T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SIRALI ORTOGONAL KONİ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET SÜRMELİOĞLU

OCAK 2021
AMASYA

SIRALI ORTOGONAL KONİ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE SABİT NOKTA TEOREMLERİ

Mehmet SÜRMELİOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

OCAK 2021
AMASYA

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…………

Mehmet SÜRMELİOĞLU

18/12/2020

SIRALI ORTOGONAL KONİ METRİK UZAYLAR ÜZERİNDE
SABİT NOKTA TEOREMLERİ
(Yüksek Lisans Tezi)

Mehmet SÜRMELİOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ocak 2021

ÖZET

2017 yılında Gordji, Ramezani, De La Sen ve Cho [16] ortogonal küme ve ortogonal metrik uzay kavramlarını vermişlerdir. Ardından Gordji ve Habibi [15] genelleştirilmiş ortogonal metrik uzaylarda bazı sabit nokta teoremlerini vermişlerdir. 2018 yılında Bilgili Gungor [4], koni metrik uzaylarda ortogonallik bağıntısını kullanarak büzülme dönüşümleri için sabit noktaların varlığını ispatlamıştır. Bu çalışmada ise Bilgili Gungor [4], Run ve Reurings [27] çalışmalarından esinlenerek, sıralı ortogonal koni metrik uzaylar üzerinde sabit noktaların varlığı incelenmiştir.

Sayfa Adedi : 32
Anahtar Kelimeler : büzülebilir dönüşüm, sabit nokta, koni metrik uzay, ortogonal koni metrik uzay, sıralı metrik uzay
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR

FİXED POINT THEOREMS ON ORDERED ORTHOGONAL CONE METRİC SPACES

(M. Sc. Thesis)

Mehmet SÜRMELİOĞLU

AMASYA UNIVERSITY

INSTITUTE OF SCIENCE

January 2021

ABSTRACT

In 2017, Gordji, Ramezani, De La Sen and Cho [16] gave ortogonal set and orthogonal metric space concepts . Then, Gordji and Habibi [15] gave some fixed point theorems in generalized orthogonal metric spaces. In 2018, Bilgili Gungor [4], proved the existence of fixed points for contraction mappings using the orthogonality relation in cone metric spaces. In this study, the existence of fixed points are investgated on ordered orthogonal cone metric spaces inspired by the work of Bilgili Gungor [4], Run and Reurings [27].

Page Number : 32

Key Words : contractive mapping, fixed point, cone metric space, orthogonal cone metric space, ordered metric space

Supervisor : Assist. Prof. Dr. Nurcan BILGILI GUNGOR

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmama öncü olan, çalışmamda karşılaştığım sıkıntılarla yakından ilgilenen, karanlık noktalara ışık olan, her türlü bilgisini, desteğini ve tecrübesini benimle paylaşan çok değerli hocam Dr. Öğr. Gör. Nurcan BİLGİLİ GÜNGÖR'e en içten saygı ve sevgilerimle teşekkür ederim. Ders dönemleri boyunca bana desteklerini esirgemeyen değerli hocalarım Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ve Doç. Dr. Kadriye AYDEMİR'e şükranlarımı sunarım. Maddi manevi her zaman yanımda olan anneme, babama, kardeşlerime ve bugünlere gelmemde emeği olan bütün hocalarıma sonsuz teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Bu çalışmada kullanılmış bazı simgeler ve kısaltmalar, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

Simgeler	**Açıklama**
$\subseteq$	Alt küme
$\forall$	Her (herhangi)
$\exists$	En az bir
$\ni$	Öyle ki
$\boldsymbol{k_0}$	Ortogonal eleman
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}^+$	Pozitif doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar kümesi
$\boldsymbol{G}$	Reel Banach uzayı
$\boldsymbol{K}$	Koni
$\boldsymbol{L}$	Normal sabit
$\lvert\,.\,\rvert$	Mutlak değer
$\lVert\,.\,\rVert$	Norm
$\boldsymbol{int\ K}$	K nin içi
$\boldsymbol{x \preccurlyeq y}$	$y - x \in K$
$\boldsymbol{x \prec y}$	$x \preccurlyeq y$ fakat $x \neq y$
$\boldsymbol{x \ll y}$	$y - x \in intK$
$\sqsubseteq$	Kısmi sıralama

$\boldsymbol{\theta_G}$	Sıfır vektörü
$(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{d})$	Koni metrik uzay
$(\boldsymbol{M}, \perp)$	Ortogonal küme
$(\boldsymbol{M}, \perp, \boldsymbol{d})$	Ortogonal koni metrik uzay
$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{M} \rightarrow \boldsymbol{M}$	f, M den M ye bir öz dönüşüm

1. GİRİŞ

Analizde varlık teoremleri, temel matematiksel gerçeklerin eleştirel olarak da göz önüne alındığı on dokuzuncu yüzyılda incelenmeye başlanmıştır ve analitik sağ tarafa sahip diferansiyel denklem sistemleri için bir varlık teoremi kanıtlayan ilk matematikçi Augustin Louis Cauchy'dir. Diğer taraftan Picard, varlık teoremlerini kanıtlamak için ardışık yaklaşımlar yöntemini önermiştir. 1922'de Birkhoff ve Kellogg fonksiyon uzaylarında $\frac{dy}{dx} = f(x, y)$ denklemi için klasik varlık teoreminin bir ispatını vermişlerdir. Ancak çözümlerin varlık ve tekliği için kurulan teoremlerin ispatlanması için en temel ve en verimli metot 1922 yılında Stefan Banach tarafından verilen ilkedir ve varlık teoreminin ispatına ilk kez 1930 yılında Renato Caccioppoli tarafından uygulanmıştır. Bu ilke, Picard'ın ardışık yaklaşımlar yönteminin geometrik yorumunun bir sonucudur.

Stefan Banach'ın büzülme ilkesi aşağıdaki şekilde belirtilmiştir:

"(M, d) bir tam metrik uzay olmak üzere, $f: M \rightarrow M$ bir öz dönüşüm olsun.

Eğer her $k, l \in M$ için $d(fk, fl) \leq \alpha d(k, l)$ şartını sağlayan bir $\alpha \in [0,1)$ reel sayısı var ise f öz dönüşümünün bir tek sabit noktası vardır."

Diferansiyel ve integral denklemlerin çözümlerinin tekliğinin ispatındaki yaygın kullanımından ötürü Banach Büzülme İlkesi'nin bazı genişlemeleri Edelstein (1961), Rakotch (1962), Chu ve Diaz (1965) ve Wong (1968) gibi matematikçiler tarafından verilmiştir.

Banach Büzülme İlkesi, Luxemburg (1958), Monna (1961), Edelstein (1964), Margolis (1967), Diaz ve Margolis (1967) tarafından Genelleştirilmiş Tam Metrik Uzaya genelleştirilmiştir. Ayrıntılı sonuçlar için Carl Wallace Norris tarafından yazılmış "Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümleri Altında Sabit Noktalar ve Periyodik Noktalar" (Memorial Üniversitesi, Newfoundland) tezine bakabilirsiniz. Davis (1963), Kammerer ve Kasriel (1964), Naimpally (1965) ve Edelstein (1967) gibi bazı araştırmacılar ise bu sonuçları düzgün uzaylara genelleştirmişlerdir. Daha fazla bilgi için Wayne Cyril Russell (1970) tarafından yazılmış "Düzgün Uzaylarda Sabit Nokta Teoremi" (Memorial Üniversitesi, Newfoundland) tezine bakabilirsiniz.

Ayrıca 1960'lı yılların ortalarında Felix Earl Browder'ın matematiğin aktif ve önemli bir dalı olan doğrusal olmayan fonksiyonel analiz alanındaki öncü çalışmaları sonucunda genişlemeyen dönüşümlerin sabit noktaları ile ilgili çalışmalarda da bir ivme kazanılmıştır.

Bu çalışmaların öncüleri 1965 yılında Browder, Gohde, Kirk ve Edelstein tarafından verilmiştir.

Diğer taraftan 2007 yılında Huang ve Zhang tarafından metrik dönüşümlerin değer kümesi olan reel (gerçel) sayılar kümesi yerine kısmi sıralı reel Banach uzayı alınarak *"koni metrik"* adı verilen, metrik dönüşümünün bir genelleştirilmesi tanımlanmış ve koni metrik uzaylar üzerinde bazı sabit nokta teoremleri ifade edilmiş ve ispatlanmıştır. Bu teoremlerde koninin normalliği, sonuçların ispatı için gerek koşul olarak verilmiştir. 2008 yılında Rezapour ve Hamlbarani bu teoremlerdeki koninin normalliği koşulunun ihmal edilebileceğini belirtmiş ve bu durum için teoremlerin ispatlarını vermişlerdir. Bu makalelerin ardından koni metrik uzaylarla ilgili bir makaleler dizisi ortaya çıkmaya başlamıştır. Bu makalelerde koni metrik uzaylarda verilen öz dönüşümlerin sağladığı büzülme şartlarının değiştirilmesi yoluyla sabit nokta teoremleri, ortak sabit nokta teoremleri, periyodik sabit nokta teoremleri gibi pek çok teorem ifade ve ispat edilmekle birlikte ayrıca koni metrik uzayların topolojik özellikleri de incelenmiş ve bu topolojik özellikler yoluyla koni metrik uzaylar üzerinde bazı teoremler ifade ve ispat edilmiştir.

Öte yandan 2017 yılında Gordji, Ramezani, De La Sen ve Cho *ortogonal küme* tanımını vererek, ortogonal bir küme üzerinde tanımlı metrikle elde edilen ortogonal metrik uzaylar üzerinde tanımlı öz dönüşümler için Banach Sabit Nokta Teoremi'nin bir reel genelleştirmesini vermişlerdir. Bu teoremin en önemli özelliği küme üzerinde tanımlı öz dönüşüm için verilen büzülme şartının sadece kümedeki ortogonal bağlantılı elemanlar için sağlanmasının yeterli olmasıdır. Bu makalenin ardından çeşitli araştırmacılar tarafından ortogonal metrik uzaylar üzerinde sabit nokta teoremleri için bazı genelleştirmeler verilmeye başlanmış olup bu çalışmalar devam etmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Tanım Boş kümeden farklı bir M kümesi verilsin. $f: M \to M$ bir dönüşüm olmak üzere $fk_0 = k_0$ eşitliğini sağlayan bir $k_0 \in M$ varsa, bu elemana f nin bir *sabit noktası* denir [3].

