T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

OSMAN YILMAZ

TEMMUZ 2021

GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN PERİYODİK STURM-LİOUVİLLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Osman YILMAZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman

Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2021

OSMAN YILMAZ tarafından hazırlanan "GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Danışman: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Başkan: Prof. Dr. Oktay MUHTAROĞLU

Matematik Anabilim Dalı, Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Doç. Dr. Süleyman ÖĞREKÇİ

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Üye: Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. ....

Tez Savunma Tarihi: 12/07/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

....

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

OSMAN YILMAZ

12/07/2021

GEÇİŞ ŞARTLARI İÇEREN PERİYODİK STURM-LIOUVILLE PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(Yüksek Lisans Tezi)

OSMAN YILMAZ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında; periyodik sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özellikleri araştırılmıştır. Bu çalışma beş bölümden oluşmuştur. Birinci bölümde Sturm ve Liouville ile ilgili kısa bilgiler verilmiş ve araştırılan konunun kullanım alanlarına değinilmiştir. İkinci bölümde Sturm-Liouville teorisiyle ilgili literatürde yer alan çalışmalarla ilgili bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölümde tez çalışmasına temel oluşturacak Sturm-Liouville problemleriyle ilgili genel tanım ve teoremler verilmiştir. Dördüncü bölümde periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin özdeğerlerinin reel olması, farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların ortogonal olması, karşılaştırma teoremi, Sturm-Picone teoremi ve bazı diğer teoremler içinde geçerli olduğu gösterilmiştir. Beşinci bölümde bu çalışmayla elde edilen sonuçlar açıklanmıştır.

Anahtar Kelimeler : Sturm - Liouville problemi, özdeğer, özfonksiyon, geçiş şartları.

Sayfa Adedi : 72

Danışman : Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

SPECTRAL PROPERTIES OF A PERIODIC STURM-LIOUVILLE PROBLEM WITH TRANSITION CONDITIONS

(M. Sc. Thesis)

OSMAN YILMAZ

AMASYA UNIVERSITY
GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

JULY 2021

ABSTRACT

In this thesis, some spectral properties of a periodic boundary-value-transition problem were investigated. This study consists of five chapters. The first chapter provides brief information on the Sturm-Liouville problem and its applications in natural science. In the second chapter, information about the studies in the literature on Sturm-Liouville theory is given. In the third chapter, general definitions and theorems related to Sturm-Liouville problems are given, which will form the basis of the thesis work. In the fourth chapter, it has been shown that the eigenvalues of the periodic Sturm-Liouville boundary-value-transition problem are real, the eigenfunctions corresponding to different eigenvalues are orthogonal. A comparison theorem, Sturm-Picone theorem and some other theorems are also given. The last chapter is devoted to the results obtained in this work.

Key Words	: Periodic Sturm-Liouville problem, eigenvalue, eigenfunction, transition conditions.
Page Number	: 72
Supervisor	: Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışmama öncü olan ve çalışmalarımı tamamlayabilmem açısından beni her zaman cesaretlendiren ve özgüven sağlayan çok değerli hocam Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR'e en içten saygılamlarımla teşekkür ederim. Çalışmamda karşılaştığım sıkıntılarla yakından ilgilenen, çok önemli katkılarda bulunan, her türlü bilgisini ve tecrübesini benimle paylaşan Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR hocama teşekkür ederim. Çalışmalarım aşamasında hiçbir zaman desteğini esirgemeyen eşim Burcu YILMAZ'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklamalar**
$\boldsymbol{L_2[a,b]}$	$[a,b]$ üzerinde ölçülebilir, 2. dereceden Lebesgue anlamında integrallenebilen fonksiyonların Hilbert uzayı
$\boldsymbol{L}$	Lineer diferensiyel operatör anlamında integrallenebilen fonksiyonların kümesi
$\boldsymbol{L^*}$	L'nin eşleneği
$\boldsymbol{C[a,b]}$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonların Banach uzayı
$\boldsymbol{C^1([a,b])}$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde birinci mertebeden sürekli ve türevli fonksiyonlarının Banach uzayı
$\boldsymbol{C^2([a,b])}$	$[a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde birinci ve ikinci mertebeden sürekli ve türevli fonksiyonlarının uzayı
$\boldsymbol{\overline{y}}$	y fonksiyonunun eşleniği
$\boldsymbol{\langle y_1, y_2 \rangle}$	$L_2[a,b]$ uzayında y_1 ve y_2'nin iç çarpımı

1. GİRİŞ

Fizik ve Matematiğin bazı problemleri daire biçiminde olan ince levhalarda, silindir ve küre biçiminde olan ortamlarda meydana gelen süreçlerin matematiksel modeli olarak ifade edilmektedir. Isı ve madde iletimi problemleri, iki ucu sabit ve bazı iç noktalarına yük asılmış telin titreşim problemleri, bazı dalga ve difüzyon problemleri bunlara örnek olarak verilebilir. Bu kapsamda elde edilen spektral problemlerin birçoğu periyodik Sturm-Liouville problemleri olarak elde edilir. Bu nedenle periyodik Sturm-Liouville problemleri sadece teorik açıdan değil uygulama açısından da önem arz etmektedir.

Sturm ısı iletimi probleminin çözümünü araştırırken elde ettiği sonuçlarla aslında diferensiyel operatörlerin spektral teorisinin temelleri de atılmıştır. Bu çalışmalarını Poisson ısı teorisiyle ilişkilendirmiştir ve çalışmalarıyla diferensiyel denklemler teorisine de büyük katkılarda bulunmuştur. Daha sonraki yıllarda ise Liouville'in çalışmaları ile birlikte Sturm-Liouville teorisinin ilk sonuçları elde edilmiştir.

Sturm ve Liouville' in matematiğin birçok alanında eserleri vardır. Çok sayıda çeşitli alanlarda makaleleri yayımlanmıştır. Sınır değer problemleri, ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler ve sayılar kuramı üzerine çok sayıda çalışmaları vardır.

2. LİTERATÜR ÖZETİ

Literatürde Sturm-Liouville olarak adlandırdığımız problemler, ilk olarak 19. Yüzyılda Charles Sturm ve Joseph Liouville tarafından ikinci mertebeden adi diferensiyel denklemler için sınır değer problemleri olarak ortaya konmuştur. Başlangıçta ısı iletimi problemlerinde kullanılan Sturm-Liouville teorisi günümüzde daha geniş alanlarda fiziksel problemlerde uygulanmaktadır.

G. D. Birkhoff çalışmasında özdeğer parametresine bağlı adi diferensiyel denklemlerin, çözüm sistemleri için asimptotik denklemler elde etmiş, regüler sınır şartlarını oluşturarak bu regüler sınır değer probleminde özfonksiyonlar ve bu özfonksiyonlara bağlı fonksiyonlar sisteminin tamlığı ile ilgili teoremi kanıtlamıştır [1].

V. Malathi, M. Bin Suleiman ve B. B. Taib çalışmalarında, periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini, direkt integralleme yöntemi ve atış tekniği kullanarak hesaplamışlardır [2].

D. J. Condon çalışmasında, periyodik Sturm-Liouville problemlerinin sonlu fark özdeğerleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır [3].

Boumenir, Shannon-Whittaker örnekleme teorisinden yararlanarak ve Paley-Wiener uzaylarında interpolasyon teknikleri kullanılarak periyodik bir Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerini araştırmıştır [4].

Ya. M. Dymarskii, periyodik Sturm-Luville problemleri ailesinin özfonksiyonlarının manifoldları ile ilgili makalesinde özfonksiyon manifoldlarının düzgün yapısını, homotopik özelliklerini ve çift özdeğere karşılık gelen potansiyelleri araştırmıştır [5].

P. A. Binding ve B. P. Rynne, periyodik Sturm-Liouville problemlerinin yarı özdeğerleri, belirli nodal özelliklerine sahip olan ilgili yarı özfonksiyonları, bunlarla ilişkili belirli spektral ve teorik özellikleri ile ilgili çalışmalar yapmıştır [6].

Burghelea, C. Saldanha ve Tomei çalışmalarında, lineer olmayan periyodik Sturm-Liouville operatörünün dairesel geometrisi ile ilgili çalışmalar yapmışlardır [7].

S. Somali ve V. Oger çalışmalarında, t-periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerlerinin iyileştirilmesi ile ilgili çalışmasında ekstranit farkına dayanan Richardson ekstrapolasyonunu araştırmışlardır [8].

Binding ve Volkmer, periyodik Sturm-Luville problemine prüfer açısı yaklaşımı ile ilgili çalışmasında, periyodik veya antiperiodik Sturm-Liouville problemlerinin prüfer açısının analizine nasıl indirileceğini göstermişlerdir [9].

Şimdi Sturm-Liouville probleminin önemini açıklamak için bir fiziksel problem örneği verelim. $u(p,\theta)$ ile yüzeyleri yalıtımlı ince bir diskteki sabit sıcaklıları gösterelim. Kenarı $p = 1$ için $f(\theta)$ sıcaklığında tutulurken p ve θ kutupsal koordinatlar olmak üzere, $\nabla^2 u = 0$ Laplace denklemi sağlanır. Yani $u(1,\theta) = f(\theta)$ olmak üzere;

$$p^2 u_{pp}(p,\theta) + p u_p(p,\theta) + u_{\theta\theta}(p,\theta) = 0 \quad (0 < p < 1, \; -\pi < \theta < \pi) \tag{2.1}$$

eşitliği sağlanır.

Ayrıca u ve u 'nun birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevleri sürekli ve diskin iç bölgesinde sınırlıdır. Ayrıca u ve u 'nun birinci mertebeden türevleri $\theta = \pi$ yönünde süreklidir.

(2.1) kısmi diferensiyel denkleminde $u = R(p)\Phi(\theta)$ biçiminde değişkenlere ayırma yöntemi kullanıldıktan sonra λ ayırma sabiti olmak üzere,

$$p^2 R^{''}(p) + pR^{'}(p) - \lambda R(p) = 0 \quad (0 < p < 1) \tag{2.2}$$

$$\Phi^{''}(\theta) + \lambda\Phi(\theta) = 0 \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi) \quad \Phi^{'}(-\pi) = \Phi^{'}(\pi) \tag{2.3}$$

eşitlikleri elde edilir.

(2.3) eşitliği basit bir periyodik Sturm-Liouville problemidir ve bu problemin $\lambda_n = n^2$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ özdeğerlerine sahip olduğu kolayca gösterilebilir. Karşılığı olan özfonksiyonlar $1/2$ ve $\sin n\theta$ ile $\cos n\theta$ 'nin lineer kombinasyonlarıdır. (2.2) ile gösterilen denklem bir Cauchy-Euler denklemidir. Bilindiği üzere sınırlı çözümleri $\lambda = 0$ iken $R_0 = 1$ ve $\lambda = n^2$ $(n = 1, 2, 3...)$ iken $R_n = p^n$ olur. Bu bilgilerden yararlanarak yukarıda bahsedilen fizik probleminin çözümünü,

$$u(p, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} p^n (a_n \cos n\theta + b_n \sin n\theta)$$

biçiminde elde edebiliriz. Burada a_n ve b_n, $-\pi < x < \pi$ aralığındaki f' nin Fourier serisine açılımındaki Fourier katsayılarıdır ve bu katsayılar için,

$$a_n = \frac{1}{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos n\theta d\theta \ \ (n = 0, 1, 2, 3, ...), \ \ b_n = \frac{1}{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin n\theta d\theta \ \ (n = 1, 2, 3, ...)$$

eşitlikleri sağlanır [10].

A. Cabada ve J. Angel Cid yaptıkları çalışmada Green fonksiyonunun özellikleri hakkında kapsamlı bir çalışma yapmışlardır. $a(t)$ işaret değiştirme potansiyeli olmak üzere periyodik sınır değer problemini,

$$L_0 x \equiv x'' + a(t) \quad t \in [0, T], \quad x(0) = x(T) \quad x'(0) = x'(T)$$

olarak tanımlamışlardır. Ayrıca literatürdeki önceki sonuçları kullanarak bu problem için de geçerli olan, maksimum veya anti-maksimumlukla ilgili yeni açık kriterler elde etmişlerdir [11].

Al-Khaled ve A. Hazaimeh yapmış oldukları çalışmada araştırdıkları problemin matematik ve fizikte büyük önem taşıdığını öne sürmüşlerdir. Birçok fiziksel problem ile, özellikle titreşimlerle ilgili birçok fiziksel kavramın özdeğer ve özfonksiyon ile bağlantılı olduğuna vurgu yapmışlardır [12].

O. Sh. Mukhtarov geliştirdiği metod yardımıyla süreksiz katsayılı, geçiş şartlı, iç noktalı ve fonksiyonel şartlı olmak üzere çok sayıda çalışmalar yapmıştır. Bu çalışmalarda diferensiyel operatörün koersitivliği, Fredholm operatörü olma özellikleri ve kök fonksiyonlarının Abel bazı gibi özellikler üzerinde durulmuştur [13].

