)g(V,Y)vP - g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP - g(X,T_V Y)vP - \eta(Y)g(X,V)vP$$

$$-g(X,Y)\hat{\nabla}_V vP - g(X,Y)T_V vP - T_{[X,V]}Y - \eta(Y)[X,V]$$

ifadesi elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{R}(X,V)Y = R'(X,V)Y + A_X h\tilde{\nabla}_V Y + g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP + A_X T_V Y + v\tilde{\nabla}_X T_V Y$$

$$+\eta(T_V Y)X + g(A_X Y,P)V + g(h\tilde{\nabla}_X Y,P)V + g(X,Y)V + g(Y,\nabla_X P)V$$

$$+ g(Y,X)V - \eta(X)\eta(Y)V + \eta(Y)A_X V + \eta(Y)v\tilde{\nabla}_X V + \eta(Y)\eta(V)X$$

$$-\hat{\nabla}_V A_X Y - T_V A_X Y - T_V h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)V - g(h\tilde{\nabla}_V X,Y)vP$$

$$-g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)vP - g(X,Y)\hat{\nabla}_V vP - g(X,Y)T_V vP - T_{[X,V]}Y - \eta(Y)[X,V] \qquad (3.2.28)$$

elde edilir. (3.2.28) ifadesi $W \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(X,V)Y,W) = g(R'(X,V)Y,W) + g(A_X h\tilde{\nabla}_V Y,W) + g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)g(vP,W) + g(v\tilde{\nabla}_X T_V Y,W)$$

$$+ g(A_X Y,vP)g(V,W) + g(h\tilde{\nabla}_X Y,hP)g(V,W) + g(X,Y)g(V,W)$$

$$+ g(Y,\nabla_X P)g(V,W) + g(Y,X)g(V,W) - \eta(X)\eta(Y)g(V,W)$$

$$+\eta(Y)g(v\tilde{\nabla}_X V,W) - g(\hat{\nabla}_V A_X Y,W) - g(T_V h\tilde{\nabla}_X Y,W) - \eta(h\tilde{\nabla}_X Y)g(V,W)$$

$$-g(h\tilde{\nabla}_V X,Y)g(vP,W) - g(X,h\tilde{\nabla}_V Y)g(vP,W) - g(X,Y)g(\hat{\nabla}_V vP,W)$$

$$-g(T_{[X,V]}Y,W)$$

elde edilir.

iv) $\forall\ X,Y \in \chi^h(N)$ ve $\forall\ V,W \in \chi^v(N)$ için (2.1.1) kullanılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)V = \tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y V - \tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X V - \tilde{\nabla}_{[X,Y]}V \qquad (3.2.29)$$

Buradan (3.1.22) ve (3.1.23) kullanarak

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y V = \tilde{\nabla}_X (A_Y V + v\tilde{\nabla}_Y V + \eta(V)Y)$$

$$= \tilde{\nabla}_X A_Y V + \tilde{\nabla}_X v\tilde{\nabla}_Y V + \tilde{\nabla}_X \eta(V)Y$$

Tekrar (3.1.22) ve (3.1.23) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y V = A_X A_Y V + h\tilde{\nabla}_X A_Y V + g(X, A_Y V)vP + A_X v\tilde{\nabla}_Y V + v\tilde{\nabla}_X v\tilde{\nabla}_Y V$$

$$+ \eta(v\tilde{\nabla}_Y V)X + g(\tilde{\nabla}_X V, P)Y + g(V, \tilde{\nabla}_X P)Y + g(V, P)\tilde{\nabla}_X Y$$

Eşitliği elde edilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y V = A_X A_Y V + h\tilde{\nabla}_X A_Y V + g(X, A_Y V)vP + A_X v\tilde{\nabla}_Y V + v\tilde{\nabla}_X v\tilde{\nabla}_Y V$$

$$+ \eta(v\tilde{\nabla}_Y V)X + g(A_X V, P)Y + g(v\tilde{\nabla}_X V, P)Y + g(\eta(V)X, P)Y$$

$$+ g(V, \tilde{\nabla}_X P)Y + g(V, P)A_X Y + g(V, P)h\tilde{\nabla}_X Y + g(V, P)g(X, Y)vP \qquad (3.2.30)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X V = A_Y A_X V + h\tilde{\nabla}_Y A_X V + g(Y, A_X V)vP + A_Y v\tilde{\nabla}_X V + v\tilde{\nabla}_Y v\tilde{\nabla}_X V$$

$$+ \eta(v\tilde{\nabla}_X V)Y + g(A_Y V, P)X + g(v\tilde{\nabla}_Y V, P)X + g(\eta(V)Y, P)X$$

$$+ g(V, \tilde{\nabla}_Y P)X + g(V, P)A_Y X + g(V, P)h\tilde{\nabla}_Y X + g(V, P)g(Y, X)vP \qquad (3.2.31)$$

yazılabilir. Ayrıca (3.1.20) den

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} V = \hat{\nabla}_{[X,Y]} V + T_{[X,Y]} V \qquad (3.2.32)$$

ve

$v\tilde{\nabla}_X v\tilde{\nabla}_Y V - v\tilde{\nabla}_Y v\tilde{\nabla}_X V - \hat{\nabla}_{[X,Y]} V = R'(X,Y)V$ olmak üzere (3.2.30),(3.2.31) ve (3.2.32) denklemleri (3.2.29) eşitliğinde yazılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)V = R'(X,Y)V + A_X A_Y V - A_Y A_X V + h\tilde{\nabla}_X A_Y V - h\tilde{\nabla}_Y A_X V$$

$$+ g(X, A_Y V)vP - g(Y, A_X V)vP + A_X v\tilde{\nabla}_Y V - A_Y v\tilde{\nabla}_X V$$

$$+\eta(v\tilde{\nabla}_Y V)X - \eta(v\tilde{\nabla}_X V)Y + g(A_X V, P)Y - g(A_Y V, P)X$$

$$+ g(v\tilde{\nabla}_X V, P)Y - g(v\tilde{\nabla}_Y V, P)X + g(\eta(V)X, P)Y - g(\eta(V)Y, P)X$$

$$+(V, \tilde{\nabla}_X P)Y - g(V, \tilde{\nabla}_Y P)X + g(V, P)A_X Y - g(V, P)A_Y X$$

$$+ g(V, P)h\tilde{\nabla}_X Y - g(V, P)h\tilde{\nabla}_Y X - T_{[X,Y]}V \qquad (3.2.33)$$

olur. (3.2.33) ifadesi $W \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$\tilde{R}(X,Y,V,W) = g(R'(X,Y,V,W) - g(A_Y V, A_X W) + g(A_X V, A_Y W) + g(X, A_Y V)\eta(W)$$

$$- g(Y, A_X V)\eta(W) + \eta(V)g(A_X Y, W) - \eta(V)g(A_Y X)W$$

elde edilir.