2.1. *Örnek* $M = [0, \infty)$ olmak üzere, $f: M \to M, fk = \frac{k}{5}$ olsun. Bu durumda $k_0 = 0$ verilen dönüşüme ait tek bir sabit noktadır [3].

2.2. *Örnek* $M = \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: M \to M, fk = k^2 + 3k + 4$ olsun. Bu durumda verilen dönüşümün hiçbir sabit noktası yoktur [3].

2.3. *Örnek* $M = [0, \infty)$ olmak üzere, $f: M \to M, fk = k^2$ olsun. Bu durumda $k_0 = 0$ ve $k_1 = 1$ verilen dönüşüme ait iki sabit noktadır [3].

2.4. *Örnek* $M = \mathbb{R}$ olmak üzere, $f: M \to M, fk = k$ olsun. Bu durumda verilen dönüşümün sonsuz çoklukta sabit noktası vardır [3].

I, M üzerinde birim dönüşüm olmak üzere $f: M \to M$ dönüşümünün sabit noktaları $(f - I)(k) = 0$ eşitliğinin çözümleridir. Bu denklemin çözümünü bulmak demek, verilen T dönüşümün sabit noktalarını bulmak demektir [3].

2.1. Önerme (Sabit Nokta Teoremi)

f:$[c, d] \to [c, d]$ ye tanımlı sürekli bir dönüşüm ise, $f(k) = k$ denkleminin $[c, d]$ içinde en az bir kökü vardır [3].

2.2. Tanım Boş kümeden farklı bir M kümesi verilsin. $d: M \times M \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü verilen her $k, l, t \in M$ için

$M1$) $d(k, l) = 0 \Leftrightarrow k = l$

$M2$) $d(k, l) = d(l, k)$

$M3$) $d(k, l) \leq d(k, t) + d(t, l)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye M üzerinde bir metrik ve (M, d) ikilisine de *metrik uzay* denir [3].

2.3. Tanım Boş kümeden farklı bir M kümesi verilsin. $d: M \times M \to \mathbb{R}^+$ dönüşümü verilen her $k, l, t \in M$ için

$Y1$) $\forall k \in M$ için $d(k, k) = 0$

$Y2$) $d(k, l) = d(l, k)$

$Y3$) $d(k, l) \leq d(k, t) + d(t, l)$

özelliklerini sağlıyorsa d ye M üzerinde bir yarı metrik ve (M, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir [3].

2.5. *Örnek* $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ olmak üzere $d(k,l) = |k - l|$ şeklinde tanımlanan dönüşüm reel sayılar kümesi üzerinde bir metriktir. Yani $(\mathbb{R}, d)$ de bir metrik uzaydır [3].

2.4. Tanım (M,d) bir metrik uzay olmak üzere $k_0 \in X$ ve $r > 0$ bir gerçek sayı olsun. Bu durumda,

$B(k_0; r) = \{k \in M: d(k, k_0) < r\}$ kümesine k_0 merkezli r yarıçaplı *açık yuvar,*

$B[k_0; r] = \{k \in M: d(k, k_0) \leq r\}$ kümesine k_0 merkezli r yarıçaplı *kapalı yuvar,*

$S[k_0; r] = \{k \in M: d(k, k_0) = r\}$ kümesine k_0 merkezli r yarıçaplı *yuvar yüzeyi* denir [3].

2.5. Tanım (M,d) bir metrik uzay ve V da M in boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her $k \in V$ için $B(k; r) \subset V$ olacak şekilde bir r pozitif tamsayısı varsa V kümesine d-*açıktır*, denir [3].

2.6. Tanım Bir (M,d) metrik uzayında bir U alt kümesi için $U^c = M - U$ kümesi d-açık ise, U kümesine d-*kapalı küme* denir [3].

2.2. Önerme (M,d) bir metrik uzay olsun.

$i)$ (M,d) içindeki her açık yuvar d-açık bir alt kümedir.

$ii)$ (M,d) içindeki her kapalı yuvar d-kapalı bir alt kümedir [3].

2.7. Tanım (M,d) bir metrik uzay, U ve V ise M in boş kümeden farklı iki alt kümesi ve $k \in M$ olmak üzere;

$d(U,V) = inf\{d(k,l): k \in U, l \in V\}$ sayısına *U ve V kümeleri arasındaki uzaklık,*

$d(k,U) = inf\{d(k,l): l \in U\}$ sayısına k noktasının *U kümesine olan uzaklığı,*

$d(U) = sup\{d(k,l): k, l \in U\}$ sayısına ise *U kümesinin çapı* denir. Burada $d(U) < \infty$ ise U kümesine *sınırlı küme*, $d(U) = \infty$ ise U kümesine *sınırsız küme* denir [3].

2.8. Tanım (M,d) metrik uzayında bir $\{k_n\}$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık belirli bir $n(\varepsilon)$ pozitif doğal sayısı var ve $n \geq n(\varepsilon)$ olacak şekildeki her n pozitif doğal sayısı için $k_n \in B(k, \varepsilon)$ olan bir $k \in M$ var ise $\{k_n\}$ dizisi $k \in M$ noktasına *yakınsaktır* denir ve $k_n \to k$ ile gösterilir [3].

2.3. Önerme (M,d) bir metrik uzay ve $U \subset M$ olsun. U nın d-kapalı olması için gerek ve yeter koşul $\{k_n\} \subset U$ olacak şekildeki her dizi için $k_n \to k$ ise $k \in U$ olmasıdır [3].

2.9. Tanım (M,d) metrik uzayında herhangi bir $\{k_n\}$ dizisini ele alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık belirli bir $n(\varepsilon)$ pozitif doğal sayısı var ve $m, n \geq n(\varepsilon)$ olacak şekildeki her n pozitif doğal sayısı için $d(k_n, k_m) < \varepsilon$ oluyorsa $\{k_n\}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir [3].

(M,d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi bu uzayda bir noktaya yakınsıyor ise (M,d) ikilisine *tam metrik uzay* denir [3].

2.4. Önerme (M, d) bir tam metrik uzay ve $U \subset M$ olsun. (M, d) metrik uzayından U kümesine indirgenen metrik d_U metriği olsun. (U, d_U) alt metrik uzayının tam uzay olması için gerek ve yeter koşul U kümesinin d-kapalı küme olmasıdır [3].

2.10. Tanım (M, d) bir metrik uzay $f: M \to M$ herhangi bir dönüşüm olsun. Her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \leq \alpha d(k, l)$$

koşulunu sağlayan α pozitif gerçek sayısı varsa f dönüşümüne Lipschitz koşulunu sağlıyor denir [3].

Burada $\alpha < 1$ ise f dönüşümüne *büzülme dönüşümü,* $\alpha = 1$ ise f dönüşümüne *genişlemeyen dönüşüm* adı verilir. Ayrıca $k \neq l$ olan her $k, l \in M$ için, $d(fk, fl) < d(k, l)$ ise f dönüşümüne *büzülebilir dönüşüm* adı verilir [3].

2.11. Tanım (M, d_M) ve (N, d_N) metrik uzaylar, $k_0 \in M$ ve $f: M \to N$ bir dönüşüm olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d_M(k, k_0) < \delta$ olduğunda $d_N(f(k), f(k_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, f dönüşümüne k_0 noktasında *süreklidir* denir.

Eğer $f: M \to N$ dönüşümü M kümesinin tüm noktalarında sürekli ise, f dönüşümüne M kümesi üzerinde *süreklidir* denir [3].

2.12. Tanım M kümesi boş kümeden farklı bir küme ve ● da M üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa$(M, \bullet)$ cebirsel yapısına bir *grup* denir.

i) Her $k, l \in X$ için $k \bullet l \in M$ dir. (Kapalılık özelliği)

ii) Her $k, l, t \in M$ için $(k \bullet l) \bullet t = k \bullet (l \bullet t)$ dir. (Birleşme özelliği)

iii) Her $k \in M$ için $k \bullet e = e \bullet k = k$ olacak şekilde bir $e \in M$ vardır. (Birim eleman özelliği)

iv) Her $k \in M$ için $k \bullet l = l \bullet k = e$ olacak şekilde $l = k^{-1} \in G$ vardır. (Ters eleman özelliği)

Bu dört şarta ilave olarak,

v) $k, l \in M$ için $k \bullet l = l \bullet k \in M$ (Değişme özellliği)

şartı da sağlanıyorsa bu gruba *abelyen (değişmeli) grup* denir [3].

2.13. Tanım M kümesi boş kümeden farklı bir küme olsun. M üzerinde tanımlı iki ikili işlem ● ve ▪ olsun. Eğer aşağıdaki üç şart sağlanıyorsa $(M, \bullet, \blacksquare)$ iki işlemli cebirsel yapısına *halka* denir.

1) $(M, \bullet)$ bir abelyen gruptur.

2) Her $k, l, t \in M$ için $k \blacksquare (l \blacksquare t) = (k \blacksquare l) \blacksquare t$ dir.

3) Her $k, l, t \in M$ için,

$$k \blacksquare (l \bullet t) = (k \blacksquare l) \bullet (k \blacksquare t) \quad \text{ve} \quad (k \bullet l) \blacksquare t = (k \blacksquare t) \bullet (l \blacksquare t) \quad \text{dir [3].}$$

2.14. Tanım $(M, \bullet, \blacksquare)$ cebirsel yapısı bir halka olsun. Eğer $(M\backslash\{0\}, \blacksquare)$ bir abelyen grup ise $(M, \bullet, \blacksquare)$ cebirsel yapısına *cisim* denir [3].