M. Kandemir çalışmasında,

$$p(x)u^{(4)} + q(x)u = \lambda^4 u, \quad x \in [-1,0) \cup (0,1]$$

diferensiyel denkleminden ve

$$\begin{aligned} L_k(u) = \sum_{s=0}^{3} \lambda^{4-s} [& \alpha_{ks} u^{(s)}(-1) \\ & + \beta_{ks} u^{(s)}(-0) + \delta_{ks} u^{(s)}(+0) + \gamma_{ks} u^{(s)}(1) \\ & + \int_{-1}^{0} u^{(s)}(x) \phi_{ks}(x) dx \\ & + \int_{0}^{1} u^{(s)}(x) \phi_{ks}(x) dx \\ & + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{N_{ks}^i} \zeta_{ks}^{ij} u^{(s)}(a_{ksj}^i)] = 0, \quad k = 1, 2, ..., 8, \end{aligned}$$

fonksiyonel geçiş şartlarından oluşan problem ele alınmıştır. Bu problemde sınır şartları sadece aralığın uç noktalarında değil, bir sonlu sayıda iç noktadaki süreksizlik noktası ve soyut lineer fonksiyonerlerle oluşturulmuştur. Ayrıca problemin özdeğerlerinin asimptotik dağılımı araştırılmış ve problemin özdeğerleri için asimptotik formüller elde edilmiştir [14].

M. Kandemir çalışmasında süreksiz katsayılara sahip ikinci mertebeden eliptik diferansiyel operatör denklemini ve geçiş şartlarıyla birlikte yerel olmayan sınır koşullarını içeren yerel olmayan sınır değer problemlemini araştırmıştır. Bu yerel olmayan sınır değer problemi için tanımlanan operatörün Fredholmness olduğu gösterilmiştir [15].

K. Aydemir ve O. Sh. Mukhtarov yapmış oldukları çalışmada $[-\pi, 0) \cup (0, \pi]$ aralığında tanımlanan Strum-Liouville denklemini,

$$\Gamma(y) = -y''(x, \lambda) + q(x)y(x, \lambda) = \lambda y(x, \lambda)$$

eşitliğiyle tanımlamışlardır. Geçiş şartlarını

$$\Gamma_1(y) = a_1 y'(0-, \lambda) + a_2 y(0-, \lambda) + a_3 y'(0+, \lambda) + a_4 y(0+, \lambda)$$

$$\Gamma_2(y) = b_1 y'(0-, \lambda) + b_2 y(0-, \lambda) + b_3 y'(0+, \lambda) + b_4 y(0+, \lambda)$$

eşitlikleriyle ve sınır şartlarını ise,

$$\Gamma_3(y) = \cos\alpha y(-\pi, \lambda) + \sin\alpha y'(-\pi, \lambda) = 0$$

$$\Gamma_4(y) = \cos\beta y(\pi, \lambda) + \sin\beta y'(\pi, \lambda) = 0$$

eşitlikleriyle ifade etmişlerdir. $H = L_2[-\pi, 0) \oplus L_2(0, \pi]$ eşitliğiyle verilen H Hilbert uzayı olmak üzere iç çarpımı,

$$\langle y, z \rangle_H = \rho_{12} \int_{-\pi}^{0} y(x)\overline{z(x)}dx + \rho_{34} \int_{0}^{\pi} y(x)\overline{z(x)}dx$$

eşitliğiyle göstermişler ve dikkate alınan problem için özdeğer problemi olarak yorumlanabilecek bir doğrusal operatör tanımlamışlardır. İntegral denklemler yöntemine dayanan Sturm-Liouville özfonksiyon açılımlarının klasik teorisine yeni bir yaklaşım kullanmışlardır. Ayrıca Carleman formülünü genellemişlerdir [16].

K. Aydemir ve O. Mukhtarov bazı çalışmalarında sonlu sayıda iç tekilliğe sahip Sturm-Liouville probleminin bazı spektral yönlerini araştırmışlardır. İlk olarak ele alınan problemin kendine eşlenik olması için, ayrık aralıkların her birinde tanımlanan fonksiyonların L_2 uzaylarının direkt toplamı üzerinde yeni bir iç çarpım tanımlamışlardır. Daha sonra bazı özel çözümlerle Green fonksiyonunu bunlara göre oluşturmuşlardır. Green fonksiyonuna dayanarak özfonksiyon açılımı hakkında sonuç elde etmişlerdir. Elde edilen sonuçlarla, dikkate alınan problem için Parseval ve Carleman denklemleri, Rayleigh bölümü ve Rayleigh-Ritz formülü (minimizasyon ilkesi) gibi önemli spektral özellikleri genişletmiş ve genelleştirmişlerdir [17].

M. Kandemir ve O. Sh. Mukhtarov birçok çalışmalarında, yeni tipten sınır şartları ile verilmiş Sturm-Liouville problemlerini araştırmışlardır. Homojen olmayan Sturm-Liouville denklemini,

$$p(x)u''(x) + (q(x) - \lambda)u = f(x)$$

eşitliğiyle ele almışlar ve sınır-geçiş şartını ise,

$$\alpha_k u^{m_k}(-1) + \beta_k u^{m_k}(-0) + \eta_k u^{m_k}(+0) + \gamma_k u^{m_k}(1)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n_k} \delta_{kj} u^{m_k}(x_{kj}) + \sum_{v=1}^{2} \sum_{j=0}^{m_k} \int_{\Omega_v} K_{kvj}(t) u^{(j)}(t) dt = f_k, \quad k = 1, 2, 3, 4$$

eşitliğiyle tanımlamışlardır. Burada $x_{kj} \in (-1, 0) \cup (0, 1)$ olarak ifade etmişlerdir. Kendi yaklaşımlarını kullanarak, spektral açıdan Fredholmness, coercive çözülebilirlik ve izomorfizm gibi özellikleri araştırmışlardır [18].

K. Aydemir ve O. Sh. Mukhtarov bir sıra çalışmalarında özparametreyi sadece denklemde değil, aynı zamanda sınır-geçiş şartlarında da kullanmışlardır. İki ayrık aralıkta yeni bir Sturm-Liouville problemini araştırmışlardır. Özdeğerlerin ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların bazı spektral özelliklerini araştırmışlardır. Özellikle özdeğerlerin asimptotik davranışını ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonların tamlığını araştırmışlardır [19].

O. Sh. Mukhtarov, H. Olgar ve K. Aydemir ortak bir çalışmada ek geçiş şartları ile verilmiş Sturm-Liouville probleminin zayıf özfonksiyonlarının, Hilbert uzayında bir Riesz bazı oluşturduğunu kanıtlamışlardır. İlk olarak, Sturm-Liouville probleminin genelleştirilmiş çözümünü, bazı integral eşitlikleri sağlayan fonksiyon olarak tanımlamışlardır. İkinci olarak, Riesz temsil teoremini kullanarak bu eşitlikleri operatör demeti denklemine indirgemişlerdir. Son olarak, orijinal sınır değer geçiş probleminin özfonksiyonlarının Hilbert uzayında bir Riesz bazı oluşturduğu göstermişlerdir [20].

3. GENEL BİLGİLER

Sturm-Liouville problemleri sınır değer problemleri içinde önemli bir yere sahiptir. İlk olarak,

$$a_1(x)\frac{d^2(y)}{dx^2} + a_2(x)\frac{dy}{dx} + (a_3(x) + \lambda)y = 0$$

biçiminde verilen ikinci mertebeden lineer adi diferensiyel denklemini inceleyelim. Verilen ifade $a_1(x)$ fonksiyonuna bölünürse ($a_1(x) \neq 0$),

$$\frac{d^2(y)}{dx^2} + \frac{a_2(x)dy}{a_1(x)dx} + \frac{a_3(x)y}{a_1(x)} + \frac{\lambda y}{a_1(x)} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem türevlenebilir $p(x) > 0$ fonksiyonu ile çarpılırsa,

$$p(x)\frac{d^2(y)}{dx^2} + p(x)\frac{a_2(x)dy}{a_1(x)dx} + p(x)\frac{a_3(x)y}{a_1(x)} + p(x)\frac{\lambda y}{a_1(x)} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu son ifadede p, q ve r fonksiyonlarını,

$$p'(x) = p(x)\frac{a_2(x)}{a_1(x)}, \;\; q(x) = p(x)\frac{a_3(x)}{a_1(x)} \quad \text{ve} \quad r(x) = \frac{p(x)}{a_1(x)}$$

eşitliklerini sağlayacak biçimde seçersek verilmiş diferensiyel denklem,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0$$

Sturm-Liouville denklemi biçiminde yazılabilir. Burada $q(x)$, $r(x)$ sürekli ve $p(x)$ türevlenebilir fonksiyonlardır. Bununla birlikte,

$$p'(x) = p(x)\frac{a_2(x)}{a_1(x)}$$

ifadesini,

$$\frac{p'(x)}{p(x)} = \frac{a_2(x)}{a_1(x)}$$

biçiminde yazarak integral alınırsa,

$$lnp(x) = \int \frac{a_2(x)}{a_1(x)}dx$$

$$p(x) = exp\int \frac{a_2(x)}{a_1(x)}dx$$

olduğu görülür. Burada $\frac{a_2(x)}{a_1(x)}$ ifadesinin integrali mevcut olmalıdır [21].

3.1. Tanım $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları bir $[a,b]$ aralığında sürekli, $[a,b]$ aralığını her bir noktasında $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0 \tag{3.1}$$

denklemine Sturm-Liouville denklemi denir. Bu denklemle birlikte $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ reel sabitler olmak üzere,

$$\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0,\ \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0 \tag{3.2}$$

sınır şartları verilsin. Eğer $[a,b]$ aralığı sonlu ve bu aralıkta $q(x)$ fonksiyonu integrallenebilirse (3.1)-(3.2) problemine regüler Sturm-Liouville problemi adı verilir. Burada $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$, $\beta_1^2 + \beta_2^2 \neq 0$ dır [21].

3.2. Tanım (3.1)-(3.2) eşitlikleriyle verilmiş problemde,

$i)$ Herhangi bir $x\epsilon[a,b]$ için $p(x) = 0$ veya $r(x) = 0$

$ii)$ $p(x), q(x), r(x)$ katsayı fonksiyonlarından en az biri a ve b noktalarından en az birinde ∞

$iii)$ (a,b) aralığı sınırsız, yani $(-\infty, b)$, (a, ∞) veya $(-\infty, \infty)$

durumlarından en az biri sağlanıyorsa probleme singüler Sturm-Liouville problemi denir [21].

3.3. Tanım $p(a) = p(b)$ ve $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $r(x)$ fonksiyonları bir $[a,b]$ reel aralığında sürekli, $[a,b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0$, $r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0 \tag{3.3}$$

denkleminden,

$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

sınır şartlarından oluşan probleme periyodik Sturm-Liouville problemi denir [21].

3.4. Tanım $p(a) = p(b)$ ve $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ r(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ reel aralığında sürekli, $[a, b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0,\ r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız bir parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0$$

denkleminden,

$$y(a) = -y(b)$$
$$y'(a) = -y'(b)$$

sınır şartlarından oluşan probleme anti-periyodik Sturm-Liouville problemi denir [21].

3.5. Tanım (3.1)-(3.2) eşitlikleriyle verilmiş problemde $\lambda = \lambda_0$ değeri için aşikar olmayan $y_0 \neq 0$ çözümü bulunursa, λ_0 sayısına verilen bu problemin özdeğeri, $y = y_0(x)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere uygun özfonksiyon denir [21].

Şimdi

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{3.4}$$

denklemiyle verilen ikinci mertebeden sabit katsayılı, lineer ve homojen denklemlerin genel çözümlerinin elde edilmesini inceleyelim. Bu şekilde verilen denklemi sağlayacak fonksiyonun kendisi ve türevleri, katsayıları haricinde aynı özelliklere sahip olması gerekir. Bu tarz fonksiyonlar, r reel ya da kompleks bir sabit olmak üzere, e^{rx} şeklindeki fonksiyonlardır. Buna göre (3.4) eşitliğiyle verilen denklemin çözümü olan fonksiyonlar $y = e^{rx}$ şeklindeki fonksiyonlardır. Bu ifadenin kendisi ve türevleri (3.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$$

bulunur. Burada $e^{rx} \neq 0$ olduğundan

$$ar^2 + br + c = 0$$

olur. Bu denkleme (3.4) denkleminin karakteristik denklemi denir. $\Delta = b^2 - 4ac$ olmak üzere çözümler incelenirse, c_1, c_2 keyfi sabitler olmak üzere, *i)* $\Delta > 0$ için karakteristik denkleminin reel kökleri $r_1,\ r_2$ olmak üzere genel çözüm, $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ biçimindedir.

ii) $\Delta = 0$ için karakteristik denkleminin reel kökleri $r_1 = r_2 = r$ olmak üzere genel çözüm $y = (c_1 + c_2x)e^{rx}$ biçimindedir.

iii) $\Delta < 0$ için karakteristik denkleminin reel kökleri $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ olmak üzere genel çözüm, $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos \beta x + c_2 \sin \beta x)$ biçimindedir [21].

Örnek Aşağıda verilen regüler Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim.