Teorem 3.2.5. (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{R}$,semi-simetrik metrik konneksiyonda tanımlı Riemann submersiyonunun eğrilik tensörü ve $\tilde{K}$, Riemann-Chiristofell eğrilik tensörü olmak üzere $\forall\ X,Y \in \chi^h(N)$ ve $\forall\ U,V \in \chi^v(N)$ için

$i)$ $\tilde{K}(U,V) = \hat{K}(U,V) - \|T_U V\|^2 + g(T_V V, T_U U)$

$$+\eta(T_V U)g(U,V) - \eta(T_U U)$$

$ii)$ $\tilde{K}(X,Y) = \hat{K}(X,Y) - g(A_Y Y, A_X X) - \|A_X Y\|^2 + \eta(A_Y Y)$

$$+g(\tilde{\nabla}_X P, X) + g(X,Y)(-\eta(A_X Y) - g(\tilde{\nabla}_Y P, X))$$

$$iii)\ \tilde{K}(V,X)=g(R'(V,X)V,X)+g(h\tilde{\nabla}_V A_X V,X)+g(T_V v\tilde{\nabla}_X V,X)+\eta(\hat{\nabla}_V V)+\eta(T_V V)$$

$$+\eta(V)g(h\tilde{\nabla}_V X,X)-g(A_X\hat{\nabla}_V V,X)-g(h\tilde{\nabla}_X T_V V,X)-g(T_{[V,X]}V,X)$$

$$+g(V,\nabla_V P)+1-\eta(V)^{2}$$

$$iv)\ \tilde{K}(X,V)=\tilde{R}(X,V,X,V)$$

$$=K'(X,V)+g(A_X h\tilde{\nabla}_V X,V)+g(X,h\tilde{\nabla}_V X)\eta(V)+g(v\tilde{\nabla}_X T_V X,V)+g(A_X X,P)$$

$$+g(h\tilde{\nabla}_X X,P)+g(X,\tilde{\nabla}_X P)+2-[\eta(X)]^2+\eta(X)g(v\tilde{\nabla}_X V,V)+[\eta(X)]^2\eta(V)$$

$$-g(\hat{\nabla}_V A_X X,V)-g(T_V h\tilde{\nabla}_X X,V)-\eta(h\tilde{\nabla}_X X)-g(h\tilde{\nabla}_V X,X)\eta(V)-g(X,h\tilde{\nabla}_V X)\eta(V)$$

$$-g(\hat{\nabla}_V vP,V)-g(T_{[X,V]}X,V)-\eta(X)g([X,V],V)$$

dir.

İspat

i) $\forall\ U,V\in\chi^v(N)$ için (3.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$\tilde{K}(U,V)=g(\hat{R}(U,V)U,V)-g(T_U V,T_V U)+g(T_V V,T_U U)$$

$$+\eta(T_V U)g(U,V)-\eta(T_U U)g(V,V)$$

yazılabilir. Buradan

$$\tilde{K}(U,V)=\hat{K}(U,V)-\|T_U V\|^2+g(T_V V,T_U U)$$

$$+\eta(T_V U)g(U,V)-\eta(T_U U)$$

elde edilir.

ii) $X,Y\in\chi^h(N)$ olmak üzere (3.2.13) eşitliğinde Z yerine X ve H yerine Y yazılırsa

$$\tilde{K}(X,Y)=g(\tilde{R}(X,Y)X,Y)$$

$$=g(\hat{R}(X,Y)X,Y)-g(A_Y Y,A_X X)+g(A_X Y,A_Y X)$$

$$+\eta(A_Y Y)g(X,X)-\eta(A_X Y)g(Y,X)+g(Y,Y)g(\tilde{\nabla}_X P,X)$$

$$-g(X,Y)g(\tilde{\nabla}_Y P,X)$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\tilde{K}(X,Y) = \hat{K}(X,Y) - g(A_Y Y, A_X X) - \|A_X Y\|^2 + \eta(A_Y Y) + g(\tilde{\nabla}_X P, X)$$

$$+\mathrm{g}(X,Y)(-\eta(A_X Y) - g(\tilde{\nabla}_Y P, X)$$

denklemi elde edilir.

iii) (3.2.24) ifadesinde *W* yerine *V* ve *Y* yerine *X* yazılırsa

$$\tilde{K}(V,X) = g\tilde{R}(V,X)V,X)$$

$$\tilde{R}(V,X)V = R'(V,X)V + h\tilde{\nabla}_V A_X V + T_V A_X V + \eta(A_X V)V + T_V v\tilde{\nabla}_X V + g(\hat{\nabla}_V V,P)X$$

$$+ g(T_V V,P)X + g(V,\tilde{\nabla}_V P)X + g(V,P)h\tilde{\nabla}_V X + g(V,P)T_V X + g(V,P)\eta(X)V$$

$$- A_X \hat{\nabla}_V V - \eta(\hat{\nabla}_V V)X - A_X T_V V - h\tilde{\nabla}_X T_V V - g(X,T_V V)vP - T_{[V,X]}V$$

Buradan elde edilen ifade $X \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$\tilde{K}(V,X) = g(R'(V,X)V,X) + g(h\tilde{\nabla}_V A_X V,X) + g(T_V v\tilde{\nabla}_X V,X) + \eta(\hat{\nabla}_V V) + \eta(T_V V)$$

$$+ \eta(V)g(h\tilde{\nabla}_V X,X) - g(A_X \hat{\nabla}_V V,X) - g(h\tilde{\nabla}_X T_V V,X) - g(T_{[V,X]}V,X)$$

$$+ g(V,\nabla_V P) + 1 - [\eta(V)]^2$$

elde edilir.