2.15. Tanım M kümesi boş kümeden farklı bir küme ve $\mathbb{F}$ reel veya karmaşık sayılar cismi olsun. $t: M \times M \to M$, her $k, l \in M$ için $t(k,l) = k \oplus t$ ve ç: $\mathbb{F} \times M \to M$,
her $\beta \in \mathbb{F}, k \in M$ için $ç(\beta, k) = \beta \odot k$ şeklinde tanımlı iki işlem olsun.
Her $k, l, t \in M$ ve her $\beta, \gamma \in \mathbb{F}$ için

$V1)$ $k \oplus l \in M$ (Kapalılık özelliği)
$V2)$ $k \oplus (l \oplus t) = (k \oplus l) \oplus t$ (Birleşme özelliği)
$V3)$ $k \oplus \theta_M = \theta_M \oplus k = k$ olacak şekilde $\theta_M \in M$ vardır. (Birim eleman özelliği)
$V4)$ $k \oplus (-k) = (-k) \oplus k = \theta_M$ olacak şekilde $-k \in M$ vardır. (Ters eleman özelliği)
$V5)$ $k \oplus l = l \oplus k$ (Değişme Özelliği)
$V6)$ $\beta \odot k \in M$
$V7)$ $\beta \odot (k \oplus l) = (\beta \odot k) \oplus (\beta \odot l)$
$V8)$ $(\beta + \gamma) \odot k = (\beta \odot k) \oplus (\gamma \odot k)$
$V9)$ $(\beta\gamma) \odot k = \beta \odot (\gamma \odot k)$
$V10)$ $1 \odot k = k$ $(1 \in \mathbb{F})$

koşulları sağlanırsa $(M,\oplus,\odot)$ üçlü yapısına $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *vektör uzayı* denir [3].

2.16. Tanım $(M,\oplus,\odot)$, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $n: M \to \mathbb{R}$, her $k \in M$ için $n(k) = \|k\|$ şeklinde tanımlı fonksiyon, her $k, l \in M$ ve her $\alpha \in \mathbb{F}$ için

$n1)$ $\|k\| \geq 0$
$n2)$ $\|k\| = 0 \Leftrightarrow k = \theta_M$
$n3)$ $\|\alpha \odot k\| = |\alpha|\|k\|$
$n4)$ $\|k \oplus l\| \leq \|k\| + \|l\|$ (Üçgen Eşitsizliği)

şartlarını sağlıyor ise n fonksiyonuna M kümesi üzerinde bir norm ve $(M, \|.\|)$ ikilisine de *normlu uzay* denir [3].

$(M, \|.\|)$ herhangi bir normlu uzay olsun. $d: M \times M \to \mathbb{R}$, $d(k,l) = \|k - l\|$ şeklinde tanımlı dönüşüm M kümesi üzerinde bir metrik dönüşümüdür. Ve bu metriğe $\|.\|$ *normunun ürettiği metrik* denir [3].

Dolayısıyla normlu uzaylar üzerinde bu norm yardımıyla bir metrik dönüşümü tanımlanabilir.

2.17. Tanım $(M, \|.\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer $(M, \|.\|)$ uzayı normun ürettiği d metriğine göre tam ise $(M, \|.\|)$ normlu uzayına *Banach uzayı* denir [3].

3. MATERYAL VE METOTLAR

3.1. Koni Metrik Uzaylarda Bazı Temel Tanım ve Teoremler

3.1.1. Tanım G bir reel Banach uzayı ve $K \subseteq G$ olsun. Eğer K kümesi

$K1)$ K kapalı, $K \neq \emptyset$ ve $K \neq \{\theta_G\}$

$K2)$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha, \beta \geq 0$, $k, l \in K \;\; \Rightarrow \;\; \alpha k + \beta l \in K$

$K3)$ $k \in K$ ve $-k \in K \;\; \Rightarrow \;\; k = \theta_G$

şartlarını sağlıyorsa K kümesine bir *koni (cone)* denir [19].

3.1.2. Tanım G bir reel Banach uzayı ve $K \subseteq G$ bir koni olsun. Bu durumda her $k, l \in G$ için $k \preccurlyeq l \Leftrightarrow l - k \in K$ olacak şekilde tanımlı bağıntıya G üzerinde *kısmi sıralama bağıntısı* denir. $k \preccurlyeq l$ fakat $k \neq l$ olduğunu göstermek için de $k \prec l$ yazabiliriz.

Ayrıca $l - k \in int\,K$ iken de $k \prec\prec l$ yazabiliriz. Burada $int\,K, K$ nin içini ifade etmektedir [19].

3.1.1. Lemma G bir reel Banach uzayı, $K \subseteq G$ bir koni ve $\gamma > 0$ bir reel sayı olsun.

$i)$ $intK + intK \subset intK$

$ii)$ $\gamma\, intK \subset intK$

dir [30].

3.1.3. Tanım G bir reel Banach uzayı, $K \subseteq G$ bir koni olsun. Her $k, l \in G$ için en az bir $L > 0$ reel sayısı var öyle ki $\theta_G \preccurlyeq k \preccurlyeq l$ iken $\|k\| \leq L\|l\|$ oluyorsa K konisine *normal koni* ve bu koşulları sağlayan en küçük L pozitif reel sayısına K normal konisinin *normal sabiti* denir [19].

3.1.4. Tanım $M \neq \emptyset$, G bir reel Banach uzayı olmak üzere $d: M \times M \rightarrow G$ dönüşümü

$m_1)$ Her $k, l \in M$ için $\theta_G \preccurlyeq d(k, l)$ ve $d(k, l) = \theta_G \Leftrightarrow k = l$

$m_2)$ Her $k, l \in M$ için $d(k, l) = d(l, k)$

$m_3)$ Her $k, l, t \in M$ için $d(k, l) \preccurlyeq d(k, t) + d(t, l)$

koşullarını sağlıyorsa, d dönüşümüne M üzerinde bir koni metrik ve (M, d) ye de *koni metrik uzay* denir [19].

Koni metrik uzaylar metrik uzayların bir genellemesidir.

3.1.1. *Örnek* $G = \mathbb{R}^2$, $K = \{(k, l) \in G : k, l \geq 0\} \subseteq \mathbb{R}^2, M = \mathbb{R}$ ve $d: M \times M \rightarrow G$ dönüşümü $\mu \geq 0$ olmak üzere

$$d(k, l) = (|k - l|, \mu|k - l|) \tag{3.1}$$

olsun. Bu durumda (M, d) bir koni metrik uzaydır [19].

3.1.5. Tanım (M,d) bir koni metrik uzay olsun. $\{k_n\}$, M de bir dizi ve $k \in M$ olsun. Eğer $\theta_G \prec\prec g$ olacak şekildeki her $g \in G$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n > N$ olacak şekildeki her n pozitif doğal sayısı için $d(k_n, k) \prec\prec g$ oluyorsa, $\{k_n\}$ dizisi k e *yakınsar* veya $\{k_n\}$ dizisinin *limiti k dir* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} k_n = k$ veya $k_n \to k\ (n \to \infty)$ ile gösterilir [19].

3.1.2. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve bir $g \in G$, $\theta_G \prec\prec g$ olacak şekilde verilsin. Bu durumda $\|k\| < \delta$ olduğunda $g - k \in intK$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ reel sayısı vardır [19].

3.1.3. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $\{k_n\}$, M de bir dizi olsun. Bu durumda $\{k_n\}$ dizisinin k e yakınsak olması için gerek ve yeter şart $d(k_n, k) \to \theta_G\ (n \to \infty)$ olmasıdır. Yani,

$$k_n \to k \iff d(k_n, k) \to \theta_G\ (n \to \infty)\ [19].$$

3.1.4. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $\{k_n\}$, M de bir dizi olsun. Eğer $k_n \to k\ (n \to \infty)$ ve $k_n \to l\ (n \to \infty)$ ise $k = l$. Yani $\{k_n\}$ dizisinin limiti tektir [19].

3.1.6. Tanım (M,d) bir koni metrik uzay ve $\{k_n\}$, M de bir dizi olsun. Eğer $\theta_G \prec\prec g$ olacak şekilde her $g \in G$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m > N$ olacak şekildeki her n, m pozitif doğal sayıları için $d(k_n, k_m) \prec\prec g$ oluyorsa $\{k_n\}$ dizisine M içinde bir *Cauchy dizisi* denir [19].

3.1.7. Tanım (M,d) bir koni metrik uzay olsun. Eğer M içindeki her Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda (M,d) koni metrik uzayına *tam koni metrik uzay* denir [19].

3.1.5. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve $\{k_n\}$, M de bir dizi olsun. $\{k_n\}$ dizisi M içinde yakınsak bir dizi ise Cauchy dizisidir. Yani koni metrik uzaylarda yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir [19].

3.1.6. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $\{k_n\}$, M de bir dizi olsun. Bu durumda,

$$\{k_n\} \text{ bir Cauchy dizisidir} \iff d(k_n, k_m) \to \theta_G\ \ (n, m \to \infty)\ [19].$$

3.1.7. Lemma (M,d) bir koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $\{k_n\}$ ve $\{l_n\}$ M de iki dizi ve $k_n \to k$ ve $l_n \to l\ (n \to \infty)$ olsun. Bu durumda, $d(k_n, l_n) \to d(k, l)\ (n \to \infty)$ olur [19].

3.1.8. Tanım (M,d) bir koni metrik uzay olsun. M içindeki her $\{k_n\}$ dizisinin, M içinde yakınsak bir $\{k_{n_i}\}$ alt dizisi varsa da bu durumda (M,d) koni metrik uzayına, *dizisel kompakt koni metrik uzay* denir [19].

3.2. Koni Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.2.1. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $f: M \to M$ bir dönüşüm ve her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha d(k, l) \tag{3.2}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabiti olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi bir $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [19].

Bu teorem Rezapour ve Hamlbarani [28] tarafından K konisinin normalliği ihmal edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.2. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve $f: M \to M$ bir dönüşüm ve her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha d(k, l) \tag{3.3}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabiti olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve herhangi bir $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [28].