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad 0 \leq x \leq \pi$$

$$y(0) = 0$$

$$y'(\pi) = 0$$

Çözüm Karakteristik denklem,

$r^2 + \lambda = 0$ biçiminde olup $r^2 = -\lambda$ dır. Buradan,

i) $\lambda < 0$ için

$r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$ olup genel çözüm,

$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$ biçimindedir. Bu durumda,

$$y(x) = c_1e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$y(0) = 0$ ve $y'(\pi) = 0$ sınır şartları denklemde yerine yazılırsa, $c_1 = c_2 = 0$ yani $y(x) = 0$ aşikar çözüm elde edilir.

ii) $\lambda = 0$ için;

$r^2 = 0$ eşitliğinden $r_{1,2} = 0$ olur. Böylece denklemin genel çözümü,

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{rx} \quad \text{biçiminde yani,}$$

$$y(x) = (c_1 + c_2 x) \text{ olur.}$$

Buradan türev alınırsa, $y'(x) = c_2$ olduğu görülür. $y'(\pi) = 0$ olduğundan $c_2 = 0$ olur. $y(0) = 0$ sınır şartı dikkate alınırsa, $c_1 = 0$ olduğu görülür. Böylece sadece $y(x) = 0$ aşikar çözümü bulunur.

iii) $\lambda > 0$ için

$r^2 = -\lambda$ olup $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}i$ bulunur. Bu taktirde $r_{1,2} = \alpha \pm i\beta$ olmak üzere genel çözüm $y = e^{\alpha x}(c_1 \cos\beta x + c_2 \sin\beta x)$ biçiminde olup
$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ bulunur. Buradan
$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$ ve $y(0) = 0$ sınır şartından $c_1 = 0$ olur.
$y'(\pi) = 0$ sınır şartı yerine yazılırsa, $c_2 = 0$ olduğunda aşikar çözüm elde edilir. $c_2 \neq 0$ olduğunda ise $c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$ elde edilir. Buradan,

$\cos\sqrt{\lambda}\pi = 0$ yani $\sqrt{\lambda} = (\frac{2n-1}{2})$ olup özdeğerler $\lambda_n = (\frac{2n-1}{2})^2 \quad n = 1, 2, 3, ...$ biçiminde olur.

Böylece $y(x) = c_2 \sin(\frac{2n-1}{2})x$ çözümü elde edilir.

Örnek Aşağıda verilen periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarını inceleyelim.

$$y'' + \lambda y = 0, \quad -\pi \leq x \leq \pi$$

$$y(-\pi) = y(\pi)$$

$$y'(-\pi) = y'(\pi)$$

Çözüm (3.3) Sturm-Liouville denklemi göz önüne alınırsa, verilen problemde $p(x) = 1$ olduğu görülür. Bu durumda $p(-\pi) = p(\pi)$ eşitliği açıktır. Karakteristik denklem ise,

$r^2 + \lambda = 0$ biçiminde olup $r^2 = -\lambda$ yazılabilir.

i) $\lambda < 0$ için

$r^2 = -\lambda$ yani $\quad r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$

Böylece genel çözüm $y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$ şeklindedir. Buradan,

$$y(x) = c_1 e^{\sqrt{-\lambda}x} + c_2 e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$$y'(x) = c_1\sqrt{-\lambda}e^{\sqrt{-\lambda}x} - c_2\sqrt{-\lambda}e^{-\sqrt{-\lambda}x}$$

$y(-\pi) = y(\pi)$ ve $y'(-\pi) = y'(\pi)$ sınır şartları denklemde yerine yazılırsa, $c_1 = c_2 = 0$ yani $y(x) = 0$ aşikar çözüm elde edilir.

ii) $\lambda = 0$ için

$r^2 = 0$ olup $r_{1,2} = 0$ yazılabilir. Denklemin genel çözümü, $y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{rx}$

$y(x) = (c_1 + c_2 x)$ biçiminde olur. Buradan türev alınırsa,

$y'(x) = c_2$ olduğu görülür.

$y(-\pi) = y(\pi)$ ve $y'(-\pi) = y'(\pi)$ sınır şartları dikkate alınırsa, $c_2 = 0$ elde edilir. Buradan,

$y(x) = c_1$ çözümü elde edilir.

iii) $\lambda > 0$ için

$r^2 = -\lambda$ yani $\quad r_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda} = \pm\sqrt{\lambda}i$ olur. Böylece genel çözüm,

$y(x) = c_1 \cos\sqrt{\lambda}x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}x$ biçimidedir. Buradan,

$y'(x) = -c_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x + c_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}x$ yazılabilir.

$y(-\pi) = y(\pi)$ ve $y'(-\pi) = y'(\pi)$ sınır şartları dikkate alınırsa sırasıyla

$2c_2 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ ve $2c_1 \sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ eşitlikleri bulunur. c_1 ve c_2 sıfırdan farklı keyfi sabitler olmak üzere, $\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ olur. Buradan,

$\sin\sqrt{\lambda}\pi = 0$ yani $\sqrt{\lambda} = n$ olup özdeğerler $\lambda_n = n^2 \quad n = 1, 2, 3, ...$ biçimindedir.

Böylece,

$$y(x) = c_1 \cos nx + c_2 \sin nx \text{ çözümü elde edilir.}$$

3.6. Tanım X, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.
$||.|| : X \to \mathbb{R},\ \ x \to ||x||$ dönüşümü her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için
i)$||x|| \geq 0$
ii)$||x|| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
iii)$||\alpha x|| = |\alpha| ||x||$
iv)$||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$
özelliklerini sağlıyor ise X üzerinde bir norm olur ve bu durumda $(X, ||.||)$ ikilisine bir normlu vektör uzayı denir [22].

3.7. Tanım (İç Çarpım) X bir reel vektör uzayı olsun. X üzerinde bir iç çarpım aşağıdaki özellikleri sağlayan bir

$$\langle , \rangle : X \times X \to \mathbb{R}$$

fonksiyonudur. Her $x, y, z \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için,

i)$\langle x, x \rangle \geq 0$
ii)$\langle x, x \rangle = 0$ ancak ve ancak $x = 0$
iii)$\langle \alpha x + \beta y, z \rangle = \alpha \langle x, z \rangle + \beta \langle y, z \rangle$
iv)$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$ [9].

3.8. Tanım X bir kompleks veya reel bir vektör uzayı ve $\langle , \rangle$ X üzerinde bir iç çarpım ise $(X, \langle , \rangle)$ ikilisine bir iç çarpım uzayı adı verilir [23].

3.9. Tanım (Hilbert Uzayı) Bir iç çarpım uzayındaki iç çarpımın indirgediği norm,

$$||y|| = \sqrt{\langle y, y \rangle}$$

eşitliğiyle ve bu normun indirgediği metrik,

$$d(y_1, y_2) = ||y_1 - y_2||$$

eşitliğiyle tanımlanır. Bir iç çarpım uzayı, iç çarpımın indirgediği normdan indirgenen metriğe göre tam ise, bu uzaya bir Hilbert uzayı adı verilir [23].

3.10. Tanım ($L_2[a,b]$ Uzayı) Verilen $[a,b]$ aralığında tanımlı ve Lebesgue anlamında ölçülebilir olan $y(x)$ fonksiyonunu ele alalım. $|y(x)|^2$ fonksiyonu bu aralıkta Lebesgue anlamında integrallenebilir ise $y(x)$ fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında karesi integrallenebilir fonksiyon denir. (Naimark, 1967) Karesi integrallenebilir fonksiyonların lineer uzayında,

$$\langle y_1, y_2\rangle := \int_a^b y_1(x)\overline{y_2(x)}dx$$

ile gösterilen bu formül bir iç çarpım tanımlar. Bu şekilde tanımlanmış olan iç çarpım uzayının Hilbert uzayı olduğu bilinmektedir. Bu uzay $L_2[a,b]$ ile gösterilir [24].

3.11. Tanım (Kendine Eşlenik Diferensiyel Operatör)

$$L = p(x)\frac{d^2}{dx^2} + q(x)\frac{d}{dx} + r(x), \qquad a \le x \le b$$

ile verilen L operatörü için $y_1, y_2 \in L^2[a,b] \cap C^2[a,b]$ olmak üzere,

$$\langle L(y_1), y_2\rangle = \langle y_1, L^*(y_2)\rangle$$

eşitliğini sağlayan L^* operatörüne L operatörünün eşleniği denir. Burada $p \in C^2[a,b]$, $q \in C^1[a,b]$ ve $r \in C[a,b]$ fonksiyonlarının eşlenikleri sırasıyla $\overline{p}$, $\overline{q}$ ve $\overline{r}$ aynı zamanda y_1, y_2 fonksiyonlarının eşlenikleri $\overline{y_1}$, $\overline{y_2}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\langle L(y_1), y_2\rangle &= \int_a^b (py_1'' + qy_1' + ry_1)\overline{y_2}dx \\
&= py_1'\overline{y_2}|_a^b - \int_a^b y_1'(p\overline{y_2})'dx + qy_1\overline{y_2}|_a^b - \int_a^b y_1(q\overline{y_2})'dx + \int_a^b y_1 r\overline{y_2}dx \\
&= [py_1'\overline{y_2} - y_1(p\overline{y_2})']|_a^b + \int_a^b y_1(p\overline{y_2})''dx + qy_1\overline{y_2}|_a^b - \int_a^b y_1(q\overline{y_2})'dx + \int_a^b y_1 r\overline{y_2}dx \\
&= \langle y_1, (\overline{p}y_2)'' - (\overline{q}y_2)' + \overline{r}y_2\rangle + [p(y_1'\overline{y_2} - y_1\overline{y_2}') + (q-p')y_1\overline{y_2}]|_a^b
\end{aligned}$$

yazılabilir.Bu son eşitlikte,

$$L^*(y_2) := (\overline{p}y_2)'' - (\overline{q}y_2)' + \overline{r}y_2 = \overline{p}y_2'' + (2\overline{p}' - \overline{q})y_2' + (\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r})y_2$$

ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\langle L(y_1), y_2\rangle = \langle y_1, L^*(y_2)\rangle + [p(y_1'\overline{y_2} - y_1\overline{y_2}') + (q-p')y_1\overline{y_2}]|_a^b$$

elde edilir. Bu durumda L operatörünün eşleniği,

$$L^* = \overline{p}(x)\frac{d^2}{dx^2} + (2\overline{p}'(x) - \overline{q}(x))\frac{d}{dx} + (\overline{p}'' - \overline{q}' + \overline{r})$$

eşitliğiyle ifade edilir. Burada ifade edilen L^*, L operatörleri için, $L^* = L$ eşitliği sağlanırsa L operatörüne kendine eşleniktir denir [21].

Örnek $y'' \sin x + x^2 y' + xy = 0$ denkleminin eşleniği

$$(y \sin x)'' - (x^2 y)' + xy = 0 \quad \text{yani}$$

$$y'' \sin x + (2\cos x - x^2)y' + (x + \sin x)y = 0$$

denklemidir.

3.12. Tanım

$$L = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x), \quad a \leq x \leq b$$

diferensiyel operatörü verilsin. $y_1,\ y_2 \in C^2[a,b]$ olmak üzere,

$$[y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)] = \frac{d}{dx}[p(y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx})] \tag{3.5}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik Lagrange Formülü olarak adlandırılır [21].

İspat

$$L(y_1) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_1(x)}{dx}) + q(x)y_1(x) \quad \text{ve} \quad L(y_2) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_2(x)}{dx} + q(x)y_2(x)$$

eşitlikleri sırasıyla y_1 ve y_2 ile çarpılırsa,

$$y_1 L(y_2) = py_2''y_1 + p'y_2'y_1 + qy_2y_1 \quad \text{ve} \quad y_2 L(y_1) = py_1''y_2 + p'y_1'y_2 + qy_1y_2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu son iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) \;=\; p(y_2'y_1 - y_1'y_2)' + p'(y_2'y_1 - y_1'y_2)$$

yani,

$$\begin{aligned} y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) &= [p(y_2'y_1 - y_1'y_2)]' \\ &= \frac{d}{dx}[p(y_1\frac{dy_2}{dx} - y_2\frac{dy_1}{dx})] \end{aligned}$$

ile gösterilen Lagrange formülü elde edilir.

3.13. Tanım (3.5) eşitliğinin her iki yanı a'dan b'ye integrallenirse,

$$\int_a^b [y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)]dx = p(y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx})|_a^b$$

elde edilir. Bu son eşitliğe Green formülü denir [21].

3.14. Tanım $y_1,\ y_2$ aynı homojen sınır şartlarını sağlayan iki fonksiyon olsun.

$$L = \frac{d}{dx}[p(x)\frac{d}{dx}] + q(x), \quad a \leq x \leq b$$

operatörü,

$$\langle y_1, L(y_2)\rangle = \langle L(y_1), y_2\rangle \quad \text{veya} \quad \int_a^b [y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)]dx = 0$$

eşitliklerinden herhangi birini sağlıyorsa, L lineer operatörüne kendine eşleniktir denir [21].

3.1. Teorem $p(a) = p(b)$ ve $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ r(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ reel aralığında sürekli, $[a, b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0,\ r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız parametre olmak üzere,

$$L(y) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0$$

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

eşitlikleriyle verilen periyodik Sturm-Liouville problemi kendisine eşleniktir [21].