iv) (3.2.28) ifadesinde *Y* yerine *X* ve *W* yerine *V* yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$\tilde{K}(X,V) = g(\tilde{R}(X,V)X,V)$ olmak üzere

$$\tilde{R}(X,V)X = R'(X,V)X + A_X h\tilde{\nabla}_V X + g(X,h\tilde{\nabla}_V X)vP + A_X T_V X + v\tilde{\nabla}_X T_V X + \eta(T_V X)X$$

$$+ g(A_X X,P)V + g(h\tilde{\nabla}_X X,P)V + g(X,X)g(vP,P)V + g(X,\tilde{\nabla}_X P)V + g(X,X)V$$

$$- \eta(X)g(X,P)V + \eta(X)A_X V + \eta(X)v\tilde{\nabla}_X V + \eta(X)\eta(V)X - \hat{\nabla}_V A_X X - T_V A_X X$$

$$- T_V h\tilde{\nabla}_X X - \eta(h\tilde{\nabla}_X X)V - g(h\tilde{\nabla}_V X,X)vP - g(X,h\tilde{\nabla}_V X)vP - g(X,X)\hat{\nabla}_V vP$$

$$- g(X,X)T_V vP - T_{[X,V]}X - \eta(X)[X,V]$$

bulunur. Bu denklem $V \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$\tilde{K}(X,V) = K'(X,V) + g(A_X h\tilde{\nabla}_V X,V) + g(X,h\tilde{\nabla}_V X)\eta(V) + g(v\tilde{\nabla}_X T_V X,V) + g(A_X X,P)$$

$$+g(h\tilde{\nabla}_X X,P) + g(X,\tilde{\nabla}_X P) + 2 - [\eta(X)]^2 + \eta(X)g(v\tilde{\nabla}_X V,V) + [\eta(X)]^2\eta(V)$$

$$-g(\hat{\nabla}_V A_X X,V) - g(T_V h\tilde{\nabla}_X X,V) - \eta(h\tilde{\nabla}_X X) - g(h\tilde{\nabla}_V X,X)\eta(V) - g(X,h\tilde{\nabla}_V X)\eta(V)$$

$$-g(\hat{\nabla}_V vP,V) - g(T_{[X,V]}X,V) - \eta(X)g([X,V],V)$$

elde edilir.

4. QUARTER-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYON İLE TANIMLI RİEMANN SUBMERSİYONLAR

Bu bölümde quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon kavramı Riemann submersiyonuna taşınarak bu konneksiyon ile iki Riemann manifold arasındaki submersiyon tanımlanıp temel özellikleri incelenmiştir.

(N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ∇, Levi-Civita konneksiyonu, η,1-form ve φ,(1,1) tipinde tensör alanı olmak üzere $E, F \in \chi(N)$ için

$$\tilde{\nabla}_E F = \nabla_E F + \eta(F)\varphi(E) \tag{4.1.1}$$

şeklinde tanımlı konneksiyonu alalım.

$\tilde{\nabla}$ konneksiyonunun torsiyonu

$$\tilde{T}(E,F) = \tilde{\nabla}_E F - \tilde{\nabla}_F E - [E,F]$$

olmak üzere (4.1.1) eşitliği kullanılırsa kolayca görülebilir ki

$$\begin{aligned} \tilde{T}(E,F) &= (\nabla_E F + \eta(F)\varphi(E)) - (\nabla_F E + \eta(E)\varphi(F)) - [E,F] \\ &= T(E,F) + \eta(F)\varphi(E) - \eta(E)\varphi(F) \end{aligned}$$

dir. ∇,Levi-Civita konneksiyonunun torsiyon tensörü sıfır olduğundan

$$\tilde{T}(E,F) = \eta(F)\varphi(E) - \eta(E)\varphi(F)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonu quarter-simetrik konneksiyondur. Ayrıca

$$(\tilde{\nabla}_E g)(F,G) = g(\tilde{\nabla}_E F, G) + g(F, \tilde{\nabla}_E G) + Eg(F,G)$$

$$= g(\nabla_E F + \eta(F)\varphi(E), G) + g(F, \nabla_E F + \eta(F)\varphi(E)) + Eg(F,G)$$

metriğin özelliğinden

$$(\tilde{\nabla}_E g)(F,G) = g(\nabla_E F, G) + \eta(F) g(\varphi(E), G) + g(F, \nabla_E G)$$

$$+ \eta(G) g(F, \varphi(E)) + Eg(F,G)$$

elde edilir.

$$g(\nabla_E F, G) + g(F, \nabla_E G) + Eg(F, G) = (\nabla_E g)(F, G)$$

ve

$$(\nabla_E g)(F, G) = 0$$

olduğundan

$$(\tilde{\nabla}_E g)(F, G) = \eta(F) g(\varphi(E), G) + \eta(G) g(F, \varphi(E))$$

ele edilir. Buradan

$$(\tilde{\nabla}_E g)(F, G) \neq 0$$

sonucu elde edilir. Dolayısıyla (4.1.1) eşitliğindeki konneksiyon, quarter simetrik metrik olmayan konneksiyondur.

4.1.Temel Tensörler

Bu bölümde O'Neill tarafından Riemann submersiyonlar için verilen T ve A tensörleri quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon için tanımlanmış ve sonuçları incelenmiştir.

Teorem 4.1.1 (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon olmak üzere $\forall$ $E, F,$ $\chi(N)$ için

i) $\tilde{T}_E F = T_E F + \eta(vF) h\varphi(vE) + \eta(hF) v\varphi(vE)$ (4.1.2)

ii) $\tilde{A}_E F = A_E F + \eta(hF) v\varphi(hE) + \eta(vF) h\varphi(hE)$ (4.1.3)

şeklindedir.