3.2.1. *Sonuç* (M, d) bir tam koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. Kabul edelim ki $f: M \to M$ dönüşümü bazı pozitif n tamsayıları ve her $k, l \in M$ için,

$$d(f^n k, f^n l) \preccurlyeq \alpha d(k, l) \tag{3.4}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [19].

Bu sonuç Rezapour ve Hamlbarani [28] tarafından K konisinin normalliği ihmal edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.2. *Sonuç* (M, d) bir tam koni metrik uzay olsun. Kabul edelim ki $f: M \to M$ dönüşümü bazı pozitif n tamsayıları ve her $k, l \in M$ için,

$$d(f^n k, f^n l) \preccurlyeq \alpha d(k, l) \tag{3.5}$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [28].

3.2.3. Teorem (M, d) bir dizisel kompakt konik metrik uzay ve K de bir regüler konik olsun. $f: M \to M$ dönüşümü $k \neq l$ olacak şekildeki her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \prec d(k, l) \tag{3.6}$$

şeklindeki zayıf büzülme şartını sağlasın. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir [19].

3.2.4. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha(d(fk, k) + d(fl, l)) \tag{3.7}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve keyfi $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [19].

Bu teorem Rezapour ve Hamlbarani [28] tarafından K konisinin normalliği ihmal edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.5. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha(d(fk, k) + d(fl, l)) \tag{3.8}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve her bir $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [28].

3.2.6. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha(d(fk, l) + d(fl, k)) \tag{3.9}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve keyfi $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [19].

Bu teorem Rezapour ve Hamlbarani [28] tarafından K konisinin normalliği ihmal edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.7. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha(d(fk, l) + d(k, fl)) \tag{3.10}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f, M içinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve her bir $k \in M$ için iterasyon dizisi $\{f^n k\}$ bu sabit noktaya yakınsar [28].

3.2.8. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve K de L normal sabiti ile bir normal koni olsun. $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha d(k, l) + \beta d(l, fk) \tag{3.11}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f dönüşümü M içinde bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\alpha + \beta < 1$ olduğunda ise f nin bu sabit noktası tektir [19].

Bu teorem Rezapour ve Hamlbarani [28] tarafından K konisinin normalliği ihmal edilerek aşağıdaki şekilde verilmiştir.

3.2.9. Teorem (M, d) bir tam koni metrik uzay ve $f: M \to M$ dönüşümü her $k, l \in M$ için,

$$d(fk, fl) \preccurlyeq \alpha d(k, l) + \beta d(l, fk) \tag{3.12}$$

şartını sağlayacak şekilde $\alpha, \beta \in [0,1)$ sabitine sahip olsun. Bu durumda f dönüşümü M içinde bir sabit noktaya sahiptir. Ayrıca $\alpha + \beta < 1$ olduğunda ise f nin bu sabit noktası tektir [28].

3.2.1. *Örnek* $G = \mathbb{R}^2$ yani Öklid düzlemi, $K = \{(k, l) \in \mathbb{R}^2 : k, l \geq 0\}$ da G de bir normal koni olsun.

$M = \{(k, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq k \leq 1\} \cup \{(0, k) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq k \leq 1\}$ olsun.

$d: M \times M \to G$ dönüşümünü;

$$d\big((k,0),(l,0)\big) = \left(\frac{4}{3}|k-l|, |k-l|\right)$$
$$d\big((0,k),(0,l)\big) = \left(|k-l|, \tfrac{2}{3}|k-l|\right) \tag{3.13}$$
$$d\big((k,0),(0,l)\big) = d\big((0,l),(k,0)\big) = \left(\frac{4}{3}k + l, k + \frac{2}{3}l\right)$$

olarak tanımlansın. Bu durumda (M, d) bir tam koni metrik uzaydır ve $f: M \to M$ dönüşümü

$$f((k,0)) = (0,k) \ \text{ ve } \ T((0,k)) = \left(\tfrac{1}{2}k, 0\right) \tag{3.14}$$

olarak tanımlandığında;

$\forall (k, k_2), (l_1, l_2) \in M$ için,

$$d(f((k_1,k_2)), f((l_1,l_2))) \preccurlyeq \alpha d\big((k_1,k_2),(l_1,l_2)\big) \tag{3.15}$$

şartını sağlayacak şekilde bir $\alpha = \frac{3}{4} \in [0,1)$ reel sayısı vardır [19].

3.3. Ortogonal Koni Metrik Uzaylar

3.3.1. Tanım $M \neq \emptyset$ ve $\perp \subseteq M \times M$ bir ikili bağıntı olsun. Eğer $\perp$ bağıntısı

$$\exists k_0 \in M; (\forall k \in M, k_0 \perp k) \vee (\forall k \in M, k \perp k_0) \tag{3.16}$$

şartını sağlarsa M kümesine *ortogonal küme (O-küme)* denir ve $(M, \perp)$ ile gösterilir. Burada k_0 elemanına *ortogonal eleman* denir [16].

3.3.1. *Örnek* $M = \mathbb{Z}$ olsun. Herhangi $k, l \in \mathbb{Z}$ için $k = al$ olacak şekilde bir $a \in \mathbb{Z}$ sayısı var ise $k \perp l$ olarak tanımlansın.

Her $l \in \mathbb{Z}$ için $0 \perp l$ olacak şekilde $0 \in \mathbb{Z}$ sayısı vardır. O halde $(M, \perp)$ bir ortogonal kümedir [16].

Sıradaki örnekte k_0 ortogonal elemanının tek olmadığını görülebilir.

3.3.2. *Örnek* $M = [0, \infty)$ olsun. $k.l \in \{k, l\}$ ise $k \perp l$ olarak tanımlansın. Bu bağıntıya göre $(M, \perp)$ bir ortogonal küme olup M in ortogonal elemanları 0 ve 1 dir [16].

3.3.2. Tanım $(M,\perp)$ bir ortogonal küme olsun. Herhangi iki $k,l\in M$ için $k\perp l$ ise bu elemanlara *ortogonal bağlantılı elemanlar* denir [16].

3.3.3. Tanım $(M,\perp)$ bir ortogonal küme olsun. M deki bir $\{k_n\}$ dizisi için,

$$(\forall n\in\mathbb{N},\ k_n\perp k_{n+1})\vee(\forall n\in\mathbb{N},k_{n+1}\perp k_n) \tag{3.17}$$

şartı sağlanıyorsa $\{k_n\}$ dizisine *ortogonal dizi (O-dizi)* denir [16].

Benzer şekilde, bir $\{k_n\}\subseteq(M,\perp)$ Cauchy dizisi için,

$$(\forall n\in\mathbb{N},k_n\perp k_{n+1})\vee(\forall n\in\mathbb{N},k_{n+1}\perp k_n) \tag{3.18}$$

şartı sağlanıyorsa $\{k_n\}$ dizisine *ortogonal Cauchy dizisi (O-Cauchy dizisi)* denir [16].

3.3.4. Tanım $(M,\perp)$ bir ortogonal küme ve d,M üzerinde bir metrik olsun. . Bu durumda $(M,\perp,d)$ ye *ortogonal metrik uzay (O-metrik uzay)* denir [16].

3.3.5. Tanım $(M,\perp)$ bir ortogonal küme ve d,M üzerinde bir koni metrik olsun. O halde $(M,\perp,d)$ ye *ortogonal koni metrik uzay (O-koni metrik uzay)* denir [18].

3.3.3. *Örnek* $G=\mathbb{R}^2,\ \ K=\{(k,l)\in G: k,l\geq 0\}\subseteq\mathbb{R}^2$ olsun.

$$d: M\times M\to G,\ \ d(k,l)=(|k-l|,\mu|k-l|) \tag{3.19}$$

dönüşümü $\mu\geq 0$ ve $\mu\in\mathbb{R}$ için tanımlansın. $M=\mathbb{Z}$ deki $\perp$ ikili bağıntısı "$k,l\ \in\mathbb{Z}$ için $k=al$ olacak şekilde $a\in\mathbb{Z}$ vardır $\Leftrightarrow$ $k\perp l$" olarak tanımlansın. Bu durumda $(M,\perp,d)$ bir ortogonal koni metrik uzaydır [18].

3.3.4. *Örnek* $q\geq 1,\ b\geq 1$ ve $q,b\in\mathbb{R}$ olmak üzere,

$G=\left\{\{k_n\}: k_n\in\mathbb{R}\ \ ve\ \sum_{n=1}^{\infty}(|k_n|)^q<\infty\right\}$ ve $K=\left\{\{k_n\}\in G: k_n\geq 0,\forall n\in\mathbb{N}\right\}$

olsun. $(M,\perp,\rho)$ dönüşümünün bir ortogonal metrik uzay olduğunu kabul edelim. O halde M üzerinde,

$$d: M\times M\to G,\ \ d(k,l)=\left(\frac{\rho}{b^n}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{3.20}$$

dönüşümü tanımlanabilir ve bu dönüşüm bir ortogonal koni metriktir. Yani $(M,\perp,d)$ bir ortogonal koni metrik uzaydır [18].

3.3.5. *Örnek* $G=(C_{\mathbb{R}}[0,\infty),\|.\|_\infty)$ ve $K=\{f\in G: f(t)\geq 0\}$ olsun. $(M,\perp,d)$ ortogonal metrik uzay ve burada $f_{k,l}(t)=\rho(k,l)$ olmak üzere, M üzerinde tanımlı

$$d: M\times M\to G,\ \ d(k,l)=f_{k,l} \tag{3.21}$$

dönüşümü ortogonal koni metriktir. O halde $(M,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzaydır. [18]

3.3.6. Tanım $(M,\perp,d)$ bir ortogonal koni metrik uzay, $\{k_n\}$, M de ortogonal bir dizi ve $k\in M$ olsun. Eğer $\theta_G\prec\prec g$ olacak şekildeki her $g\in G$ için en az bir $N\in\mathbb{N}$ var öyle ki her $n\geq N$ olacak şekildeki n pozitif doğal sayısı için $d(k_n,k)\prec\prec g$ oluyorsa $\{k_n\}$ ortogonal dizisine $k\in M$ noktasına *yakınsaktır* denir [18].