İspat $y_1, y_2 \in C^2[a, b]$ olmak üzere verilen problemin kendine eşlenik olması için gerek ve yeter şart,

$$\langle y_1, L(y_2)\rangle = \langle L(y_1), y_2\rangle \quad \text{veya} \quad \int_a^b [y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)]dx = 0$$

olmasıdır.$L(y_1)$ ve $L(y_2)$ denklemleri sırasıyla,

$$L(y_1) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_1}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y_1(x)$$
$$L(y_2) = \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_2}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y_2(x)$$

biçimindedir. Burada $L(y_2)$ denklemi y_1 ile $L(y_1)$ denklemi y_2 ile çarpılırsa,

$$y_1 L(y_2) = py_2'' y_1 + p' y_2' y_1 + qy_2 y_1 + \lambda r y_2 y_1$$

$$y_2 L(y_1) = py_1'' y_2 + p' y_1' y_2 + qy_1 y_2 + \lambda r y_1 y_2$$

elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) = p(y_2'' y_1 - y_1'' y_2) + p'(y_2' y_1 - y_1' y_2)$$

yani,

$$y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1) = [p(y_2' y_1 - y_1' y_2)]'$$

elde edilir. Son denklem a'dan b'ye integrallenirse,

$$\begin{aligned} \int_a^b [y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)]dx &= p(y_2' y_1 - y_1' y_2)|_a^b \\ &= p(b)[y_2'(b)y_1(b) - y_1'(b)y_2(b)] - p(a)[y_2'(a)y_1(a) - y_1'(a)y_2(a)] \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitlikte $y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b)$ periyodik sınır şartları ve $p(a) = p(b)$ eşitliği dikkate alınırsa,

$$\int_a^b [y_1 L(y_2) - y_2 L(y_1)]dx = 0$$

olur. Bu ise verilen periyodik Sturm-Liouville denkleminin kendine eşlenik olduğunu gösterir.

3.2. Teorem $p(a) = p(b)$ ve $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ r(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ reel aralığında sürekli, $[a, b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0,\ r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0$$
$$y(a) = y(b)$$
$$y'(a) = y'(b)$$

eşitlikleriyle verilen periyodik Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri reeldir [21].

İspat Verilen periyodik Sturm-Liouville probleminin λ özdeğerine karşılık uygun özfonksiyonu y olsun. $\overline{y}$, y' nin ve $\overline{\lambda}$, λ' nın eşleniği olmak üzere,

$$L(y) := \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0 \tag{3.6}$$

$$L^*(\overline{y}) := \frac{d}{dx}(p(x)\frac{d\overline{y}}{dx}) + (q(x) + \overline{y}r(x))\overline{y}(x) = 0 \tag{3.7}$$

$\overline{y}(a) = \overline{y}(b)$, $\quad \overline{y}'(a) = \overline{y}'(b)$ eşitliklerini göz önüne alalım. Burada (3.6) eşitliği $\overline{y}$ ve (3.7) eşitliği y ile çarpılırsa,

$$py''\overline{y} + p'y'\overline{y} + qy\overline{y} = -\lambda ry\overline{y}$$

$$p\overline{y}''y + p'\overline{y}'y + q\overline{y}y = -\overline{\lambda}r\overline{y}y$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlik a'dan b'ye integrallenirse,

$$p(y'\overline{y} - \overline{y}'y)|_a^b = \int_a^b (\overline{\lambda} - \lambda)ry\overline{y}dx$$

elde edilir. Buradan,

$$p(b)[y'(b)\overline{y}(b)] - \overline{y}'(b)y(b)] - p(a)[y'(a)\overline{y}(a) - \overline{y}'(a)y(a)] = \int_a^b (\overline{\lambda} - \lambda)ry\overline{y}dx$$

bulunur. Son eşitlikte $\overline{y}$ ve y fonksiyonları için sınır şartları ve $p(a) = p(b)$ dikkate alınırsa,

$$(\overline{\lambda} - \lambda)\int_a^b r|y|^2 dx = 0$$

olduğu görülür. Böylece son eşitlikte $r \neq 0$ ve $y \neq 0$ olduğu dikkate alınırsa,

$$\overline{\lambda} = \lambda \quad \text{elde edilir.}$$

3.3. Teorem $p(a) = p(b)$ ve $p(x),\ p'(x),\ q(x),\ r(x)$ fonksiyonları bir $[a, b]$ reel aralığında sürekli, $[a, b]$ aralığının her bir noktasında $p(x) > 0,\ r(x) > 0$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ ise x den bağımsız parametre olmak üzere,

$$\frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy}{dx}) + (q(x) + \lambda r(x))y(x) = 0, \qquad a \leq x \leq b$$

$$y(a) = y(b)$$

$$y'(a) = y'(b)$$

eşitlikleriyle verilen periyodik Sturm-Liouville probleminin farklı λ_n ve λ_m özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ özfonksiyonları $L_2[a, b]$ uzayında ortogonaldir. Yani,

$$\int_a^b y_n(x)y_m(x)r(x) = 0$$

eşitliği sağlanır [21].

İspat λ_n ve λ_m özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ olduğu için,

$$L(y_n) := \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_n}{dx}) + (q(x) + \lambda_n r(x))y_n(x) = 0 \tag{3.8}$$

$$L(y_m) := \frac{d}{dx}(p(x)\frac{dy_m}{dx}) + (q(x) + \lambda_m r(x))y_m(x) = 0 \tag{3.9}$$

yazılabilir. Burada (3.8) eşitliği y_m ile ve (3.9) eşitliği y_n ile çarpılırsa,

$$py_n''y_m + p'y_n'y_m + qy_ny_m = -\lambda_n r y_n y_m$$

$$py_m''y_n + p'y_m'y_n + qy_my_n = -\lambda_m r y_m y_n$$

eşitlikleri elde edilir. Son eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n) r y_n y_m &= p(y_n''y_m - y_m''y_n) + p'(y_n'y_m - y_m'y_n) \\ &= p(y_n'y_m - y_m'y_n)' + p'(y_n'y_m - y_m'y_n) \\ &= [p(y_n'y_m - y_m'y_n)]' \qquad (3.10)\end{aligned}$$

elde edilir. (3.10) eşitliğinde a'dan b'ye integral alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_a^b (\lambda_m - \lambda_n) r y_n y_m dx &= p(y_n' y_m - y_m' y_n)|_a^b \\ &= p(b)[y_n'(b) y_m(b) - y_m'(b) y_n(b)] - p(a)[y_n'(a) y_m(a) - y_m'(a) y_n(a)]\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Burada y_n ve y_m özfonksiyonları için sınır şartları ve $p(a) = p(b)$ olduğu dikkate alınırsa,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_a^b r y_n y_m dx = 0$$

olduğu görülür. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan,

$$\int_a^b r y_n y_m dx = 0$$

bulunur.

3.4. Teorem (Karşılaştırma Teoremi) $L_1(y) = y'' + g(x)y = 0$ ve $L_2(y) = y'' + h(x)y = 0$ denklemleri verilsin. Bu denklemler $x \in [a, b]$ için $g(x) < h(x)$ şartını sağlasın.
$L_1(y_1) = 0$ ve $L_2(y_2) = 0$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı çözümler için, $y_1(x)$'in ardışık iki sıfırı arasında $y_2(x)$'in en az bir sıfırı vardır [25].

İspat $\qquad y_1'' + g(x)y_1 = 0 \quad$ ile $\quad y_2'' + h(x)y_2 = 0$

eşitlikleri sırasıyla y_2 ve y_1 fonksiyonları ile çarpılırsa,

$$y_1'' y_2 + g(x) y_1 y_2 = 0 \qquad \text{ve} \qquad y_2'' y_1 + h(x) y_2 y_1 = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$\begin{aligned} y_1'' y_2 - y_2'' y_1 &= [h(x) - g(x)] y_1 y_2 \\ (y_1' y_2 - y_2' y_1)' &= [h(x) - g(x)] y_1 y_2 \qquad (3.11)\end{aligned}$$

bulunur. $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırını x_1 ve x_2 ile gösterelim. (3.11) eşitliğinin x_1'den x_2'ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx &= \int_{x_1}^{x_2} (y_1' y_2 - y_2' y_1)' dx \\ &= (y_1' y_2 - y_2' y_1)|_{x_1}^{x_2} \\ &= y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) + y_2'(x_2) y_1(x_2) - y_2'(x_1) y_1(x_1)\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu son eşitlikte $y_1(x_1) = 0 = y_1(x_2)$ yazılırsa,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx \tag{3.12}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmasın. Bu durumda $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının negatif veya pozitif olma durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) $y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse $g(x) < h(x), y_1(x) > 0, y_2(x) > 0$, olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini inceleyebilmemiz için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerini bulmamız gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \quad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0$ ve x_1, x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, $y_1(x)$ fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 noktasında ise azalan fonksiyondur. Şimdi bu şartlar altında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (3.12) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

b) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0$, $y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini inceleyebilmemiz için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerini bulmamız gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x} \quad \text{ve} \quad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x)-y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini göz önüne alalım. Burada $y_1(x) < 0$ ve $x_1,\ x_2$ $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) < 0, y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (3.12) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

c) $y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x),\ y_1(x) > 0,\ y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini inceleyebilmemiz için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerini bulmamız gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 noktasında ise azalan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) > 0$, $y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (3.12) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

d) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0$, $y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini inceleyebilmemiz için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerini bulmamız gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x} \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x)-y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1 > (x_1) y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2+\Delta x)-y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,
$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) < 0, \quad y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (3.12) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

Son olarak $y_1(x_1) = 0$ iken tüm bu koşullar altında $y_1'(x_1) = 0$ olursa, varlık ve teklik teoremine göre $y_1(x) \equiv 0$ olur. Ancak $y_1(x_1) \neq 0$ idi. O halde $y_1'(x_1) \neq 0$ olmalıdır.

3.5. Teorem $p, q \in C[a, b]$ olmak üzere $z'' + q(x)z = 0$ denklemi ve $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı çözümü $z(x)$ olsun. Eğer,

$$\int_a^b (p - q)z^2 dx \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, bu takdirde $y'' + p(x)y = 0$ denklemi ve $y(a) = 0$ şartından oluşan problemin sıfırdan farklı bir çözümünün $(a, b]$ aralığında en az bir sıfırı mevcuttur [25].

İspat $\forall x \in (a, b]$ için $y(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. İlk denklem z ile ikinci denklem $\frac{z^2}{y}$ ile çarpılırsa,

$$z(z'' + qz) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{z^2}{y}(y'' + py) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade birbirine eşitlenip aşağıdaki işlemler yapılırsa,

$$\frac{z^2}{y}(y'' + py) = z(z'' + qz)$$

yani,

$$yz'' + yqz = zy'' + zpy$$

elde edilir. Buradan,

$$(z'y - y'z)' = (p - q)yz$$

yazılabilir. Son eşitlik $\frac{z}{y}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{z}{y}(z'y - y'z)' = z^2(p-q)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik a' dan b' ye inegrallenirse,

$$\int_a^b \frac{z}{y}(z'y - y'z)'dx = \int_a^b z^2(p-q)dx$$

eşitliği elde edilir.Bu eşitliğin solundaki ilk integrale kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y - y'z)\mid_{a+\varepsilon}^{b} - \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{a+\varepsilon}^{b}(z'y - y'z)(\frac{z}{y})'dx = \int_a^b z^2(p-q)dx$$

bulunur. İlk olarak bu eşitliğin sol tarafı incelenirse,

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y - y'z)\mid_{a+\varepsilon}^{b} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(b)}{y(b)}[z'(b)y(b) - y'(b)z(b)] \\ &\quad - \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}[z'(a+\varepsilon)y(a+\varepsilon) - y'(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon)] \\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir.

$\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y - y'z)\mid_{a+\varepsilon}^{b} = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$-\int_a^b (z'y - y'z)(\frac{z}{y})'dx = \int_a^b z^2(p-q)dx$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapılırsa,

$$-\int_a^b (z'y - y'z)(\frac{z'y - y'z}{y^2})dx = \int_a^b z^2(p-q)dx$$

yazılabilir. Buradan,

$$-\int_a^b \frac{(z'y - y'z)^2}{y^2}dx = \int_a^b z^2(p-q)dx$$

olur.

Teoremin ifadesi göz önüne alınırsa,

$$\int_a^b z^2(p-q)dx \geq 0$$

olduğundan,

$$\int_a^b \frac{(z'y - y'z)^2}{y^2}dx \leq 0 \tag{3.13}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur. Bu ise $y(b) \neq 0$ olması ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise,

$$\int_a^b \frac{(z'y - y'z)^2}{y^2} dx > 0$$

olup bu ise (3.13) ifadesi ile çelişir. O halde $(a, b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

3.6. Teorem $k_i \in C^1[a, b]$ ve $k_i > 0$, $g_i \in C[a, b]$, $(i = 1, 2)$, olmak üzere

$$(k_1 z^{'})^{'} + g_1 z = 0$$

denklemi ve $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı çözümü $z(x)$,

$$(k_2 y^{'})^{'} + g_2 y = 0$$

denklemi ve $y(a) = 0$ şartından oluşan problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x)$ olsun. Eğer,

$$\int_a^b [(k_1 - k_2)(z^{'})^2 + (g_2 - g_1)z^2] dx \geq 0 \tag{3.14}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu taktirde $(a, b]$ aralığında $y(x)$ in en az bir sıfırı vardır [25].