İspat. O'Neill tensörleri, $\tilde{\nabla}$ quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon için yazılırsa

$$\tilde{T}_E F = h\tilde{\nabla}_{vE} vF + v\tilde{\nabla}_{vE} hF \quad (4.1.4)$$

$$\tilde{A}_E F = v\tilde{\nabla}_{hE} hF + h\tilde{\nabla}_{hE} vF \quad (4.1.5)$$

elde edilir. Buradan (4.1.4) ifadesinde (4.1.1) eşitliği yazılırsa

$$\tilde{T}_E F = h(\nabla_{vE} vF + \eta(vF)\varphi(vE)) + v(\nabla_{vE} hF + \eta(hF)\varphi(vE))$$

$$= h\nabla_{vE} vF + \eta(vF)h\varphi(vE) + v\nabla_{vE} hF + \eta(hF)v\varphi(vE)$$

yazılabilir. Buradan

$$h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF = T_E F$$

olduğundan ispat tamamlanmış olur. Benzer şekilde
(4.1.5) ifadesinde (4.1.1) kullanılırsa

$$\tilde{A}_E F = v(\nabla_{hE} hF + \eta(hF)\varphi(hE)) + h(\nabla_{hE} vF + \eta(vF)\varphi(hE))$$

$$= v\nabla_{hE} hF + \eta(hF)v\varphi(hE) + h\nabla_{hE} vF + \eta(vF)h\varphi(hE)$$

yazılabilir. Buradan

$$v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF = A_E F$$

olduğundan istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.2 (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu submersiyonun temel tensörleri olmak üzere $\forall\, E, F, \chi(N)$ için

$i)$ $g(\tilde{T}_E F, G) = g(\tilde{T}_E G, F) + 2g(T_E F, G) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), vG) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), hG)$

$$+\eta(hF)g(v\varphi(vE), vG) + \eta(hF)g(v\varphi(vE), hG) - \eta(vG)g(h\varphi(vE), vF)$$

$$-\eta(vG)g(h\varphi(vE), hF) \; -\eta(hG)g(v\varphi(vE), vF) - \eta(hG)g(v\varphi(vE), hF)$$

$ii)$ $g(\tilde{A}_E F, G) = g(\tilde{A}_E G, F) + 2g(A_E F, G) + \eta(hF)g(v\varphi(hE), vG) - \eta(hG)g(v\varphi(hE), vF)$

$$+\eta(vF)g(h\varphi(hE), hG) - \eta(vG)g(h\varphi(hE), hF)$$

şeklindedir.

İspat: i) (4.1.2) ifadesi ile $G \in \chi(N)$ nin metrikte aldığı değer

$$g(\tilde{T}_E F, G) = g(T_E F + \eta(vF)h\varphi(vE) + \eta(hF)v\varphi(vE), G)$$

$$= g(T_E F, G) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), G) + \eta(hF)g(v\varphi(vE), G)$$

bulunur. Son eşitlikte $G = vG + hG$ alınırsa

$$g(\tilde{T}_E F, G) = g(T_E F, vG + hG) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), vG + hG) + \eta(hF)g(v\varphi(vE), vG + hG)$$

$$= g(T_E F, vG) + g(T_E F, hG) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), vG) + \eta(vF)g(h\varphi(vE), hG)$$

$$+ \eta(hF)g(v\varphi(vE), vG) + \eta(hF)g(v\varphi(vE), hG) \qquad (4.1.6)$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler *F* ile *G* yer değiştirilerek yapılırsa

$$g(\tilde{T}_E G, F) = g(T_E G + \eta(vG)h\varphi(vE) + \eta(hG)v\varphi(vE), F)$$

$$= g(T_E G, F) + \eta(vG)g(h\varphi(vE), F) + \eta(hG)g(v\varphi(vE), F)$$

bulunur. $F = vF + hF$ olduğundan son eşitlikte yerine yazılırsa

$$g(\tilde{T}_E G, F) = g(T_E G, vF + hF) + \eta(vG)g(h\varphi(vE), vF + hF) + \eta(hG)g(v\varphi(vE), vF + hF)$$

$$= g(T_E G, vF) + g(T_E G, hF) + \eta(vG)g(h\varphi(vE), vF) + \eta(vG)g(h\varphi(vE), hF)$$

$$+ \eta(hG)g(v\varphi(vE), vF) + \eta(hG)g(v\varphi(vE), hF) \qquad (4.1.7)$$

elde edilir.

T_E anti simetrik olduğundan (4.1.6) ile (4.1.7) çıkarılıp düzenlenirse istenilen elde edilir.

ii) Benzer şekilde (4.1.3) ifadesi ile $G \in \chi(N)$ nin metrikte aldığı değer

$$g(\tilde{A}_E F, G) = g(A_E F + \eta(hF)v\varphi(hE) + \eta(vF)h\varphi(hE), G)$$

$$= g(A_E F, G) + \eta(hF)g(v\varphi(hE), G) + \eta(vF)g(h\varphi(hE), G)$$

bulunur. $G = vG + hG$ olduğundan

$$g(\tilde{A}_E F, G) = g(A_E F, G) + \eta(hF)g(v\varphi(hE), vG + hG) + \eta(vF)g(h\varphi(hE), vG + hG)$$

$$= g(A_E F, G) + \eta(hF)g(v\varphi(hE), vG) + \eta(hF)g(v\varphi(hE), hG) + \eta(vF)g(h\varphi(hE), vG)$$

$$+ \eta(vF)g(h\varphi(hE), hG)$$

yazılabilir. Buradan gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\tilde{A}_E F,G)=g(A_E F,G)+\eta(hF)g(v\varphi(hE),vG)+\eta(vF)g(h\varphi(hE),hG) \qquad (4.1.8)$$

ifadesi elde edilir. Benzer işlemler *F* ile *G* yer değiştirilerek yapılırsa

$$g(\tilde{A}_E G,F)=g(A_E G+\eta(hG)v\varphi(hE)+\eta(vG)h\varphi(hE),F)$$

$$=g(A_E G,F)+\eta(hG)g(v\varphi(hE),F)+\eta(vG)g(h\varphi(hE),F)$$

bulunur. Buradan

$$g(\tilde{A}_E G,F)=g(A_E G,F)+\eta(hG)g(v\varphi(hE),vF+hF)+\eta(vG)g(h\varphi(hE),vF+hF)$$

$$=g(A_E G,F)+\eta(hG)g(v\varphi(hE),vF)+\eta(hG)g(v\varphi(hE),hF)$$

$$+\eta(vG)g(h\varphi(hE),vF)+\eta(vG)g(h\varphi(hE),hF)$$

yazılabilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g(\tilde{A}_E G,F)=g(A_E G,F)+\eta(hG)g(v\varphi(hE),vF)+\eta(vG)g(h\varphi(hE),hF) \qquad (4.1.9)$$

eşitliği elde edilir. A_E nin anti simetrik olduğu dikkate alınarak (4.1.8) ile (4.1.9) çıkarılıp düzenlenirse istenilen elde edilir.