3.3.7. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay olsun. $k \in M$ olmak üzere $\{k_n\}$, M de ortogonal bir dizi olsun. Eğer $\theta_G \prec\prec g$ olacak şekildeki her $g \in G$ için en az bir $N \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq N$ olacak şekildeki n, m pozitif doğal sayıları için $d(k_n, k_m) \prec\prec g$ oluyorsa $\{k_n\}$ ortogonal dizisine M de bir *ortogonal Cauchy dizisi* denir [18].

3.3.8. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay olsun. Eğer M deki her ortogonal Cauchy dizisi yakınsak ise bu durumda $(M, \perp, d)$ koni metrik uzayına *ortogonal tam koni metrik uzay* denir [18].

3.3.1. Lemma $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay olsun. $\{k_n\}$, M de ortogonal bir dizi olsun. $\{k_n\}$ ortogonal dizisi $k \in M$ elemanına yakınsıyor ise ortogonal Cauchy dizisidir [26].

3.3.9. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay olsun. M deki her $\{k_n\}$ ortogonal dizisinin, M içinde yakınsak $\{k_{n_i}\}$ ortogonal alt dizisi varsa $(M, \perp, d)$ ortogonal koni metrik uzayına *dizisel kompakt ortogonal koni metrik uzay* denir [18].

3.3.10. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay, $0 < \gamma < 1$ ve $\gamma \in \mathbb{R}$ olsun.
$f: M \to M$ dönüşümü için,

$$k \perp l \Rightarrow d(fk, fl) \preccurlyeq \gamma d(k, l) \tag{3.22}$$

şartı sağlanıyorsa f ye γ Lipschitz sabitiyle *ortogonal büzülme (⊥-büzülme)* denir [18].

3.3.11. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay olsun. $f: M \to M$ dönüşümü için,

$$k \perp l \Rightarrow fk \perp fl \tag{3.23}$$

şartı sağlanıyorsa f ye *ortogonalliği koruyan dönüşüm (⊥-koruyan)* denir [18].

3.3.12. Tanım $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay, $(k_n) \subseteq M$ ortogonal dizi, $f: M \to M$ bir dönüşüm ve $k \in M$ olsun.

$$k_n \to k \Rightarrow fk_n \to fk \tag{3.24}$$

şartı sağlanıyorsa f ye *ortogonal sürekli dönüşüm (⊥-sürekli)* denir. Ayrıca f fonksiyonu her $k \in M$ için ortogonal sürekli bir dönüşüm ise f ye M de *ortogonal sürekli dönüşüm* denir [18].

3.4. Ortogonal Koni Metrik Uzaylarda Sabit Nokta Teoremleri

3.4.1. Teorem $(M, \perp, d)$ ortogonal tam koni metrik uzay (tam koni metrik uzay olmak zorunda değil), $\gamma \in \mathbb{R}$, $0 < \gamma < 1$ olsun. $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü γ Lipschitz sabitiyle ortogonal büzülme (⊥-büzülme) ve ortogonalliği koruyan (⊥-koruyan) bir dönüşüm olsun. Bu durumda herhangi bir ortogonal $k_0 \in M$ için, $k^* \in M$ noktası vardır ve $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi bu noktaya yakınsar. Eğer $f, k^* \in M$ de ortogonal sürekli (⊥-sürekli) ise, $k^* \in M$ noktası f nin bir tek sabit noktası vardır [18].

3.4.1. *Sonuç* $(M, \perp, d)$ ortogonal tam koni metrik uzay olsun. K, L normal sabitiyle normal koni, $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < \gamma < 1$ olsun. $\theta_G \prec\prec g$ olacak şekildeki her $g \in G$ ve $k_0 \in M$ için,

$$B(k_0, g) = \{k \in M: d(k_0, k) \leq g\} \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlansın. Her $k, l \in B(k_0, g)$ için $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü Lipschitz sabitiyle ortogonal büzülme ($\perp$-büzülme) ve $B(k_0, g)$ üzerinde ortogonalliği koruyan ($\perp$-koruyan) bir dönüşüm ve $d(fk_0, k_0) \preccurlyeq (1-\gamma)g$ olsun. Bu durumda herhangi bir ortogonal $k_0 \in M$ için, $k^* \in B(k_0, g)$ noktası vardır ve $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi bu noktaya yakınsar. Eğer $f, B(k_0, g)$ üzerinde ortogonal sürekli ($\perp$-sürekli) ise, $k^* \in B(k_0, g)$ noktası f nin bir tek sabit noktasıdır [18].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Şimdi ana sonuçlarımızı ve ispatlarını verebiliriz.

4.1. Teorem $(M, \sqsubseteq)$ bir kısmi sıralı küme, $(M, \perp, d)$ bir tam ortogonal koni metrik uzay, $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü "$\sqsubseteq$" ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Her ortogonal bağlantılı $k, l \in M$ ve $l \sqsubseteq k$ için bir $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < \gamma < 1$ iken $d(fk, fl) \preccurlyeq \gamma d(k, l)$ olduğunu varsayalım. Farz edelim ki bir $k_0 \in M$ ortogonal elemanı için $k_0 \sqsubseteq fk_0$ olduğunda $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi $k^* \in M$ noktasına yakınsak olsun. Ayrıca f dönüşümü $k^* \in M$ noktasında ortogonal sürekli ise, $k^* \in M$ noktası f nin sabit bir noktasıdır [18].

İspat. $(M, \perp)$ bir ortogonal küme olduğundan $k_0 \in M$ olacak şekilde bir ortogonal elemanı vardır. Varsayımımızdan $k_0 \sqsubseteq fk_0$ seçilmesi genelliği bozmaz. f, M de bir öz dönüşüm olduğundan $k_0 \in M$ ortogonal elemanı için $k_1 = f(k_0)$ olacak şekilde $k_1 \in M$ seçilebilir. Böylece,

$$\begin{aligned} & k_0 \perp f(k_0) \vee f(k_0) \perp k_0 \\ \Rightarrow\ & k_0 \perp k_1 \vee k_1 \perp k_0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

yazılabilir. Benzer yolla devam edersek,

$$k_1 = f(k_0), k_2 = f(k_1) = f^2(k_0), \dots, k_n = f(k_{n-1}) = f^n(k_0) \tag{4.2}$$

yazılabileceğinden $\{f^n(k_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. f ortogonalliği koruduğundan, $\{f^n(k_0)\}$ ortogonal bir dizidir.

$k_0 \sqsubseteq fk_0$ ve $\sqsubseteq$ ye göre f nin azalmayan dönüşüm olduğunu kullanırsak,

$$k_0 \sqsubseteq f(k_0) \sqsubseteq f^2(k_0) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f^n(k_0) \sqsubseteq \cdots \tag{4.3}$$

olduğunu elde ederiz.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(k_{n+1}, k_n) &= d(f(k_n), f(k_{n-1})) \\ &\preccurlyeq \gamma d(k_n, k_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \cdots \\ &\preccurlyeq \gamma^n d(k_1, k_0) \end{aligned} \tag{4.4}$$

yazabiliriz. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $k_n = k_{n+1}$ iken $k_n = f(k_{n)}$ olup f nin bir sabit noktası olduğunu elde ederiz. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için, $k_n \neq k_{n+1}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$\theta \preccurlyeq d(k_n, k_m) \preccurlyeq d(k_n, k_{n-1}) + d(k_{n-1}, k_{n-2}) + \cdots + d(k_m, k_{m+1})$$
$$\preccurlyeq \gamma^{n-1} d(k_1, k_0) + \gamma^{n-2} d(k_1, k_0) + \cdots + \gamma^m d(k_1, k_0)$$
$$\preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \tag{4.5}$$

olur.

Devamında iki durum vardır.

Durum 1: K, L sabitiyle sabitiyle normal koni ise, (4.5) eşitsizliğinden

$$\|d(k_n, k_m)\| \leq L \left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \right\|$$
$$\leq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} L \|d(k_1, k_0)\| \tag{4.6}$$

olur. Yukarıdaki denklemi kullanırsak, $0 < \gamma < 1$ olduğundan $d(k_n, k_m) \to \theta_G \ (m \to \infty)$ dir ve $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ bir ortogonal Cauchy dizisidir.

Durum 2: K normal koni değilse, $g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. Bu durumda $g \in intP$ dir. Ayrıca $N_\delta(\theta_G) = \{x \in G : \|x - \theta_G\| < \delta\}$ olduğunda $g + N_\delta(\theta_G) \subset K$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim.

$0 < \gamma < 1$ olduğundan,

$$\left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \right\| = \frac{\gamma^m}{1-\gamma} \|d(k_1, k_0)\| \to 0 \ (m \to \infty) \tag{4.7}$$

olur. δ nın seçilişinden, $\left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \right\| < \delta$ dır ve Lemma 3.1.2 yi kullanırsak,

$$g - \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \in intK \text{ yani } g - \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \prec\prec g \ (m \to \infty) \tag{4.8}$$

olur. O halde her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \geq m$ için $d(k_n, k_m) \preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \prec\prec g$ olup

$\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ bir ortogonal Cauchy dizisidir.

Her iki durumda da $(M, \perp, d)$ bir ortogonal tam metrik uzay olduğundan, $k^* \in M$ var öyle ki $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi bu noktaya yakınsar. Şimdi f nin $k^* \in M$ noktasında ortogonal sürekli olduğunu farz edelim ve $g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi $k^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve f, $k^* \in M$ de ortogonal sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda,

$$d(k_{n+1}, k^*) \prec\prec \frac{g}{2} \text{ ve } d(fk_n, fk^*) \prec\prec \frac{g}{2} \tag{4.9}$$

dir.

Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(fk^*, k^*) \preccurlyeq d(fk^*, fk_n) + d(fk_n, k^*) \prec\prec g \text{ olur.}$$

Diğer yandan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğunu elde ederiz. $g \in int\ K$ ve $\gamma int K \subseteq int K$ $(\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$ olduğunu kullanırsak, $\frac{g}{m} \in int K$ olduğu elde edilir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için $d(fk^*, k^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olduğu ele alınırsa $\frac{g}{m} - d(fk^*, k^*) \in K$ olur. K konisinin kapalılığını kullanırsak $m \to \infty$ limit durumunda $\lim_{m\to\infty} (\frac{g}{m} - d(fk^*, k^*)) = -d(fk^*, k^*) \in K$ dir. Ayrıca $\theta_G \preccurlyeq d(fk^*, k^*)$ olduğundan $d(fk^*, k^*) \in K$ olur. K nin koni olmasından $d(fk^*, k^*) = \theta_G$ olup $fk^* = k^*$ olur. Yani $k^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır.

4.1. *Uyarı* Yukarıdaki teoremde, $(M, \perp)$ bir ortogonal küme olduğundan;

$$\exists k_0 \in M; (\forall k \in M, k \perp k_0) \vee (\forall k \in M, k_0 \perp k) \tag{4.10}$$

dır. Fakat $k_0 \sqsubseteq fk_0$ durumu, M in herhangi bir ortogonal elemanı için sağlanmayabilir. Bunun için alternatif olarak sıradaki teoremi verebiliriz [18].

4.2. Teorem $(M, \sqsubseteq)$ bir kısmi sıralı küme, $(M, \perp, d)$ bir ortogonal koni metrik uzay, $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü " $\sqsubseteq$ " ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Her ortogonal bağlantılı $k, l \in M$ ve $l \sqsubseteq k$ için bir $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $0 < \gamma < 1$ iken $d(fk, fl) \preccurlyeq \gamma d(k, l)$ olduğunu varsayalım. $l_0 \in M$ için $l_0 \sqsubseteq fl_0$ olduğunu ve l_0 ile fl_0 ın ortogonal bağlantılı elemanlar olduğunu farz edelim. Bu durumda $\{f^n(l_0)\}$ iterasyon dizisi bir $l^* \in M$ noktasına yakınsaktır. Ayrıca f dönüşümü $l^* \in M$ noktasında ortogonal sürekli ise, $l^* \in M$ noktası f nin bir sabit noktasıdır [18].

İspat. Varsayımımızdan $l_0 \sqsubseteq fl_0$ olacak şekilde bir $l_0 \in M$ var ve l_0 ile fl_0 ortogonal bağlantılı elemanlar olsun. f, M de bir öz dönüşüm olduğundan $l_0 \in M$ elemanı için $l_1 = f(l_0)$ olacak şekilde $l_1 \in M$ seçilebilir. Böylece,

$$\begin{gathered} l_0 \perp f(l_0) \vee f(l_0) \perp l_0 \\ \Rightarrow l_0 \perp l_1 \vee l_1 \perp l_0 \end{gathered} \tag{4.11}$$

yazılabilir. Benzer yolla devam edersek,

$$l_1 = f(l_0), l_2 = f(l_1) = f^2(l_0), \dots, l_n = f(l_{n-1}) = f^n(l_0) \tag{4.12}$$

yazılabileceğinden $\{f^n(l_0)\}$ bir iterasyon dizisidir. f ortogonalliği koruduğundan, $\{f^n(l_0)\}$ ortogonal bir dizidir.

$l_0 \sqsubseteq fl_0$ ve $\sqsubseteq$ ye göre f nin azalmayan dönüşüm olduğunu kullanırsak,

$$l_0 \sqsubseteq f(l_0) \sqsubseteq f^2(l_0) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f^n(l_0) \sqsubseteq \cdots \tag{4.13}$$

olduğunu elde ederiz.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\begin{aligned} d(l_{n+1}, l_n) &= d(f(l_n), f(l_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \gamma d(l_n, l_{n-1}) \\ &\preccurlyeq \cdots \\ &\preccurlyeq \gamma^n d(l_1, l_0) \end{aligned} \tag{4.14}$$

yazabiliriz. Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için, $l_n = l_{n+1}$ iken $l_n = f(l_n)$ olup f nin bir sabit noktası olduğunu elde ederiz. Her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için, $l_n \neq l_{n+1}$ olduğunu farz edelim. Bu durumda, her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$\begin{aligned} \theta_G \preccurlyeq d(l_n, l_m) &\preccurlyeq d(l_n, l_{n-1}) + d(l_{n-1}, l_{n-2}) + \cdots + d(l_m, l_{m+1}) \\ &\preccurlyeq \gamma^{n-1} d(l_1, l_0) + \gamma^{n-2} d(l_1, l_0) + \cdots + \gamma^m d(l_1, l_0) \\ &\preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \end{aligned} \tag{4.15}$$

olur.

Devamında iki durum vardır.

Durum 1: K, L sabitiyle sabitiyle normal koni ise, (4.15) eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \|d(l_n, l_m)\| &\leq L \left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \right\| \\ &\leq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} K \|d(l_1, l_0)\| \end{aligned} \tag{4.16}$$

olur. Yukarıdaki denklemi kullanırsak, $0 < \gamma < 1$ olduğundan $d(l_n, l_m) \to \theta_G$ $(m \to \infty)$ ya yakınsar ve $\{l_n\} = \{f^n(l_0)\}$ bir ortogonal Cauchy dizisidir.

Durum 2: K normal koni değilse, $g \in G$ için $\theta_G \ll g$ olsun. Bu durumda $g \in intK$ dir. Ayrıca $N_\delta(\theta_G) = \{x \in G: \|x - \theta_G\| < \delta\}$ olduğunda $g + N_\delta(\theta_G) \subset K$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim.

$0 < \gamma < 1$ olduğundan,

$$\left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \right\| = \frac{\gamma^m}{1-\gamma} \|d(l_1, l_0)\| \to 0 \ (m \to \infty) \tag{4.17}$$

olur. δ nın seçilişinden, $\left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \right\| < \delta$ dır ve Lemma 3.1.2 yi kullanırsak,

$$g - \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \in intK \text{ yani } \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \ll g \ (m \to \infty) \tag{4.18}$$

olur. O halde her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n \geq m$ için $d(l_n, l_m) \preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(l_1, l_0) \ll g$ olup $\{l_n\} = \{f^n(l_0)\}$ bir ortogonal Cauchy dizisidir.

Her iki durumda da $(M,\perp,d)$ bir ortogonal tam metrik uzay olduğundan, $l^* \in M$ var öyle ki $\{l_n\} = \{f^n(l_0)\}$ dizisi bu noktaya yakınsar. Şimdi f nin $l^* \in M$ noktasında ortogonal sürekli olduğunu farz edelim ve $g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. $\{l_n\} = \{f^n(l_0)\}$ dizisi $l^* \in M$ noktasına yakınsadığından ve f, $l^* \in M$ de ortogonal sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda,

$$d(l_{n+1}, l^*) \prec\prec \frac{g}{2} \text{ ve } d(fl_n, fl^*) \prec\prec \frac{g}{2} \tag{4.19}$$

dir. Böylece,

$n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için, $d(fl^*, l^*) \preccurlyeq d(fl^*, fl_n) + d(fl_n, l^*) \prec\prec g$ olur.

Diğer yandan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğunu elde ederiz. $g \in int\, K$ ve $\gamma int K \subseteq int K$ $(\gamma \in \mathbb{R}, \gamma > 0)$ olduğunu kullanırsak, $\frac{g}{m} \in int K$ olduğu elde edilir. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için $d(fl^*, l^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olduğu ele alınırsa $\frac{g}{m} - d(fl^*, l^*) \in K$ olur. K konisinin kapalılığını kullanırsak $m \to \infty$ limit durumunda $\lim_{m\to\infty} (\frac{c}{m} - d(fl^*, l^*)) = -d(fl^*, l^*) \in K$ dir. Bunun yanında $\theta_G \leq d(fl^*, l^*)$ olduğundan $d(fl^*, l^*) \in K$ olur. K nin koni olmasından $d(fl^*, l^*) = \theta_G$ olup $fl^* = l^*$ olur. Yani $l^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır.

4.3. Teorem $(M, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı bir küme, $(M,\perp,d)$ bir ortogonal tam koni metrik uzay, $f: (M,\perp,d) \to (M,\perp,d)$ dönüşümü $" \sqsubseteq "$ ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım.

$i)$ $l \sqsubseteq k$ olacak şekildeki, ortogonal bağlantılı $k, l \in M$ için $0 < \gamma < 1$ olacak şekilde bir $\gamma \in \mathbb{R}$ var öyle ki $d(fk, fl) \preccurlyeq \lambda d(k, l)$ dir.

$ii)$ $k_0 \in M$ ortogonal elemanı var öyle ki $k_0 \sqsubseteq fk_0$ dır.

$iii)$ Artan bir $\{k_n\}$ dizisi $k \in M$ e yakınsak olduğunda her n için k_n ile k ortogonal bağlantılı ve $k_n \sqsubseteq k$ olsun.

Bu durumda $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi bir $k^* \in M$ noktasına yakınsar ve $k^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır [18].

İspat. Teorem 4.1 in ispatından bir $k^* \in M$ var öyle ki $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ bu noktaya yaknsaktır. Şimdi (iii) den $f^n(k_0) \sqsubseteq k^*$ ve $f^n(k_0)$ ile k^* her n için ortogonal bağlantılı elemanlardır. Böylece (i) den;

$$\begin{aligned} d(fk^*, k^*) &\preccurlyeq d(fk^*, f^{n+1}k_0) + d(f^{n+1}k_0, k^*) \\ &\preccurlyeq \gamma d(k^*, f^n k_0) + d(f^{n+1}k_0, k^*) \end{aligned} \tag{4.20}$$

$g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. O halde $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi k^* a yakınsadığından her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda,

$$d(k_n, k^*) \prec\prec \frac{g}{2} \text{ ve } d(k_{n+1}, k^*) \prec\prec \frac{g}{2} \tag{4.21}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(fk^*, k^*) \prec\prec g$ dir. Diğer taraftan her $m \in \mathbb{N}$ ve $m > 1$ için $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğunu elde ederiz. $\gamma \in \mathbb{R}$ ve $\gamma > 0$ için $g \in intK$ ve $\gamma intK \leq intK$ olduğunu kullanırsak, $\frac{g}{m} \in intK$ olduğunu elde ederiz. Böylece her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ ve $m \in \mathbb{N}, m \geq 1$ için $d(fk^*, k^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olup $\frac{g}{m} - d(k_n, k^*) \in K$ olduğunu elde ederiz.