İspat $\forall x \in (a, b]$ için $y(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. İlk denklem z ile ikinci denklem $\frac{z^2}{y}$ ile çarpılırsa,

$$z((k_1 z^{'})^{'} + g_1 z) = 0 \quad \text{ve} \quad z^2/y((k_2 y^{'})^{'} + g_2 y) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(k_1 z^{'})^{'} z - \frac{z^2}{y}(k_2 y^{'})^{'} + (g_1 - g_2) z^2 = 0 \tag{3.15}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca,

$$(k_1 z^{'})^{'} z - \frac{z^2}{y}(k_2 y^{'})^{'} = \frac{z}{y}[(k_1 z^{'})^{'} y - (k_2 y^{'})^{'} z]$$

ifadesi göz önüne alınırsa, (3.15) eşitliği

$$\frac{z}{y}[(k_1z')'y-(k_2y')'z]+(g_1-g_2)z^2=0 \tag{3.16}$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi

$$\frac{z}{y}[(k_1z')'y-(k_2y')'z] \tag{3.17}$$

ifadesi ile

$$\frac{z}{y}(k_1yz'-k_2y'z)' \tag{3.18}$$

ifadesini karşılaştıralım. (3.17) deki ifade,

$$M:=[(k_1z')'y-(k_2y')'z]=k_1'z'y+k_1z''y-k_2'y'z-k_2y''z$$

biçiminde ve (3.18) ifadesi ise,

$$\begin{aligned} N: &= (k_1yz'-k_2y'z)' \\ &= k_1'(yz')+k_1(yz')'-k_2'(y'z)-k_2(y'z)' \\ &= k_1'yz'+k_1y'z'+k_1yz''-k_2'y'z-k_2y'z'-k_2y''z \end{aligned}$$

biçiminde yazılırsa,

$$N:=M+(k_1-k_2)y'z'$$

eşitliği elde edilir. Son eşitlik (3.16) eşitliğinde yerine yazılısa,

$$\frac{z}{y}M+(g_1-g_2)z^2=0$$

buradan,

$$\frac{z}{y}(N+(k_2-k_1)y'z')+(g_1-g_2)z^2=0$$

yani,

$$\frac{z}{y}(k_1yz'-k_2y'z)'+\frac{z}{y}(k_2-k_1)y'z'+(g_1-g_2)z^2=0$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik a'dan b'ye integrallenirse,

$$\int_a^b\frac{z}{y}(k_1yz'-k_2y'z)'dx+\int_a^b\frac{z}{y}(k_2-k_1)y'z'dx+\int_a^b(g_1-g_2)z^2dx=0 \tag{3.19}$$

bulunur. Bu eşitlikteki ilk ifade,

$$\int_a^b \frac{z}{y}(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)^{'}dx = \frac{z}{y}(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)|_a^b - \int_a^b (k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx$$

biçiminde yazılırsa, bu eşitlik (3.19) da yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{y}(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)|_a^b &= \int_a^b (k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx - \int_a^b \frac{z}{y}(k_2 - k_1)y^{'}z^{'}dx - \int_a^b (g_1 - g_2)z^2dx \\
&= \int_a^b [(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'} - \frac{z}{y}(k_2 - k_1)y^{'}z^{'}]dx - \int_a^b (g_1 - g_2)z^2dx \\
&= \int_a^b [(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y^2}) - (k_2 - k_1)y^{'}z^{'}\frac{z}{y}]dx - \int_a^b (g_1 - g_2)z^2dx \\
&= \int_a^b \frac{1}{y^2}[(k_1(yz^{'})^2 - k_2yy^{'}zz^{'} - k_1yy^{'}zz^{'} + k_2(y^{'}z)^2 \\
&\quad -k_1yy^{'}zz^{'} + k_2yy^{'}zz^{'}]dx - \int_a^b (g_1 - g_2)z^2dx \\
&= \int_a^b [(k_1 - k_2)(z^{'})^2 + k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2]dx + \int_a^b (g_2 - g_1)z^2dx \\
&= \int_a^b [(k_1 - k_2)(z^{'})^2 + (g_2 - g_1)z^2]dx + \int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2dx
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İlk olarak bu eşitliğin sol tarafındaki ifade incelenirse,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^b &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(b)}{y(b)}(k_1(b)y(b)z^{'}(b) - k_2(b)y^{'}(b)z(b)) \\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}(k_1(a+\varepsilon)y(a+\varepsilon)z^{'}(a+\varepsilon) \\
&\quad -k_2(a+\varepsilon)y^{'}(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. Burada,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'} - k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^b = 0$$

olduğu göz önüne alınırsa,

$$\int_a^b [(k_1 - k_2)(z^{'})^2 + (g_2 - g_1)z^2]dx = -\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2dx \qquad (3.20)$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (3.14) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$-\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx \geq 0$$

yani,

$$\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx \leq 0 \tag{3.21}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur. Bu ise $y(b) \neq 0$ ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise,

$$\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx > 0$$

olup bu ise (3.21) ifadesi ile çelişir. O halde $(a, b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

3.7. Teorem (Sturm-Picone) $k_i \in C^1[a, b]$ ve $g_i \in C[a, b]$, $(i = 1, 2)$ olmak üzere,

$$(k_1 z^{'})^{'} + g_1 z = 0$$

denklemi $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı çözümü $z(x)$ olsun.

$$(k_2 y^{'})^{'} + g_2 y = 0$$

denklemi ve $y(a) = 0$ şartından oluşan problemin sıfırdan farklı çözümü $y(x)$ olsun. Eğer $[a, b]$ aralığında $g_2 \geq g_1$, $k_1 \geq k_2 > 0$, $g_2 \not\equiv g_1$ ve $k_2 \not\equiv k_1$ ifadeleri sağlanıyorsa bu taktirde $(a, b]$ aralığında $y(x)$ in en az bir sıfırı vardır [25].

İspat Bir önceki teoremde (3.20) eşitliğini yani,

$$\int_a^b [(k_1 - k_2)(z^{'})^2 + (g_2 - g_1)z^2]dx = -\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx$$

ifadesini gözönüne alalım. Bu son eşitlikte $g_2 \geq g_1$, $k_1 \geq k_2 > 0$, $g_2 \not\equiv g_1$ ve $k_2 \not\equiv k_1$ ifadelerine dikkat edilecek olursa,

$$-\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx \geq 0$$

buradan,

$$\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx \leq 0 \qquad (3.22)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur.Bu ise $y(b) \neq 0$ ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise,

$$\int_a^b k_2(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y})^2 dx > 0$$

olup bu ise (3.22) ifadesi ile çelişir. O halde $(a, b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

4. BULGULAR

Bu tez çalışmada,

$$-y'' + q(x)y = \lambda y \qquad x \in [a,c) \cup (c,b] \tag{4.0.1}$$

denkleminden,

$$y(a) = y(b) \tag{4.0.2}$$

$$y'(a) = y'(b) \tag{4.0.3}$$

periyodik sınır şartlarından ve $x = c$ süreksizlik noktasındaki,

$$y(c+) = \alpha y(c-) \tag{4.0.4}$$

$$y'(c+) = \beta y'(c-) \tag{4.0.5}$$

geçiş şartlarından oluşan periyodik Sturm-Liouville sınır-değer-geçiş probleminin bazı spektral özellikleri incelenecektir. Burada $q(x)$, $[a,c) \cup (c,b]$ aralıklarında sürekli olan, $x = c$ noktasında ise $q(c+)$, $q(c-)$ sonlu limit değerine sahip fonksiyonlardır. α, β reel sayılar ve λ ise kompleks özdeğer parametresidir.

Bu bölümde $H := L_2[a,c) \oplus L_2(c,b]$ Hilbert uzayındaki iç çarpım $y_1,\ y_2 \in H$ olmak üzere,

$$\langle y_1, y_2 \rangle_H = \int_a^{c-} y_1.\overline{y_2}dx + \int_{c+}^{b} y_1.\overline{y_2}dx \tag{4.0.6}$$

olarak ele alınacaktır.

4.0.1. Teorem H, Hilbert uzayında (4.0.6) eşitliği bir iç çarpım tanımlar.

İspat Bunun için (4.6) eşitliğinin iç çarpım şartlarını sağladığını gösterelim.
$y_1, y_2, y_3 \in H$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$i)\langle y_1, y_1 \rangle = \int_a^{c-} y_1.\overline{y_1}dx + \int_{c+}^{b} y_1.\overline{y_1}dx = \int_a^{c-} |y_1|^2 dx + \int_{c+}^{b} |y_1|^2 dx \geq 0$$

$$ii)\langle y_1, y_1 \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_a^{c-} |y_1|^2 dx + \int_{c+}^{b} |y_1|^2 dx = 0 \quad \Leftrightarrow \quad y_1 = 0$$

$$iii)\langle \alpha y_1+\beta y_2, y_3\rangle = \int_a^{c-}(\alpha y_1+\beta y_2)\overline{y_3}dx + \int_{c+}^{b}(\alpha y_1+\beta y_2)\overline{y_3}dx$$
$$= \alpha\int_a^{c-} y_1\overline{y_3}dx + \alpha\int_{c+}^{b} y_1\overline{y_3}dx + \beta\int_a^{c-} y_2\overline{y_3}dx + \beta\int_{c+}^{b} y_2\overline{y_3}dx$$
$$= \alpha\langle y_1, y_3\rangle + \beta\langle y_2, y_3\rangle$$

$$iv)\langle y_1, y_2\rangle = \int_a^{c-} y_1\overline{y_2}dx + \int_{c+}^{b} y_1\overline{y_2}dx$$
$$= \overline{\int_a^{c-} y_2\overline{y_1}dx} + \overline{\int_{c+}^{b} y_2\overline{y_1}dx}$$
$$= \overline{\langle y_2, y_1\rangle}$$

4.1. Periyodik Sınır Değer Geçiş Probleminin Kendine Eşlenik Olması:

4.1.1. Teorem $\alpha.\beta = 1$ şartı altında (4.1)-(4.5) eşitlikleri ile verilen periyodik sınır değer geçiş problemi kendine eşleniktir.

İspat Ly diferensiyel operatörü $L(y) = -y'' + q(x)y - \lambda y$ ile gösterilsin. $y_1, y_2 \in C^2[a,b]$ (4.2)-(4.5) sınır şartlarını sağlasın. Problemin kendine eşlenik olduğunu göstermek için,

$$\langle y_1, L(y_2)\rangle = \langle y_2, L(y_1)\rangle$$

veya

$$\int_a^{c-}[y_1L(y_2) - y_2L(y_1)]dx + \int_{c+}^{b}[y_1L(y_2) - y_2L(y_1)]dx = 0$$

olduğunu göstermeliyiz. Burada $L(y_2)$ denklemi y_1 ile $L(y_1)$ denklemi y_2 ile çarpılırsa,

$$y_1L(y_2) = -y_2''y_1 + qy_2y_1 - \lambda y_2y_1$$
$$y_2L(y_1) = -y_1''y_2 + qy_1y_2 - \lambda y_1y_2$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$y_1L(y_2) - y_2L(y_1) = (y_1''y_2 - y_2''y_1)$$

yani,

$$y_1L(y_2) - y_2L(y_1) = (y_1'y_2 - y_2'y_1)' \tag{4.1.1}$$

bulunur. Son eşitlik a' dan c' ye integrallenirse,

$$\begin{aligned}\int_a^{c-}[y_1L(y_2)-y_2L(y_1)]dx &= (y_1'y_2-y_2'y_1)|_a^{c-}\\ &= [y_1'(c-)y_2(c-)-y_2'(c-)y_1(c-)]\\ &\quad -[y_1'(a)y_2(a)-y_2'(a)y_1(a)]\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

eşitliği elde edilir. (4.1.1) eşitliği c' den b' ye integrallenirse,

$$\begin{aligned}\int_{c+}^{b}[y_1L(y_2)-y_2L(y_1)]dx &= [(y_1'(b)y_2(b)-y_2'(b)y_1(b))]\\ &\quad -[(y_1'(c+)y_2(c+)-y_2'(c+)y_1(c+))]\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte $y(a)=y(b)$, $y'(a)=y'(b)$ periyodik sınır şartları ve $y(c+)=\alpha y(c-)$, $y'(c+)=\beta y'(c-)$ geçiş şartları dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}\int_{c+}^{b}[y_1L(y_2)-y_2L(y_1)]dx &= [(y_1'(a)y_2(a)-y_2'(a)y_1(a))]\\ &\quad -[\alpha\beta y_1'(c-)y_2(c-)-\alpha\beta y_2'(c-)y_1(c-)]\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Teoremin ifadesinden $\alpha\beta=1$ olduğu ve (4.1.2), (4.1.3) eşitlikleri dikkate alınırsa,

$$\int_a^{c-}[y_1L(y_2)-y_2L(y_1)]dx+\int_{c+}^{b}[y_1L(y_2)-y_2L(y_1)]dx=0$$

sağlanır. O halde (4.0.1)-(4.0.5) eşitlikleri ile verilen periyodik sınır değer geçiş problemi kendine eşleniktir.