Teorem 4.1.3 (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\to(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu submersiyonun temel tensörleri olmak üzere $U,W\in\chi^v(N)$ ve $X,Y\in\chi^h(N)$ için

i) $\tilde{T}_U W=\tilde{T}_W U+\eta(vW)h\varphi(vU)-\eta(vU)h\varphi(vW)$

ii) $\tilde{A}_X Y=-\tilde{A}_Y X+\eta(hY)v\varphi(hX)+\eta(hX)v\varphi(hY)$

şeklindedir.

İspat: i) $U,W\in\chi^v(N)$ için (4.1.2) kullanılırsa

$$\tilde{T}_U W=T_U W+\eta(vW)h\varphi(vU)+\eta(hW)v\varphi(vU) \qquad (4.1.10)$$

ve

$$\tilde{T}_W U=T_W U+\eta(vU)h\varphi(vW)+\eta(hU)v\varphi(vW) \qquad (4.1.11)$$

olduğundan $T_U W=T_W U$, *W* ve *U* vertical vektörlerinin *h* lı parçalarının olmayacağı dikkate alınarak (4.1.10) dan (4.1.11) çıkarılırsa

$$\tilde{T}_U W - \tilde{T}_W U = \eta(vW)h\varphi(vU) - \eta(vU)h\varphi(vW)$$

$$\tilde{T}_U W = \tilde{T}_W U + \eta(vW)h\varphi(vU) - \eta(vU)h\varphi(vW)$$

elde edilir.

ii) $X,Y \in \chi^h(N)$ için (4.1.3) kullanılırsa

$$\tilde{A}_X Y = A_X Y + \eta(hY)v\varphi(hX) + \eta(vY)h\varphi(hX) \qquad (4.1.12)$$

ve

$$\tilde{A}_Y X = A_Y X + \eta(hX)v\varphi(hY) + \eta(vX)h\varphi(hY) \qquad (4.1.13)$$

olduğundan ve *vY* ve *vX* kısımları olmadığından ayrıca $A_X Y = -A_Y X$

olduğu dikkate alınırak (4.1.12) ile (4.1.13) toplanırsa

$$\tilde{A}_X Y = -\tilde{A}_Y X + \eta(hY)v\varphi(hX) + \eta(hX)v\varphi(hY)$$

elde edilir.

Sonuç: (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N) \to (B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. $\tilde{T}$ ve $\tilde{A}$ quarter simetrik metrik olmayan konneksiyonlu submersiyonun temel tensörleri olmak üzere $U \in \chi^v(N)$ ve $X \in \chi^h(N)$ için

$$\tilde{T}_U X = T_U X + \eta(hX)v\varphi(vU)$$

$$\tilde{A}_X U = A_X U + \eta(vU)h\varphi(hX)$$

eşitlikleri ele edilir.

Teorem 4.1.4 (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N) \to (B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ve $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon olsun. $V,W \in \chi^v(N)$ ve $X,Y \in \chi^h(N)$ olmak üzere

i) $\tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_V W + \tilde{T}_V W - \eta(W)\varphi(V)$ (4.1.14)

ii) $\tilde{\nabla}_V X = h\tilde{\nabla}_V X + T_V X + \eta(X)v\varphi(V)$ (4.1.15)

iii) $\tilde{\nabla}_X Y = A_X Y + h\tilde{\nabla}_X Y$ (4.1.16)

iv) $\tilde{\nabla}_X V = A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V)h\varphi(X)$ (4.1.17)

şeklindedir.

İspat: i) $V, W \in \chi^v(N)$ için (4.1.1) eşitliği yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_V W = \nabla_V W + \eta(W)\varphi(V) \tag{4.1.18}$$

olduğunu biliyoruz. Diğer taraftan

$$\nabla_V W = v\nabla_V W + h\nabla_V W$$

ifadesinde (4.1.1) kullanılırsa

$$\nabla_V W = v\nabla_V W + h\nabla_V W$$

$$= v(\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)\varphi(V)) + h(\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)\varphi(V))$$

$$= v\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)v\varphi(V) + h\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)h\varphi(V) \tag{4.1.19}$$

ifade $\eta(W)$ parantezine alınırsa

$$\nabla_V W = v\tilde{\nabla}_V W + h\tilde{\nabla}_V W - \eta(W)\varphi(V)$$

elde edilir. Ayrıca,

$v\tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_V W$

ve

$h\tilde{\nabla}_V W = \tilde{T}_V W$

olmak üzere (4.1.19) eşitliği (4.1.18) de yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_V W + \tilde{T}_V W - \eta(W)\varphi(V)$$

elde edilir.

ii) $V \in \chi^v(M)$ ve $X \in \chi^h(N)$ için (4.1.1) den

$$\tilde{\nabla}_V X = \nabla_V X + \eta(X)\varphi(V) \tag{4.1.20}$$

ve $\nabla_V X = v\nabla_V X + h\nabla_V X$ olduğundan

$$\nabla_V X = v(\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)\varphi(V)) + h(\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)\varphi(V))$$

$$= v\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)v\varphi(V) + h\tilde{\nabla}_V X - \eta(X)h\varphi(V) \tag{4.1.21}$$

bulunur. $v\tilde{\nabla}_V X = T_V X$ olmak üzere (4.1.21) denklemi (4.1.20) de yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_V X = h\tilde{\nabla}_V X + T_V X + \eta(X) v\varphi(V)$$

elde edilir.

iii) Benzer şekilde $X, Y \in \chi^h(N)$ için (4.1.1) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \eta(Y)\varphi(X) \tag{4.1.22}$$

$$\nabla_X Y = \tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)\varphi(X)$$

Ayrıca $\nabla_X Y = v\nabla_X Y + h\nabla_X Y$ olduğundan

$$\nabla_X Y = v(\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)\varphi(X)) + h(\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y)\varphi(X))$$

$$= v\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y) v\varphi(X) + h\tilde{\nabla}_X Y - \eta(Y) h\varphi(X) + \eta(Y)\varphi(X) \tag{4.1.23}$$

yazılabilir.