P konisinin kapalı küme olmasını kullanırsak $m \to \infty$ limit durumunda,

$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{g}{m} - d(fk^*, k^*)\right) = -d(fk^*, k^*) \in K$ olduğunu elde ederiz.

Ayrıca $\theta_G \preccurlyeq d(fk^*, k^*)$ olmasından $d(fk^*, k^*) \in K$ dir. K koni olduğundan $d(fk^*, k^*) = \theta_G$ olup $fk^* = k^*$ dır. Yani $k^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır.

4.4. Teorem $(M, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı bir küme, $(M, \perp, d)$ bir ortogonal tam koni metrik uzay, $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü " $\sqsubseteq$ " ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım.

$i)$ $l \sqsubseteq k$ olacak şekildeki, ortogonal bağlantılı $k, l \in M$ için
$0 \leq a, b, c$ ve $a + 2b + 2c < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ var öyle ki

$$d(fk, fl) \preccurlyeq ad(k, l) + b[d(k, fk) + d(l, fl)] + c[d(k, fl) + d(l, fk)] \tag{4.22}$$

dır.

$ii)$ $k_0 \in M$ ortogonal elemanı var öyle ki $k_0 \sqsubseteq fk_0$ dır.

Bu durumda $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi bir $k^* \in M$ noktasına yakınsar ve f ortogonal sürekli ise $k^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır [18].

İspat. $(M, \perp)$ bir ortogonal küme olduğundan $k_0 \in M$ olacak şekilde bir ortogonal eleman vardır. Varsayımımızdan $k_0 \sqsubseteq fk_0$ seçilmesi genelliği bozmaz. f nin M de öz dönüşüm olmasından $k_0 \in M$ ortogonal elemanı için $k_1 = f(k_0)$ olacak şekilde $k_1 \in M$ seçilebilir. Buradan,

$$\begin{aligned} &k_0 \perp f(k_0) \vee fk_0 \perp k_0 \\ &\Rightarrow k_0 \perp k_1 \vee k_1 \perp k_0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Ardından benzer yolla devam edersek,

$$k_1 = f(k_0), k_0 = f(k_1) = f^2(k_0), \ldots, k_n = f(k_{n-1}) = f^n(k_0) \tag{4.24}$$

olduğundan $\{f^n(k_0)\}$ bir iterasyon dizisidir.

f ortogonalliği koruduğundan, $\{f^n(k_0)\}$ bir ortogonal dizidir.

$k_0 \sqsubseteq fk_0$ ve f nin " $\sqsubseteq$ " ile azalmayan dönüşüm olduğunu kullanırsak,

$$k_0 \sqsubseteq fk_0 \sqsubseteq f^2(k_0) \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq f^n(k_0) \sqsubseteq \cdots \tag{4.25}$$

olduğunu elde ederiz.

Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$
\begin{aligned}
d(k_{n+1}, k_n) &= d\big(f(k_n), f(k_{n-1})\big) \\
&\preccurlyeq ad(k_n, k_{n-1}) + b[d(k_n, fk_n) + d(k_{n-1}, fk_{n-1})] + c[d(k_n, fk_{n-1}) + d(k_{n-1}, fk_n)] \\
&= ad(k_n, k_{n-1}) + b[d(k_n, k_{n+1}) + d(k_{n-1}, k_n)] + c[d(k_n, k_n) + d(k_{n-1}, k_{n+1})] \\
&\preccurlyeq ad(k_n, k_{n-1}) + b[d(k_n, k_{n+1}) + d(k_{n-1}, k_n)] + c[d(k_{n-1}, k_n) + d(k_n, k_{n+1})]
\end{aligned} \tag{4.26}
$$

olur. Böylece,

$$d(k_{n+1}, k_n) \preccurlyeq \frac{a+b+c}{1-b-c} d(k_n, k_{n-1}) \tag{4.27}$$

olduğunu elde ederiz. $0 \leq a, b, c$ ve $a + 2b + 2c < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ için $\gamma = \frac{a+b+c}{1-b-c}$ seçilirse $t \in (0,1)$ ve

$$
\begin{aligned}
d(k_{n+1}, k_n) &\preccurlyeq \gamma d(k_n, k_{n-1}) \\
&\preccurlyeq \gamma^2 d(k_{n-1}, k_{n-2}) \\
&\quad \cdots \\
&\preccurlyeq \gamma^n d(k_1, k_0)
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

olur.

Herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için $k_n = k_{n+1}$ olduğunda $k_n = f(k_{n)}$ olduğunu elde ederiz. Böylece f nin bir sabit noktası vardır. Farz edelim ki her $n, n+1 \in \mathbb{N}$ için $k_n \neq k_{n+1}$ olsun.

Bu durumda her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $n > m$ için,

$$
\begin{aligned}
\theta_G \preccurlyeq d(k_n, k_m) &\preccurlyeq d(k_n, k_{n-1}) + d(k_{n-1}, k_{n-2}) + \cdots + d(k_{m+1}, k_m) \\
&\preccurlyeq \gamma^{n-1} d(k_1, k_0) + \gamma^{n-2} d(k_1, k_0) + \cdots + \gamma^m d(k_1, k_0) \\
&\preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0)
\end{aligned} \tag{4.29}
$$

olur.

Devamında iki durum vardır.

Durum 1: Eğer K, L normal sabitiyle normal koni ise (4.29) eşitsizliğinden,

$$
\begin{aligned}
\|d(k_n, k_m)\| &\leq L \left\| \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \right\| \\
&\leq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} L \|d(k_1, k_0)\|
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

olur. Yukarıdaki denklemi kullanırsak; $0 < \gamma < 1$ olduğundan $n, m \to \infty$ limit durumunda $d(k_n, k_m) \to \theta_G$ olur ve bu durumda $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi bir ortogonal Cauchy dizisi olur.

Durum 2: Eğer K normal koni değilse $g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. Bu durumda $g \in intK$ dir. Ayrıca $N_\delta(\theta_G) = \{x \in G: \|x - \theta_G\| < \delta\}$ olduğunda $g + N_\delta(\theta_G) \subset K$ olacak şekilde $\delta > 0$ seçelim. $0 < \gamma < 1$ olduğundan,

$$\left\|\frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0)\right\| = \frac{\gamma^m}{1-\gamma} \|d(k_1, k_0)\| \to 0 \ (m \to \infty) \tag{4.31}$$

olur. δ nın seçilişinden $\left\|\frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0)\right\| < \delta$ ve Lemma 3.1.2 yi kullanırsak,

$$g - \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \in intK \text{ yani } \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \prec\prec g \ \ (m \to \infty) \tag{4.32}$$

olur. O halde her $n, m \in \mathbb{N}$ için $n \geq m$ olduğunda $d(k_n, k_m) \preccurlyeq \frac{\gamma^m}{1-\gamma} d(k_1, k_0) \prec\prec g$ olup $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisinin bir ortogonal Cauchy dizisi olduğunu elde ederiz.

Her iki durumda da $(M, \perp, d)$ bir ortogonal tam koni metrik uzay olduğundan $k^* \in M$ var öyle ki $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi bu noktaya yakınsar. Şimdi f nin $k^* \in M$ de ortogonal sürekli olduğunu kabul edelim. $g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi $k^* \in M$ e yakınsadığından ve f, $k^* \in M$ de ortogonal sürekli olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ için,

$$d(k_{n+1}, k^*) \prec\prec \frac{g}{2} \text{ ve } d(fk_n, fk^*) \prec\prec \frac{g}{2} \tag{4.33}$$

olur. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$d(fk^*, k^*) \preccurlyeq d(fk^*, fk_n) + d(fk_n, k^*) \prec\prec g$$

olur. Diğer taraftan $m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için $0 < \frac{1}{m} \leq 1$ olduğunu elde ederiz.

$\gamma \in \mathbb{R}$ ve $\gamma > 0$ için $g \in intK$ ve $\gamma intK \subset intK$ olduğunu kullanırsak, $\frac{g}{m} \in intK$ olduğunu elde ederiz. Böylece $n \geq n_0$ olacak şekildeki her $n, m \in \mathbb{N}$ ve $m \geq 1$ için $d(fk^*, k^*) \prec\prec \frac{g}{m}$ olduğu göz önüne alınırsa; $\frac{g}{m} - d(fk^*, k^*) \in K$ olur. K konisinin kapalı olmasını kullanırsak $m \to \infty$ limit durumunda $\lim_{m\to\infty}\left(\frac{g}{m} - d(fk^*, k^*)\right) = -d(fk^*, k^*) \in K$ elde edilir. Bunun yanında $\theta_G \preccurlyeq d(fk^*, k^*)$ olduğundan $d(fk^*, k^*) \in K$ dir. K nin koni olmasından $d(fk^*, k^*) = \theta_G$ olup $fk^* = k^*$ olur. Yani $k^* \in M$, f nin bir sabit noktasıdır.

4.5. Teorem $(M, \sqsubseteq)$ kısmi sıralı bir küme, $(M, \perp, d)$ bir ortogonal tam koni metrik uzay, $f: (M, \perp, d) \to (M, \perp, d)$ dönüşümü " $\sqsubseteq$ " ile azalmayan ve ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olsun. Ayrıca aşağıdaki şartların geçerli olduğunu varsayalım.

$i)$ $l \sqsubseteq k$ olacak şekildeki, ortogonal bağlantılı $k, l \in M$ için $0 \leq a, b, c$ ve $a + 2b + 2c < 1$ şartını sağlayan $a, b, c \in \mathbb{R}$ var öyle ki

$$d(fk, fl) \preccurlyeq ad(k, l) + b[d(k, fk) + d(l, fl)] + c[d(k, fl) + d(l, fk)] \tag{4.34}$$

dir.