4.2. Periyodik Sınır Değer Geçiş Probleminin Özdeğerlerinin Reel Olması

4.2.1. Teorem $\alpha\beta=1$ şartı altında (4.0.1)-(4.0.5) eşitlikleri ile verilen periyodik sınır değer geçiş probleminin bütün özdeğerleri reeldir.

İspat $\alpha\beta=1$ şartı altında periyodik sınır değer geçiş probleminin λ özdeğerine karşılık uygun özfonksiyonu y olsun. $\overline{y}$, y' nin ve $\overline{\lambda}$, λ' nın eşleniği olmak üzere,

$$-\overline{y}''+q(x)\overline{y}=\overline{\lambda}\overline{y} \qquad x\in[a,c)\cup(c,b] \tag{4.2.1}$$

$$\overline{y}(a)=\overline{y}(b) \tag{4.2.2}$$

$$\overline{y}'(a)=\overline{y}'(b) \tag{4.2.3}$$

$$\overline{y}(c+)=\alpha\overline{y}(c-) \tag{4.2.4}$$

$$\overline{y}'(c+) = \beta \overline{y}'(c-) \tag{4.2.5}$$

yazılabilir. Burada (4.0.1) denklemi $\overline{y}$ ile (4.2.1) denklemi y ile çarpılırsa,

$$-y''\overline{y} + q(x)y\overline{y} = \lambda y\overline{y}$$

$$-\overline{y}''y + q(x)\overline{y}y = \overline{\lambda}\overline{y}y$$

elde edilir. Bu ifadeler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(\overline{y}'y - y'\overline{y})' = (\lambda - \overline{\lambda})y\overline{y} \tag{4.2.6}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin a' dan b' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda})\int_a^{c-} y\overline{y}dx &= (\overline{y}'y - y'\overline{y}) \mid_a^{c-} \\ &= [\overline{y}'(c-)y(c-) - y'(c-)\overline{y}(c-)] \\ &\quad -[\overline{y}'(a)y(a) - y'(a)\overline{y}(a)]\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.6) eşitliğinin c' den b' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda})\int_{c+}^{b} y\overline{y}dx &= (\overline{y}'y - y'\overline{y}) \mid_{c+}^{b} \\ &= [\overline{y}(b)'y(b) - y'(b)\overline{y}(b)] \\ &\quad -[\overline{y}(c+)'y(c+) - y'(c+)\overline{y}(c+)]\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha\beta = 1$ olmak üzere (4.0.2)-(4.0.5) ve (4.2.2)-(4.2.5) sınır geçiş şartları (4.2.8) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda - \overline{\lambda})\int_{c+}^{b} y\overline{y}dx &= \overline{y}(a)'y(a) - y'(a)\overline{y}(a) - \alpha\beta\overline{y}(c-)'y(c-) + \alpha\beta y'(c-)\overline{y}(c-) \\ &= \overline{y}(a)'y(a) - y'(a)\overline{y}(a) - \overline{y}(c-)'y(c-) + y'(c-)\overline{y}(c-)]\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

eşitliği elde edilir. (4.2.7) ile (4.2.9) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$(\lambda - \overline{\lambda})[\int_a^{c-} y\overline{y}dx + \int_{c+}^{b} y\overline{y}dx] = 0$$

$$(\lambda - \overline{\lambda})[\int_a^{c-} |y|^2dx + \int_{c+}^{b} |y|^2dx] = 0$$

eşitliği elde edilir. $y \neq 0$ olduğu için $\lambda = \overline{\lambda}$ elde edilir.

4.3. Periyodik Sınır Değer Geçiş Probleminin Özfonksiyonlarının Ortogonal Olması

4.3.1. Teorem $\alpha\beta = 1$ şartı altında (4.1)-(4.5) eşitlikleri ile verilen periyodik sınır değer geçiş probleminin farklı λ_n ve λ_m özdeğerlerine sırasıyla karşılık gelen $y_n(x)$ ve $y_m(x)$ özfonksiyonları $L_2[a, c) \oplus L_2(c, b]$ ile tanımlı uzayada ortogonaldirler. Yani,

$$\int_a^{c-} y_n(x)y_m(x)dx + \int_{c+}^{b} y_n(x)y_m(x)dx = 0$$

eşitliği sağlanır.

İspat Teoremin ifadesinden,

$$-y_m'' + q(x)y_m = \lambda_m y_m \tag{4.3.1}$$

$$-y_n'' + q(x)y_n = \lambda_n y_n \tag{4.3.2}$$

eşitlikleri sağlanır. Burada (4.3.1) eşitliği y_n (4.3.2) eşitliği y_m ile çarpılırsa ve denklemler taraf tarafa çıkarılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$(y_n' y_m - y_m' y_n)' = (\lambda_m - \lambda_n)y_n y_m \tag{4.3.3}$$

eşitliği elde edilir. Bu son eşitliğin a' dan c' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_a^{c-} y_n y_m dx &= (y_n' y_m - y_m' y_n)\mid_a^{c-} \\ &= y_n'(c-)y_m(c-) - y_m'(c-)y_n(c-) \\ &\quad -y_n'(a)y_m(a) + y_m'(a)y_n(a)\end{aligned} \tag{4.3.4}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde (4.3.3) denkleminin c' den b' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}(\lambda_m - \lambda_n)\int_{c+}^{b} y_n y_m dx &= (y_n' y_m - y_m' y_n)\mid_{c+}^{b} \\ &= y_n'(b)y_m(b) - y_m'(b)y_n(b) - y_n'(c+)y_m(c+) + y_m'(c+)y_n(c+)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. $\alpha\beta = 1$ olmak üzere (4.0.2)-(4.0.5) ve (4.2.2)-(4.2.5) periyodik sınır ve geçiş şartları bu son eşitlikte yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_m - \lambda_n)\int_{c+}^{b} y_n y_m dx &= y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a) \\
&\quad -\alpha\beta y_n'(c-)y_m(c-) + \alpha\beta y_m'(c-)y_n(c-)
\end{aligned}
$$

yani,

$$
\begin{aligned}
(\lambda_m - \lambda_n)\int_{c+}^{b} y_n y_m dx &= y_n'(a)y_m(a) - y_m'(a)y_n(a) \\
&\quad -y_n'(c-)y_m(c-) + y_m'(c-)y_n(c-) \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

eşitliği elde edilir. (4.3.4) ile (4.3.5) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$
(\lambda_m - \lambda_n)[\int_{a}^{c-} y_n y_m dx + \int_{c+}^{b} y_n y_m dx] = 0
$$

eşitliği elde edilir. $\lambda_m \neq \lambda_n$ olduğundan,

$$
\int_{a}^{c-} y_n y_m dx + \int_{c+}^{b} y_n y_m dx = 0
$$

elde edilir. Bu ise (4.0.1)-(4.0.5) periyodik sınır-değer-geçiş probleminin farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarının ortogonal olduğunu gösterir.

4.4. Periyodik Sınır Değer Geçiş Problemi İle İlgili Bazı Teoremler:

4.4.1. Teorem (Karşılaştırma Teoremi) $L_1 y = y'' + g(x)y = 0$ ve $L_2 y = y'' + h(x)y = 0$ denklemleri $x \in [a, c) \cup (c, b]$ aralığında $y(a) = y(b)$, $y'(a) = y'(b)$ sınır şartları ve $\alpha\beta = 1$ olmak üzere $y(c+) = \alpha y(c-)$, $y'(c+) = \beta y'(c-)$ geçiş şartlarıyla verilsin. $g(x) < h(x)$ olmak üzere $L_1(y_1) = 0$ ve $L_2(y_2) = 0$ olsun. Bu durumda sıfırdan farklı çözümler için $y_1(x)$' in ardışık iki sıfırı arasında $y_2(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

İspat $\qquad y_1'' + g(x)y_1 = 0 \quad$ ve $\quad y_2'' + h(x)y_2 = 0$

eşitlikleri sırasıyla y_2 ve y_1 fonksiyonlarıyla çarpılırsa,

$$
y_1'' y_2 + g(x)y_1 y_2 = 0 \quad \text{ve} \quad y_2'' y_1 + h(x)y_2 y_1 = 0
$$

eşitlikleri elde edilir. Bu eşitlikler taraf tarafa çıkarılırsa,

$$
(y_1' y_2 - y_2' y_1)' = [h(x) - g(x)]y_1 y_2 \qquad (4.4.1)
$$

eşitliği elde edilir. $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı x_1 ve x_2 ile gösterilsin. (4.4.1) eşitliğinin x_1' den x_2' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned} \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx &= \int_{x_1}^{x_2} (y_1' y_2 - y_2' y_1)' dx \\ &= (y_1' y_2 - y_2' y_1) \mid_{x_1}^{x_2} \\ &= y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_2'(x_2) y_1(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) + y_2'(x_1) y_1(x_1) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlikte $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx \tag{4.4.2}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmasın. Bu durumda y_1 ve y_2 fonksiyonlarının negatif veya pozitif olma durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

A) Verilen koşular altında $(x_1, x_2) \subset [a, c)$ olsun.

a) $y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2) y_2(x_2) - y_1'(x_1) y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini inceleyebilmemiz için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} \quad , \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0$ ve $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı x_1 ve x_2 olduğu için, $y_1(x)$ fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 ise noktasında azalan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

b) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0$, $y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretini incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$ ve x_1, x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) < 0, y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

c)$y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x),\ y_1(x) > 0,\ y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0,\ x_1$ ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 noktasında ise azalan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) > 0, y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

d) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x),\ y_1(x) < 0,\ y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x}\ , \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x)-y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0,\ x_1$ ve $x_2\ \ y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1{+}\Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1 > (x_1)y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2{+}\Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) < 0,\ y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

B) Verilen koşular altında $(x_1, x_2) \subset (c, b]$ olsun.

a) $y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x),\ y_1(x) > 0,\ y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1 > 0$ ve x_1, x_2 y_1 fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 ise noktasında azalan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) > 0,\ y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

b) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0$, $y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$ ve x_1, x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Böylece $y_1(x) < 0$, $y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

c)$y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) > 0$, $y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 noktasında ise azalan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu nedenle,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) > 0, \; y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)] y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

d) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0$, $y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1 > (x_1)y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olcağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) < 0,\ y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.2) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

C) Verilen koşular altında $a \leq x_1 < c < x_2 \leq b$ olsun.

$$(y_1' y_2 - y_2' y_1)' = [h(x) - g(x)]y_1 y_2$$

ile verilen (4.4.1) eşitliğini ele alalım. $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı x_1 ve x_2 olmak üzere, eşitliğin her iki tarafının x_1' den x_2' ye integrali alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1 y_2 dx \\
&= (y_1' y_2 - y_2' y_1) \mid_{x_1}^{c-} + (y_1' y_2 - y_2' y_1) \mid_{c+}^{x_2} \\
&= y_1'(c-)y_2(c-) - y_2'(c-)y_1(c-) - y_1'(x_1)y_2(x_1) \\
&\quad + y_2'(x_1)y_1(x_1) + y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_2'(x_2)y_1(x_2) \\
&\quad - y_1'(c+)y_2(c+) + y_2'(c+)y_1(c+)
\end{aligned}$$

$\alpha\beta = 1$ ve $y(c+) = \alpha y(c-)$, $y'(c+) = \beta y'(c-)$ geçiş şartları ile $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$ dikkate alınırsa,

$$\int_{x_1}^{c-} [h(x)-g(x)]y_1y_2dx+\int_{c+}^{x_2} [h(x)-g(x)]y_1y_2dx = y_1'(x_2)y_2(x_2)-y_1'(x_1)y_2(x_1) \quad (4.4.3)$$

Kabul edelim ki (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun sıfırı olmasın. Bu durumda y_1 ve y_2 fonksiyonlarının negatif veya pozitif olma durumlarını ayrı ayrı inceleyelim.

a) $y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x)-y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x\to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x)-y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1 > 0$ ve x_1, x_2 y_1 fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 ise noktasında azalan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1+\Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2+\Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) > 0, y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.3) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

b) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x)$, $y_1(x) < 0, y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı pozitif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$ ve $x_1, \ x_2 \ \ y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar ışığında Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) < 0,\ y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.3) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sağ tarafı pozitif, sol tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

c)$y_1(x) > 0$ ve $y_2(x) < 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x),\ y_1(x) > 0,\ y_2(x) < 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin inceleyebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1+\Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2+\Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) > 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan, x_2 noktasında ise azalan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında artan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_1) > y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} > 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında azalan fonksiyon olduğundan,

$y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} < 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) > 0,\ y_2(x) < 0$ şartları altında $y_1'(x_1) > 0$ ve $y_1'(x_2) < 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.3) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

d) $y_1(x) < 0$ ve $y_2(x) > 0$ için,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliği incelenirse, $g(x) < h(x), y_1(x) < 0, y_2(x) > 0$ olduğundan eşitliğin sağ tarafı negatif olur. Diğer yandan eşitliğin sol tarafının işaretinin incelenebilmesi için $y_1'(x_1)$ ve $y_1'(x_2)$ ifadelerinin işaretlerinin bulunması gerekir. Bunun için,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x}, \qquad y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \tfrac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x}$$

ifadelerini ele alalım. Burada $y_1(x) < 0$, x_1 ve x_2 $y_1(x)$ fonksiyonunun ardışık iki sıfırı olduğu için, y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan, x_2 noktasında ise artan fonksiyondur. Bu koşullar için Δx ifadesinin negatif ve pozitif olduğu durumları ayrı ayrı inceleyelim.

i) $\Delta x > 0$ ise,

$x_1 < x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1 > (x_1) y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabilir. Bu durumda,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 < x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) < y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. Böylece,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

ii) $\Delta x < 0$ ise,

$x_1 > x_1 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_1 noktasında azalan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_1) < y_1(x_1 + \Delta x)$ yazılabileceğinden,

$$y_1'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_1 + \Delta x) - y_1(x_1)}{\Delta x} < 0$$

olur.