$v\tilde{\nabla}_X Y = A_X Y$

olmak üzere (4.1.23) denklemi (4.1.22)'de yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_V X = h\tilde{\nabla}_V X + T_V X + \eta(X) v\varphi(V)$$

elde edilir.

iv)

$$\tilde{\nabla}_X V = \nabla_X V + \eta(V)\varphi(X) \tag{4.1.24}$$

ayrıca

$$\nabla_X V = v\nabla_X V + h\nabla_X V$$

olduğundan

$$\nabla_X V = v(\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)\varphi(X)) + h(\tilde{\nabla}_X V - \eta(V)\varphi(X))$$

$$= v\tilde{\nabla}_X V - \eta(V) v\varphi(X) + h\tilde{\nabla}_X V - \eta(V) h\varphi(X) \tag{4.1.25}$$

yazılabilir. Ayrıca $h\tilde{\nabla}_X V = A_X V$ olduğundan (4.1.25) denklemi (4.1.24) te yerine yazılırsa

$$\tilde{\nabla}_X V = A_X V + v\tilde{\nabla}_X V + \eta(V) h\varphi(X)$$

elde edilir.

4.2.Quarter-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyon İle Tanımlı Riemann Submersiyonda Eğrilik Özellikleri

Teorem 4.2.1. (N, g_N) ve (B, g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi : (N, g_N) \to (B, g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ; $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon ve $\tilde{R}$,konneksiyonun eğrilik tensörü olmak üzere $U,V,W,F \in \chi^v(N)$ ve $X,Y,Z,H \in \chi^h(N)$ için

i)

$$g(\tilde{R}(U,V)W,F) = g(\hat{R}(U,V)W,F) - \eta(\hat{\nabla}_V W)g(\varphi(U),F) + \eta(\hat{\nabla}_U W)g(\varphi(V),F)$$

$$+\eta(\tilde{T}_V W)g(v\varphi(U),F) - \eta(\tilde{T}_U W)g(v\varphi(V),F) - g(\tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V),F)$$

$$+ g(\tilde{\nabla}_V \eta(W)\varphi(U),F) - \eta(W)g(\varphi([U,V]),F)$$

ii)

$$g(\tilde{R}(U,V)W,X) = g(\tilde{T}_U \hat{\nabla}_V W,X) - g(\tilde{T}_V \hat{\nabla}_U W,X) - \eta(\hat{\nabla}_V W)g(\varphi(U),X) + \eta(\hat{\nabla}_U W)g(\varphi(V),X)$$

$$+ g(h\tilde{\nabla}_U T_V W,X) - g(h\tilde{\nabla}_V T_U W,X) + g(T_U \tilde{T}_V W,X) - g(T_V \tilde{T}_U W,X)$$

$$- g(\tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V),X) + g(\tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(U),X) - g(\tilde{T}_{[U,V]} W,X)$$

$$+\eta(W)g(\varphi(\,[U,V]\,),X)$$

şeklindedir.

İspat:

$U,V,W \in \chi^v(N)$ için (2.1.1) eşitliği yazılırsa

$$\tilde{R}(U,V)W = \tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W - \tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_U W - \tilde{\nabla}_{[U,V]} W \qquad (4.2.1)$$

Buradan $\tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W$ için (4.1.14) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W = \tilde{\nabla}_U (\hat{\nabla}_V W + \tilde{T}_V W - \eta(W)\varphi(V))$$

$$= \tilde{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W + \tilde{\nabla}_U \tilde{T}_V W - \tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V)$$

buradan (4.1.14) ve (4.1.15) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_U \tilde{\nabla}_V W = \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W + \tilde{T}_U \hat{\nabla}_V W - \eta(\hat{\nabla}_V W)\varphi(U) + h\tilde{\nabla}_U \tilde{T}_V W$$

$$+ T_U \tilde{T}_V W + \eta(\tilde{T}_V W)v\varphi(U) - \tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V) \qquad (4.2.2)$$

Benzer işlemler $\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_U W$ için yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_V \tilde{\nabla}_U W = \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W + \tilde{T}_V \hat{\nabla}_U W - \eta(\hat{\nabla}_U W)\varphi(V) + h\tilde{\nabla}_V \tilde{T}_U W$$

$$+ T_V \tilde{T}_U W + \eta(\tilde{T}_U W)v\varphi(V) - \tilde{\nabla}_V \eta(W)\varphi(U) \qquad (4.2.3)$$

elde edilir. Diğer taraftan $\tilde{\nabla}_{[U,V]} W$ ifadesi (4.1.14)' ten açılırsa

$$\tilde{\nabla}_{[U,V]} W = \hat{\nabla}_{[U,V]} W + \tilde{T}_{[U,V]} W - \eta(W)\varphi([U,V]) \qquad (4.2.4)$$

$$\hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W = \hat{R}(U,V)W$$

olmak üzere (4.2.2), (4.2.3) ve (4.2.4) ifadeleri (4.2.1)' de yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(U,V)W = \hat{R}(U,V)W + \tilde{T}_U \hat{\nabla}_V W - \tilde{T}_V \hat{\nabla}_U W - \eta(\hat{\nabla}_V W)\varphi(U) + \eta(\hat{\nabla}_U W)\varphi(V)$$

$$+ h\tilde{\nabla}_U T_V W - h\tilde{\nabla}_V T_U W + T_U \tilde{T}_V W - T_V \tilde{T}_U W + \eta(\tilde{T}_V W)v\varphi(U)$$

$$- \eta(\tilde{T}_U W)v\varphi(V) - \tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V) + \tilde{\nabla}_V \eta(W)\varphi(U)$$

$$- \tilde{T}_{[U,V]} W + \eta(W)\varphi([U,V]) \qquad (4.2.5)$$

elde edilir. (4.2.5) eşitliği $F \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W, F) = g(\hat{R}(U,V)W, F) - \eta(\hat{\nabla}_V W)g(\varphi(U), F) + \eta(\hat{\nabla}_U W)g(\varphi(V), F)$$

$$+ \eta(\tilde{T}_V W)g(v\varphi(U), F) - \eta(\tilde{T}_U W)g(v\varphi(V), F)$$

$$- g(\tilde{\nabla}_U \eta(W)\varphi(V), F) + g(\tilde{\nabla}_V \eta(W)\varphi(U), F) + \eta(W)g(\varphi([U,V], F)$$

istenilen elde edilir. Benzer şekilde (4.2.5) ifadesi $X \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(U,V)W,X)=g(\tilde{T}_U\hat{\nabla}_V W,X)-g(\tilde{T}_V\hat{\nabla}_U W,X)-\eta(\hat{\nabla}_V W)g(\varphi(U),X)+\eta(\hat{\nabla}_U W)g(\varphi(V),X)$$

$$+g(h\tilde{\nabla}_U T_V W,X)-g(h\tilde{\nabla}_V T_U W,X)+g(T_U\tilde{T}_V W,X)-g(T_V\tilde{T}_U W,X)$$

$$-g(\tilde{\nabla}_U\eta(W)\varphi(V),X)+g(\tilde{\nabla}_U\eta(W)\varphi(U),X)-g(\tilde{T}_{[U,V]}W,X)$$

$$+\eta(W)g(\varphi([U,V]\ ),X)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.2 (N,g_N) ve (B,g_B) Riemann manifoldları arasında tanımlı

$$\psi:(N,g_N)\to(B,g_B)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyon ; $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik olmayan konneksiyon ve $\tilde{R}$,konneksiyonun eğrilik tensörü olmak üzere , $\forall\ X,Y,Z,H\in\chi^h(N)$ ve $\forall\ V\in\chi^v(N)$ için

i)

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,H)=g(R'(X,Y)Z,H)-g(A_X H,A_Y Z)+g(A_Y H,A_X Z)$$

$$+\eta(A_Y Z)g(h\varphi(X),H)-\eta(A_X Z)g(h\varphi(Y),H)$$

ii)

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,V)=g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V)-g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V)+g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V)$$

$$-g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V)-2g(T_V Z,A_X Y)-\eta(Z)g(v\varphi(\ [X,Y],V)$$

şeklindedir.

İspat: $X,Y,Z,H\in\chi^h(N)$ için (3.1.2) eşitliği yazılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)Z=\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z \tag{4.2.6}$$

$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z$ kısmı için (4.1.16) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z=\tilde{\nabla}_X(A_Y Z+h\tilde{\nabla}_Y Z)$$

$$=\tilde{\nabla}_X A_Y Z+\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_Y Z$$

Buradan tekrar (4.1.16) ve (4.1.17) kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X \tilde{\nabla}_Y Z = A_X A_Y Z + v\tilde{\nabla}_X A_Y Z + \eta(A_Y Z) h\varphi(X)$$

$$+ A_X h\tilde{\nabla}_Y Z + h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_Y Z \tag{4.2.7}$$

Benzer işlemler $\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z$ için yapılırsa

$$\tilde{\nabla}_Y \tilde{\nabla}_X Z = A_Y A_X Z + v\tilde{\nabla}_Y A_X Z + \eta(A_X Z) h\varphi(Y)$$

$$+ A_Y h\tilde{\nabla}_X Z + h\tilde{\nabla}_Y h\tilde{\nabla}_X Z \tag{4.2.8}$$

$[X,Y]$ dikey vektör alanı olduğu için $\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z$ ifadesi (4.1.15)' ten

$$\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = h\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z + T_{[X,Y]} Z + \eta(Z) v\varphi([X,Y]) \tag{4.2.9}$$

yazılır. $h\tilde{\nabla}_X h\tilde{\nabla}_Y Z - h\tilde{\nabla}_Y h\tilde{\nabla}_X Z - h\tilde{\nabla}_{[X,Y]} Z = R'(X,Y)Z$ olmak üzere (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) eşitlikleri (4.2.6)' da yerine yazılırsa

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R'(X,Y)Z + A_X A_Y Z - A_Y A_X Z + v\tilde{\nabla}_X A_Y Z - v\tilde{\nabla}_Y A_X Z$$

$$+\eta(A_Y Z) h\varphi(X) - \eta(A_X Z) h\varphi(Y) + A_X h\tilde{\nabla}_Y Z$$

$$- A_Y h\tilde{\nabla}_X Z - T_{[X,Y]} Z - \eta(Z) v\varphi([X,Y]) \tag{4.2.10}$$

elde edilir. (4.2.10) ifadesi $H \in \chi^h(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,H) = g(R'(X,Y)Z,H) + g(A_X A_Y Z,H) - g(A_Y A_X Z,H)$$

$$+\eta(A_Y Z) g(h\varphi(X),H) - \eta(A_X Z) g(h\varphi(Y),H)$$

metriğin özelliğinden

$$g(A_X A_Y Z,H) = -g(A_X H, A_Y Z)$$

$$g(A_Y A_X Z,H) = -g(A_Y H, A_X Z)$$

yazılırsa

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,H) = g(R'(X,Y)Z,H) - g(A_X H, A_Y Z) + g(A_Y H, A_X Z)$$

$$+\eta(A_Y Z) g(h\varphi(X),H) - \eta(A_X Z) g(h\varphi(Y),H)$$

elde edilir.

ii) (4.2.10) ifadesi $V \in \chi^v(N)$ ile çarpılırsa

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,V)=g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V)-g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V)+g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V)$$

$$-g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V)-g(T_{[X,Y]}Z,V)-\eta(Z)g(v\varphi([X,Y]),V)$$

Diğer taraftan

$T_{[X,Y]}Z=-2T_{A_X Y}Z$

ve

$g(T_{[X,Y]}Z,V)=-g(2T_{A_X Y}Z,V)=2g(T_V Z, A_X Y)$

olduğundan

$$g(\tilde{R}(X,Y)Z,V)=g(v\tilde{\nabla}_X A_Y Z,V)-g(v\tilde{\nabla}_Y A_X Z,V)+g(A_X h\tilde{\nabla}_Y Z,V)$$

$$-g(A_Y h\tilde{\nabla}_X Z,V)-2g(T_V Z, A_X Y)-\eta(Z)g(v\varphi([X,Y],V)$$

elde edilir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Literatüre yeni kazandırılan bu tez çalışmasında Riemann submersiyonların farklı konneksiyonlar ile incelenmesi ve elde edilen özelliklerin karşılaştırılması fikri üzerinde durulmuştur. İlk olarak semi simetrik metrik konneksiyon ile tanımlı Riemann submersiyonlar çalışılmıştır. Riemann submersiyonlar için temel tensörler olan O'Neill tensörleri bu konneksiyon için tanımlanmış, O'Neill tensörlerine bağlı özellikler semi simetrik metrik konneksiyon kullanılarak çalışılmış ve karşılaştırılmıştır. Ardından Riemann submersiyonlar için temel eğrilik özellikleri semi simetrik metrik konneksiyon için incelenmiş, vertical ve horizantal uzayın eğrilikleri bu konneksiyon için hesaplanmıştır.