$x_2 > x_2 + \Delta x$ olacağından ve y_1 fonksiyonu x_2 noktasında artan fonksiyon olduğundan, $y_1(x_2) > y_1(x_2 + \Delta x)$ yazılabilir. O halde,

$$y_1'(x_2) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_1(x_2 + \Delta x) - y_1(x_2)}{\Delta x} > 0$$

olur.

Bu durumda $y_1(x) < 0,\ y_2(x) > 0$ şartları altında $y_1'(x_1) < 0$ ve $y_1'(x_2) > 0$ olduğu görülmektedir. (4.4.3) eşitliği bu koşullar altında incelenirse,

$$y_1'(x_2)y_2(x_2) - y_1'(x_1)y_2(x_1) = \int_{x_1}^{c-} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx + \int_{c+}^{x_2} [h(x) - g(x)]y_1y_2dx$$

eşitliğin sol tarafı pozitif, sağ tarafı negatif olur. Bu da bir çelişki oluşturur. O halde (x_1, x_2) aralığında $y_2(x)$ fonksiyonunun en az bir sıfırı mevcuttur.

Son olarak $y_1(x_1) = 0$ iken tüm bu koşullar altında $y_1'(x_1) = 0$ olursa, varlık ve teklik teoremine göre $y_1(x) \equiv 0$ olur. Ancak $y_1(x_1) \neq 0$ idi. Bu durumda $y_1'(x_1) \neq 0$ olmalıdır.

4.4.2. Teorem $p, q \in C[a, c) \cup C(c, b]$ olmak üzere, $z'' + q(x)z = 0$ denklemi $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartları, $\alpha\beta = 1$ olmak üzere, $z(c+) = \alpha z(c-)$, $z'(c+) = \beta z'(c-)$ geçiş şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı bir çözümü $z(x)$ olsun. Eğer,

$$\int_{a}^{c-} z^2(p - q)dx + \int_{c+}^{b} z^2(p - q)dx \geq 0$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu durumda $y'' + p(x)y = 0$ denklemi ve $y(c+) = \alpha y(c-)$, $y'(c+) = \beta y'(c-)$ ve $y(a) = 0$ şartlarından oluşan problemin sıfırdan farklı bir çözümünün $(a, c) \cup (c, b]$ aralığında en az bir sıfırı mevcuttur.

İspat $\forall x \in (a, c) \cup (c, b]$ için $y(x) \neq 0$ olduğunu kabul edelim. İlk denklem z ile ikinci denklem $\frac{z^2}{y}$ ile çarpılırsa,

$$z(z'' + qz) = 0 \quad \text{ve} \quad \frac{z^2}{y}(y'' + py) = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki ifade birbirine eşitlenip gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{z^2}{y}(y'' + py) = z(z'' + qz)$$

olup buradan,

$$(z'y - y'z)' = (p - q)yz$$

bulunur. Son eşitlik $\frac{z}{y}$ ile çarpılırsa,

$$\frac{z}{y}(z'y - y'z)' = z^2(p - q)$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin $(a,c)\cup(c,b]$ aralığında integrali alınırsa,

$$\int_a^{c-}\frac{z}{y}(z'y-y'z)'dx+\int_{c+}^{b}\frac{z}{y}(z'y-y'z)'dx=\int_a^{c-}z^2(p-q)dx+\int_{c+}^{b}z^2(p-q)dx$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki integrallerde kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y-y'z)\mid_{a+\varepsilon}^{c-}-\int_a^{c-}(z'y-y'z)(\frac{z}{y})'dx\\
&+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y-y'z)\mid_{c+}^{b}-\int_{c+}^{b}(z'y-y'z)(\frac{z}{y})'dx\\
&=\int_a^{c-}z^2(p-q)dx+\int_{c+}^{b}z^2(p-q)dx
\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

eşitliği elde edilir. İlk olarak bu eşitlikte limit içeren ifadeler incelenirse,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y-y'z)\mid_{a+\varepsilon}^{c-} &+ \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(z'y-y'z)\mid_{c+}^{b}\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c-)}{y(c-)}[z'(c-)y(c-)-y'(c-)z(c-)]\\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}[z'(a+\varepsilon)y(a+\varepsilon)-y'(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon)]\\
&\quad +\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(b)}{y(b)}[z'(b)y(b)-y'(b)z(b)]\\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c+)}{y(c+)}[z'(c+)y(c+)-y'(c+)z(c+)]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c-)}{y(c-)}[z'(c-)y(c-)-y'(c-)z(c-)]\\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c+)}{y(c+)}[z'(c+)y(c+)-y'(c+)z(c+)]\\
&= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c-)}{y(c-)}[z'(c-)y(c-)-y'(c-)z(c-)]\\
&\quad -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha z(c-)}{\alpha y(c-)}[\beta z'(c-)\alpha y(c-)-\beta y'(c-)\alpha z(c-)]\\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (4.4.4) denklemi $\alpha\beta = 1$ şartı altında,

$$\begin{aligned}\int_a^{c-} z^2(p-q)dx &+ \int_{c+}^{b} z^2(p-q)dx \\ &= -\int_a^{c-} (z'y-y'z)(\frac{z}{y})'dx - \int_{c+}^{b}(z'y-y'z)(\frac{z}{y})'dx \\ &= -\int_a^{c-} (z'y-y'z)(\frac{z'y-y'z}{y^2})dx - \int_{c+}^{b}(z'y-y'z)(\frac{z'y-y'z}{y^2})dx \\ &= -\int_a^{c-} \frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx - \int_{c+}^{b}\frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx\end{aligned}$$

bulunur. Eşitsizliğin sol tarafı teoremin ifadesinden dolayı pozitif olduğu için yani,

$$\int_a^{c-} z^2(p-q)dx + \int_{c+}^{b} z^2(p-q)dx \geq 0$$

olduğundan,

$$\int_a^{c-} \frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx + \int_{c+}^{b}\frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx \leq 0 \tag{4.4.5}$$

bulunur. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur. Bu ise $y(b) \neq 0$ olması ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise,

$$\int_a^{c-} \frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx + \int_{c+}^{b}\frac{(z'y-y'z)^2}{y^2}dx > 0$$

olup bu ise (4.4.5) ifadesi ile çelişir. O halde $(a, c) \cup (c, b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

4.4.3. Teorem $k_i \in C^1[a, c) \cup C^1(c, b]$, $g_i \in C[a, c) \cup C(c, b]$ ve $k_i > 0$ olmak üzere,

$$(k_1 z')' + g_1 z = 0$$

denklemi ve $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartları, $\alpha\beta = 1$ olmak üzere, $z(c+) = \alpha z(c-)$, $z'(c+) = \beta z'(c-)$ geçiş şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı bir çözümü $z(x)$ olsun. Benzer şekilde,

$$(k_2 y')' + g_2 y = 0$$

denklemi $y(c+) = \alpha y(c-)$, $y'(c+) = \beta y'(c-)$ ve $y(a) = 0$ şartları altında oluşan problemin sıfırdan farklı bir çözümü $y(x)$ olsun. Burada $k_i(x)$, $x = c$ noktasında $k_i(c+)$, $k_i(c-)$ sonlu limit değerine sahip fonksiyonlardır. Eğer,

$$\int_a^{c-}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx+\int_{c+}^{b}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx \geq 0 \quad (4.4.6)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa bu taktirde $(a,c-)\cup(c+,b]$ aralığında $y(x)$ in en az bir sıfırı vardır.

İspat $\forall x \in (a,c-)\cup(c+,b]$ için $y(x)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. İlk denklem z ile ikinci denklem $\frac{z^2}{y}$ ile çarpılırsa,

$$z((k_1z^{'})^{'}+g_1z)=0 \quad \text{ve} \quad z^2/y((k_2y^{'})^{'}+g_2y)=0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki eşitlik taraf tarafa çıkarılırsa,

$$(k_1z^{'})^{'}z-\frac{z^2}{y}(k_2y^{'})^{'}+(g_1-g_2)z^2=0 \quad (4.4.7)$$

eşitliği elde edilir. Buradan,

$$(k_1z^{'})^{'}z-\frac{z^2}{y}(k_2y^{'})^{'}=\frac{z}{y}[(k_1z^{'})^{'}y-(k_2y^{'})^{'}z]$$

eşitliği göz önüne alınırsa, (4.4.7) eşitliği

$$\frac{z}{y}[(k_1z^{'})^{'}y-(k_2y^{'})^{'}z]+(g_1-g_2)z^2=0 \quad (4.4.8)$$

biçiminde yazılabilir. Şimdi

$$\frac{z}{y}[(k_1z^{'})^{'}y-(k_2y^{'})^{'}z] \quad (4.4.9)$$

$$\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'} \quad (4.4.10)$$

ifadesini karşılaştıralım. (4.4.9) deki ifade düzenlenirse,

$$M:=[(k_1z^{'})^{'}y-(k_2y^{'})^{'}z]=k_1^{'}z^{'}y+k_1z^{''}y-k_2^{'}y^{'}z-k_2y^{''}z$$

biçiminde yazılabilir. Benzer şekilde (4.4.10) ifadesi,

$$\begin{aligned} N: &= (k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'} \\ &= k_1^{'}(yz^{'})+k_1(yz^{'})^{'}-k_2^{'}(y^{'}z)-k_2(y^{'}z)^{'} \\ &= k_1^{'}yz^{'}+k_1y^{'}z^{'}+k_1yz^{''}-k_2^{'}y^{'}z-k_2y^{'}z^{'}-k_2y^{''}z \\ &= M+(k_1-k_2)y^{'}z^{'} \end{aligned}$$

Son eşitlik (4.4.8) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}
\frac{z}{y}[(k_1z^{'})^{'}y-(k_2y^{'})^{'}z]+(g_1-g_2)z^2 &= \frac{z}{y}M+(g_1-g_2)z^2 && (4.4.11)\\
&= \frac{z}{y}(N+(k_2-k_1)y^{'}z^{'})+(g_1-g_2)z^2\\
&= \frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'}+\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}+(g_1-g_2)z^2\\
&= 0 && (4.4.12)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitlik a'dan c'ye integrallenirse,

$$\int_a^{c-}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'}dx+\int_a^{c-}\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}dx+\int_a^{c-}(g_1-g_2)z^2dx=0 \quad (4.4.13)$$

$$\int_a^{c-}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^{c-}-\int_a^{c-}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx$$

Bu son eşitlik (4.4.13) eşitliğinde yerine yazılır ve düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^{c-}\\
&= \int_a^{c-}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx-\int_a^{c-}\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}dx-\int_a^{c-}(g_1-g_2)z^2dx\\
&= \int_a^{c-}[(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}-\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}]dx-\int_a^{c-}(g_1-g_2)z^2dx\\
&= \int_a^{c-}[(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y^2})-(k_2-k_1)y^{'}z^{'}\frac{z}{y}]dx-\int_a^{c-}(g_1-g_2)z^2dx\\
&= \int_a^{c-}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2]dx+\int_a^{c-}(g_2-g_1)z^2dx\\
&= \int_a^{c-}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx+\int_a^{c-}k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2dx && (4.4.14)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benze şekilde (4.4.11) eşitliği c'den b'ye integrallenirse,

$$\int_{c+}^{b}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'}dx+\int_{c+}^{b}\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}dx+\int_{c+}^{b}(g_1-g_2)z^2dx=0 \quad (4.4.15)$$

yazılabilir. Bu eşitlikteki ilk integral için,

$$\int_{c+}^{b}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)^{'}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{c+}^{b}-\int_{c+}^{b}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx$$

olduğu göz önüne alınır ve bu eşitlik (4.4.15) eşitliğinde yerine yazılıp düzenlenirse,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} & \frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{c+}^{b} \\
= & \int_{c+}^{b}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}dx-\int_{c+}^{b}\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}dx-\int_{c+}^{b}(g_1-g_2)z^2dx \\
= & \int_{c+}^{b}[(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z}{y})^{'}-\frac{z}{y}(k_2-k_1)y^{'}z^{'}]dx-\int_{c+}^{b}(g_1-g_2)z^2dx \\
= & \int_{c+}^{b}[(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y^2})-(k_2-k_1)y^{'}z^{'}\frac{z}{y}]dx-\int_{c+}^{b}(g_1-g_2)z^2dx \\
= & \int_{c+}^{b}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2]dx+\int_{c+}^{b}(g_2-g_1)z^2dx \\
= & \int_{c+}^{b}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx+\int_{c+}^{b}k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2dx \qquad (4.4.16)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.(4.4.14) ve (4.4.16) eşitlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} & \frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^{c-}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{c+}^{b} \\
= & \int_{a}^{c-}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx \\
& +\int_{c+}^{b}[(k_1-k_2)(z^{'})^2+(g_2-g_1)z^2]dx \\
& +\int_{a}^{c-}k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2dx \\
& +\int_{c+}^{b}k_2(\frac{z^{'}y-zy^{'}}{y})^2dx \qquad (4.4.17)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. İlk olarak bu eşitliğin sol tarafı incelenirse,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} & \frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{a+\varepsilon}^{c-}+\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz^{'}-k_2y^{'}z)|_{c+}^{b} \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c-)}{y(c-)}(k_1(c-)y(c-)z^{'}(c-)-k_2(c-)y^{'}(c-)z(c-)) \\
& -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(a+\varepsilon)}{y(a+\varepsilon)}(k_1(a+\varepsilon)y(a+\varepsilon)z^{'}(a+\varepsilon)-k_2(a+\varepsilon)y^{'}(a+\varepsilon)z(a+\varepsilon)) \\
& +\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(b)}{y(b)}(k_1(b)y(b)z^{'}(b)-k_2(b)y^{'}(b)z(b)) \\
& -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c+)}{y(c+)}(k_1(c+)y(c+)z^{'}(c+)-k_2(c+)y^{'}(c+)z(c+)) \\
= & \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z(c-)}{y(c-)}(k_1(c-)y(c-)z^{'}(c-)-k_2(c-)y^{'}(c-)z(c-)) \\
& -\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\alpha z(c-)}{\alpha y(c-)}(k_1(c-)\alpha y(c-)\beta z^{'}(c-)-k_2(c-)\beta y^{'}(c-)\alpha z(c-)) \\
= & 0
\end{aligned}$$

ifadesi elde edilir. O halde bu son ifade (4.4.17)eşitliğinde yazılırsa,

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz' - k_2y'z)|_{a+\varepsilon}^{c-} + \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{z}{y}(k_1yz' - k_2y'z)|_{c+}^{b} = 0$$

olur. Bu durum dikkate alınırsa,

$$\int_a^{c-}[(k_1-k_2)(z')^2+(g_2-g_1)z^2]dx + \int_{c+}^{b}[(k_1-k_2)(z')^2+(g_2-g_1)z^2]dx$$
$$= -\int_a^{c-}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx - \int_{c+}^{b}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx$$

bulunur. Son eşitlikte (4.4.6) eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$-\int_a^{c-}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx - \int_{c+}^{b}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx \geq 0$$

yani,

$$\int_a^{c-}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx + \int_{c+}^{b}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx \leq 0 \qquad (4.4.18)$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur. Bu ise $y(b) \neq 0$ ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise;

$$\int_a^{c-}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx + \int_{c+}^{b}k_2(\frac{z'y-zy'}{y})^2dx > 0$$

olup bu ise (4.4.18) ifadesi ile çelişir. O halde $(a,c)\cup(c,b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

4.4.4. Teorem $k_i \in C^1[a,c)\cup C^1(c,b]$, $g_i \in C[a,c)\cup C(c,b]$ ve olmak üzere

$$(k_1z')' + g_1z = 0$$

denklemi ve $z(a) = z(b) = 0$ sınır şartları, $\alpha\beta = 1$ olmak üzere, $z(c+) = \alpha z(c-)$, $z'(c+) = \beta z'(c-)$ geçiş şartlarıyla verilen problemin sıfırdan farklı bir çözümü $z(x)$ olsun. Benzer şekilde,

$$(k_2y')' + g_2y = 0$$

denklemi $y(c+) = \alpha y(c-)$, $y'(c+) = \beta y'(c-)$ ve $y(a) = 0$ şartlarından oluşan problemin sıfırdan farklı bir çözümü $y(x)$ olsun. Burada $k_i(x)$, $x = c$ noktasında $k_i(c+)$, $k_i(c-)$ sonlu limit değerine sahip fonksiyonlardır. Eğer,

$[a,b]$ aralığında $g_2 \geq g_1, \;\; k_1 \geq k_2 > 0, \;\; g_2 \not\equiv g_1$ ve $k_2 \not\equiv k_1$

ifadeleri sağlanıyorsa bu taktirde $(a, c-) \cup (c+, b]$ aralığında $y(x)$ in en az bir sıfırı vardır.

İspat (4.4.18) eşitliği yani,

$$\int_a^{c-} [(k_1-k_2)(z^{'})^2 + (g_2-g_1)z^2]dx + \int_{c+}^{b} [(k_1-k_2)(z^{'})^2 + (g_2-g_1)z^2]dx$$
$$= -\int_a^{c-} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx - \int_{c+}^{b} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx$$

eşitliğini göz önüne alalım. Bu son eşitlikte teoremdeki,

$$g_2 \geq g_1, \;\; k_1 \geq k_2 > 0, \;\; g_2 \not\equiv g_1 \text{ ve } k_2 \not\equiv k_1$$

şartları göz önüne alınırsa,

$$-\int_a^{c-} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx - \int_{c+}^{b} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx \geq 0$$
$$\int_a^{c-} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx + \int_{c+}^{b} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx \leq 0 \tag{4.4.19}$$

eşitsizliği yazılabilir. Burada ilk olarak herhangi bir c sabit sayısı için, $y(x) = cz(x)$ olsun. $z(b) = 0$ olduğu için $y(b) = 0$ olur. Bu ise $y(b) \neq 0$ ile çelişir. Diğer taraftan $y(x) \neq cz(x)$ durumunda ise,

$$\int_a^{c-} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx + \int_{c+}^{b} k_2\left(\frac{z^{'}y - zy^{'}}{y}\right)^2 dx > 0$$

olup bu ise (4.4.19) ifadesi ile çelişir. O halde $(a,c) \cup (c,b]$ aralığında $y(x)$' in en az bir sıfırı vardır.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında literatürde daha önce araştırılmamış yeni tipten bir periyodik Sturm-Liouville probleminin en temel spektral özellikleri ele alınmıştır. Bu çalışma içinde fark yaratan en önemli özellik ise tanımlanan aralıkta iç süreksizlik noktası olması ve bu süreksizlik noktasında geçiş şartları verilerek araştırmanın yapılmasıdır.

Bu tezde elde edilen sonuçlar ne kadar soyut olsa da mekanik ve fizikte ortaya çıkan daha somut çalışmalarda kullanılabilir.

Bu tez çalışmasındaki yöntemlerle daha farklı sınır veya geçiş şartları oluşturularak yeni sınır-değer-geçiş problemleri üzerinde araştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

1. Birkhoff, G.,(1908). *On The Asymtotic Character Of The Solitions Of Certain Linear Differential Equations Containing a parameter.* Itransactions of the American Mathematical Society Vol. 9, No. 2, 219-231. 219-231.

2. Malathi V., Suleiman M., Taib B. B., (1996). *Computing eigenvalues of periodic sturm-liouville problems using shooting technique and direct integration method.* Intern. J. Computer Math., 68, 119- 132.

3. Condon D.J., (1999). *Corrected finite difference eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems.* Applied Numerical Mathematics, 30, 393-401.

4. Boumenir, A.,(1999). *Eigenvalues of Periodic Sturm-Liouville Problems By The Shannon-Whittaker Sampling Theorem.* Mathematics Of Computation 68, 227, Pages 1057-1066.

5. Ya. M. Dymarskii, (2002). *Manifolds Of Eigenfunctıons And Potentials of a Family of Periodic Sturm - Liouvılle Problems.* Ukrainian Mathematical Journal, 54, 8.

6. Paul A. Bindinga,Bryan P. Rynne, (2004). *Half-eigenvalues of periodic Sturm-Liouville problems.* J. Differential Equations 206, 280-305.

7. Dan Burghelea, Nicolau C. Saldanha and Carlos Tomei, (2008). *The geometry of the critical set of nonlinear periodic Sturm-Liouville operators.* J. Differential Equations, 246, 3380-3397.

8. S.Somali, V. Oger, (2004). *Improvement of eigenvalues of Sturm-Liouville problem with t-periodic boundary conditions.* Journal of Computational and Applied Mathematics 180, 433-441.

9. Binding P., Volkmer H., (2012). *A Prüfer Angle Approach to the Periodic Sturm-Liouville Problem.* The American Mathematical Monthly, 119:6, 477-484.

10. Tyn Myint U. (1973). *Partial differential equations of mathematical physics.* American Elsevier Pub. Co 163-165.

11. Alberto Cabada and J. Angel Cid.,(2012) *On comparison principles for the periodic Hill's equation.* J. London Math. Soc. , 2, 272-290.

12. Al-Khaled, Kamel; Hazaimeh, Ashwaq, (2020). *Comparison Methods for Solving Non-Linear Sturm-Liouville Eigenvalues Problems.* Symmetry 12,7,1179.

13. Mukhtarov O. Sh.,Yakubov S., (2002). *Problem for Ordinary Differential Equation with Transmission Conditions.* Applicaple Analysis, 81, 1033-1064.

14. Kandemir M., (2017). *Asymptotic distribution of eigenvalues for fourth-order boundary value problem with discontinuous coefficients and transmission conditions.* Jommun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat. 66, 133-152.

15. Kandemir M., (2015). *Nonlocal boundary value problems with transmission conditions.* Gulf Journal of Mathematics, 3, 1.

16. Aydemir K., Mukhtarov O. Sh., (2013). *Modified Expansion Theorem for Sturm-Liouville problem with transmission conditions.* arXiv:1303.6898 [math.CA].

17. Aydemir, K., Mukhtarov, O. S, (2016). *Variational principles for spectral analysis of one Sturm-Liouville problem with transmission conditions.* Adv Differ Equ 2016, 76.

18. Kandemir M., Mukhtarov, O., (2017). *Nonlocal Sturm-Liouville Problems with Integral Terms in the Boundary condition.* Electronic Journal of Diferential Equations, Vol., 11,1-12.

19. Aydemir K., Mukhtarov O. Sh., (2017). *Class of Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Transmission Conditions.* Numerical Functional Analysis and Optimization, 38-10, 1260-1275.

20. Mukhtarov O. Sh., Olgar H., Kandemir M., Aydemir K., (2018). *Hilbert Space Method for Sturm-Liouville Problems with Discontinuities.* SETSCI Conference Indexing System, Volume 3, 1163-1 167.

21. Kandemir, M., (2021). *Diferensiyel Denklemler.* Pegem Akademi yayıncılık, Ankara.545-665.

22. Balcı M.,(2005) *Reel Analiz.* Balcı Yayıncılık, Ankara.

23. Soykan, Y., (2016). *Fonksiyonel Analiz.* Nobel Akademi Yayıncılık.

24. Naimark, M.A.,(1967). *Linear Differential Operators.* Ungar, Newyork.

25. Swanson C. A., (1968). *Comparison and Oscillation Theory of Linear Differential Equations.* Academic Press.

26. Brauer, F. , Nohel, J. A.(1969). *Qualitative Theory of Ordinary Differantial Equtions.* Dover.

27. Kandemir M., Ya. Yakubov, (2010). *Regular boundary value problems with a discontinuous coefficient, functional-multipoint conditions, and a linear spectral parameter.* Gsrael Journal of Mathematics volume, 180, 255-270.

28. Kandemir M., (2016). *Solvability of boundary value problems with transmission conditions for discontinuous elliptic differential operator equations.* Journal of Advances in Mathematics, 12, 5842-57.

29. Sagan, H. (1961). *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics.* J. Wiley and Sons, Inc, Newyork.

30. Sanchez, D.A., (1968). *Ordinary Differential Equations and Stability Theory: An introduction.* W. H. Freeman and Company.

31. Schovanec, L., Gilliam , D. (1998-1999). *Chapter 5. Sturm-Liouville Theory Mathematics and Statistics.* Texas Tech University.

32. Stakgold, I., (1979). *Green's Fuction and Boundary Value Problems.* Wiley-Interscience.

33. Woldegerima, W.A., (2011). *The Sturm-Liouville Boundary Value Problems and their applications: First Edition.*LAP Lambert Academic Publishing.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı, Soyadı	:	Osman YILMAZ
Uyruğu	:	Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	:	
Medeni hali		

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Ankara Üniversitesi	2004
Tezsiz Yüksek lisans	Başkent Üniversitesi	2008

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görev**
2016 -	Amasya Üniversitesi	Bilgisayar İşletmeni

Yabancı Dili

İngilizce