İkinci orijinal bölümde Riemann submersiyonlar, quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon ile çalışılmıştır. O'Neill tensörleri bu konneksiyon için tanımlanıp çalışılmıştır. Ayrıca temel eğrilik özellikleri quarter simetrik metrik olmayan konneksiyon için elde edilmiştir.

Burada iki Riemann manifoldu arasında tanımlı Riemann submersiyonlar üzerinde durulmuştur. Yapılan çalışmalar, kompleks, kaehler ve kontakt manifoldlar başta olmak üzere farklı manifoldlar arasında tanımlı Riemann submersiyonlarda incelenebilir. Ayrıca tezde tanımlanan konneksiyonlarla aynı özellikleri sağlayan, farklı konneksiyonlar kullanılarak Riemann submersiyonlar çalışılabilir.

KAYNAKLAR

Agashe, N.S. and Chafle, M.R. (1992). A Semi-Symmetric Non-Metric Connection on a Riemannian Manifold, *Indian Journal.Pure Appl.Math*. 23(6), 399-409.

Akyol, M.A. ve Beğendi, S.(2018) Riemannian submersions endowed with a semi-symmetric non-metric connection,*Konuralp Journal of Mathematics* 6(1) 188-193.

Altafini C.(2004).Redundant robotic chains on Riemannian Submersions, *IEEE Transactions on Robotics and Automation,* 20(2), 335-340.

Binh,T.,Q. (1990).On semi-symmetric connection, *Period Math. Hungar*. 21 101–107.

Bootby, W. M.(1986) An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry,*Academic Press Inc.*

Chen, B. Y. (1973). *Geometry of Submanifolds, Pure ve Applied Mathematics*. No. 22. Marcel Dekker, Inc. , New York.

Chaki,M.,C.,Konar,A. (1981).On a type of semi-symmetric connection on a Riemannian manifold, *Journal Pure Math., Calcutta University,* 77–80.

De,U.,C. and De.B.,K. (1995).Some properties of a semi symmetric metric connection on a Riemannian manifold. *Istanbul Univ. Fen Fak. Mat. Derg., pp.* 111-117, 54.

Do Carmo,M.,P. *(*1992).*Riemannian Geometry, Birkhauser* Boston.

Eells, J., Sampson, J. H.(1964). Harmonic mappings of Riemannian manifolds, *Amer. J. Math*.,89,109-160.

Falcitelli, M. Ianus, S. Pastore, A. M. (2004). Riemannian Submersions and Related Topics, *World Scientific*.

Falcitelli, M., Ianus, S., Pastore, A.M. and Visinescu, M.(2003). Some applications of Riemannian submersions in physics. *Rev. Roum. Phys*. 48, 627-639.

Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian Almost Product Manifolds and Submersions. *J. Math. Mech*. 16, 715–737.

Gündüzalp, Y.,(2007). *Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine*, Yüksek lisans tezi, Malatya.

Hacısalihoğlu, H.H. (1983). *Diferensiyel Geometri*, İnönü Ünv. Fen Edebiyat Fakültesi Yayınları, 2: 24-173.

Hacısalihoğlu, H.H.(1998). *Diferensiyel Geometri,* Ankara Ünv. Fen Fakültesi, 21-48.

Hayden, H. A. (1932). *Subspaces of a Space with Torsion, Proc*. London Math. Soc. 34(1), 27-50.

Kon, M., & Yano, K. (1985). *Structures on manifolds* (Vol. 3). World scientific
Imai,T. (1972).Notes on semi symmetric metric connections. Tensor (N.S.), 293-296, 24.

O'Neill, B. (1966). *The Fundamental Equations of a Submersion*, Michigan Math. J. 13, 459-469.

O'Neill B. 1983. *Semi-Riemann Geometry With Applications to Relativit. Pure and Applied Mathematics*, 103. Acedemic Press, Inc. Newyork.

Prvanović,M., Pušić,N.(1995). *On manifolds admitting some semi-symmetric metric connection, Indian* J. Math. 37 37–67.

Sabuncuoğlu, A.(2006). *Diferensiyel Geometri* (3. Baskı) Ankara: Nobel Yayıncılık, 12,26.

Sharfuddin,A., and Husain,S.,I., (1976).*Semi-symmetric metric connections in almost contact manifolds*, *Tensor* N. S. 30 133-139.

Şahin, B. (2017). Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and Their Applications Elsevier, *Academic Press, Massachusetts, Cambridge*.

Şahin, B.: (2013).Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds, *Taiwanese J. Math*. 17(2) 629-659.

Yano, K. (1970). On semi-symmetric connection. *Revue Roumaine de Math. Pure et Appliques*, *15*, 1570-1586.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	: Hakan Demir
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	:
Medeni hali	:
e-posta	:

Eğitim Derecesi	**Okul/ Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Dokuz Eylül Üniversitesi	1994

İş Deneyimi /Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
1994-2016	Özel Sektör	Matematik Öğretmeni
2016-2017	Turhal Mesleki ve Teknik And. Lisesi	Matematik Öğretmeni
2017-	Hitit Üniversitesi Alaca Avni Çelik M.Y.O.	Öğretim Görevlisi

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Demir,H., Sarı,R.,(2020) Riemannian Submersions with Quarter-Symmetric non Metric Connection 4th Internatıonal Conference On Mathematıcs"An Istanbul Meeting for World Mathematicians"27-30 October 2020, Istanbul, Turkey.

2.Demir.H.,Sarı,R.,(2019) Rıemannıan Submersıons With New Type Connectıon 2.Uluslararası 19 Mayıs Yenilikçi Bilimsel Yaklaşımlar Kongresi 27-29 Aralık 2019, Samsun.