$ii)$ $k_0 \in M$ ortogonal elemanı var öyle ki $k_0 \sqsubseteq fk_0$ dır.

$iii)$ Artan bir $\{k_n\}$ dizisi $k \in M$ e yakınsarsa o halde her n için k_n ile k ortogonal bağlantılı ve $k_n \sqsubseteq k$ olsun.

Bu durumda $\{f^n(k_0)\}$ iterasyon dizisi bir $k^* \in M$ noktasına yakınsar ve $k^* \in M,\, f$ nin bir sabit noktasıdır [18].

İspat. Teorem 4.4 ün ispatından bir $k^* \in M$ var öyle ki $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ bu noktaya yakınsaktır. Şimdi (iii) den $f^n(k_0) \sqsubseteq k^*$ ve $f^n(k_0)$ ile k^* her n için ortogonal bağlantılı elemanlardır. Böylece (i) den;

$$\begin{aligned} d(fk_n, f\,k^*) &\preccurlyeq ad(k_n, k^*) + b[d(k_n, fk_n) + d(k^*, fk^*)] + c[d(k_n, fk^*) + d(k^*, fk_n)] \\ &\preccurlyeq ad(k_n, k^*) + b[d(k_n, k^*) + d(k^*, k_{n+1}) + d(k^*, k_{n+1}) + d(k_{n+1}, fk^*)] \\ &\quad + c[d(k_n, k^*) + d(k^*, k_{n+1}) + d(k_{n+1}, fk^*) + d(fk^*, k_{n+1})] \\ &= ad(k_n, k^*) + b[d(k_n, k^*) + d(k^*, k_{n+1}) + d(k^*, k_{n+1}) + d(fk_n, fk^*)] \\ &\quad + c[d(k_n, k^*) + d(k^*, k_{n+1}) + d(fk_n, fk^*) + d(fk^*, fk_n)] \end{aligned} \tag{4.35}$$

olur. Bu yüzden,

$$d(fk_n, k^*) \preccurlyeq \frac{a+b+c}{1-b-c} d(k_n, k^*) + \frac{2b+2c}{1-b-c} d(k_{n+1}, k^*) \tag{4.36}$$

olduğunu elde ederiz.

$g \in G$ için $\theta_G \prec\prec g$ olsun. O halde $\{k_n\} = \{f^n(k_0)\}$ dizisi $k^* \in M$ e yakınsadığından her $n \in \mathbb{N}$ için $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki $n \geq n_0$ olduğunda,

$$d(k_n, k^*) \prec\prec \frac{g(1-b-c)}{2(a+b+c)} \text{ ve } d(k_{n+1}, k^*) \prec\prec \frac{g(1-b-c)}{2(2b+2c)} \tag{4.37}$$

olur. Her $n \in \mathbb{N}$ için $n \geq n_0$ olduğunda $d(fk_n, k^*) \prec\prec g$ dir. Böylece her $n \to \infty$ limit durumunda $k_{n+1} \to fk^*$ olur. Limitin tekliğini kullanarak $fk^* = k^*$ olduğunu elde ederiz.

4.1. *Örnek* $G = \mathbb{R}^2$ yani Öklid düzlemi ve $K = \{(k, l) \in \mathbb{R}^2 : x, y \geq 0\}$ da G içinde bir normal koni olsun. $M = \{(k, 0) : 0 \leq k \leq 1\}$ ve M üzerinde aşağıdaki " $\sqsubseteq$ " bağıntısını, $\mathbb{R}$ üzerinde

$$(k, 0) \sqsubseteq (l, 0) \Leftrightarrow (k = l) \vee (k \leq l, \forall k, l \in [0,1]) \tag{4.38}$$

şeklinde bir kısmi sıralama bağıntısı olarak tanımlayalım. Ayrıca G üzerinde bir " $\perp$ " ikili bağıntısı,

$$(k, 0) \perp (l, 0) \Leftrightarrow kl \leq \min(k, l) \tag{4.39}$$

olarak verilsin.

Bu durumda, $(M, \perp)$ bir ortogonal kümedir.

$d: M \times M \to G$ dönüşümü,

$$d\big((k,0),(l,0)\big)=\left(\tfrac{4}{5}|k-l|,|k-l|\right) \tag{4.40}$$

olarak tanımlansın. O halde, $(M,\perp,d)$ bir ortogonal tam koni metrik uzaydır.

$f:(M,\perp,d)\to(M,\perp,d)$ dönüşümü,

$$f\big((k,0)\big)=\left(\tfrac{k+1}{2},0\right) \tag{4.41}$$

şeklinde tanımlı fonksiyon verilsin.

O halde f, M üzerinde " $\sqsubseteq$ " ile azalmayan, ortogonalliği koruyan ve ortogonal sürekli bir dönüşümdür.

Ve ortogonal bağlantılı olan $(k,0),(l,0)\in M$ elemanları için $(l,0)\sqsubseteq(k,0)$ olduğunda $d(fk,fl)\preccurlyeq\gamma_0 d(k,l)$ şartını sağlayan $0<\gamma_0<1$ olacak şekilde $\gamma_0\in\ \mathbb{R}$ reel sayısı vardır.

Ayrıca herhangi bir $(k,0)\in M$ ortogonal elemanı için $f\big((k,0)\big)=\left(\frac{k+1}{2},0\right)$ olduğundan $(k,0)\sqsubseteq f(k,0)$ dır ve $\big(f^n(k,0)\big)$ dizisi $(1{,}0)\in M$ elemanına yakınsar.

Böylece, Teorem 4.1 gereğince $(1{,}0)\in M$ noktası f dönüşümünün bir sabit noktasıdır [18].

Çözüm.

A) Öncelikle K nin bir koni olduğunu gösterelim:

$K1)$ K kapalı ve $\theta\in K$ olduğundan, $K\neq\emptyset$ dir.

$(k,l)=(1{,}0)\in K$ alınırsa $K\neq\{\theta_G\}$ dır.

$K2)$ $\alpha,\beta\in\mathbb{R},\alpha,\beta\geq 0$ ve $z=(k_1,l_1)\in K$ ve $t=(k_2,l_2)\in K$ olsun.

$$\begin{aligned}
k_1,l_1\geq 0 \text{ ve } k_2,l_2\geq 0 &\Rightarrow \alpha k_1\geq 0,\alpha l_1\geq 0,\beta l_2\geq 0,\beta l_2\geq 0\\
&\Rightarrow \alpha k_1+\beta k_2\geq 0 \ \text{ ve }\ \alpha l_1+\beta l_2\geq 0\\
&\Rightarrow \alpha z+\beta t=\alpha(k_1,l_1)+\beta(k_2,l_2)\\
&\Rightarrow (\alpha k_1+\beta k_2,\alpha l_1+\beta l_2)\in K \quad \text{dır.}
\end{aligned}$$

$K3)$ $z=(k,l)\in K$ ve $-z=(-k,-l)\in K$ olsun.

Bu durumda,

$$\begin{aligned}
k,l\geq 0 \text{ ve } -k,-l\geq 0 &\Rightarrow k\geq 0,-k\geq 0,l\geq 0,-l\geq 0\\
&\Rightarrow k=0 \text{ ve } l=0\\
&\Rightarrow z=(k,l)=(0{,}0)\in K
\end{aligned}$$

olup K, G de bir konidir.

B) d nin M üzerinde bir koni metrik olduğunu gösterelim:

(m_1) $\forall k^*=(k,0),l^*=(l,0)\in M$ için $\theta_G\preccurlyeq d(k^*,l^*)$ ve $d(k^*,l^*)=\theta_G\Leftrightarrow k^*=l^*$ olur.

(m_2) $\forall k^*,l^*\in M$ için $d(k^*,l^*)=d(l^*,k^*)$ olur.

(m_3) $\forall k^*, l^*, t^* \in M$ için;

$$k^* = (k,0),\ l^* = (l,0) \Rightarrow d(k^*,l^*) = \left(\frac{4}{5}|k-l|, |k-l|\right) \quad (4.42)$$

$t^* = (t,0) \ \in M$ iken,

$$d(k^*,t^*) = \left(\frac{4}{5}|k-t|, |k-t|\right)$$

$$d(t^*,l^*) = \left(\frac{4}{5}|t-l|, |t-l|\right)$$

olup

$$d(k^*,t^*) + d(t^*,l^*) = \left(\frac{4}{5}(|k-t| + |t-l|), |k-t| + |t-l|\right) \quad (4.43)$$

bulunur. (4.42) ve (4.43) den;

$$d(k^*,l^*) \preccurlyeq d(k^*,t^*) + d(t^*,l^*).$$

O halde d, M üzerinde bir koni metrik olup, (M,d) koni metrik uzaydır.

C) $(M,\perp)$ in ortogonal küme olduğunu, yani

$$\exists\ k_0^* = (k_0,0) \in M, (\forall\ l^* = (l,0) \in M, k_0^* \perp l^*)\ \vee\ (\forall\ l^* = (l,0) \in M, l^* \perp k_0^*)$$

olduğunu gösterelim:

$$k_0 l \leq k_0\ \wedge\ k_0 l \leq l$$

$$k_0(1-l) \geq 0\ \wedge\ l(1-k_0) \geq 0 \quad (4.44)$$

O halde $0 \leq k_0 \leq 1$ olacak şekildeki her $(k_0,0) \in M$ elemanı bir ortogonal elemandır. Böylece $(M,\perp)$ bir ortogonal küme olup, $(M,\perp,d)$ ortogonal koni metrik uzaydır.

D) $(M,\perp,d)$ nin tam ortogonal koni metrik uzay olduğunu yani

her $(k_n^*) \subseteq M$ ortogonal Cauchy dizisinin yakınsak olduğunu gösterelim:

(k_n^*) ortogonal Cauchy dizisi ise, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$k_n^* \perp k_{n+1}^* \quad \vee \quad k_{n+1}^* \perp k_n^* \quad (4.45)$$

dir. $k_n \in [0,1]$ olup $(k_n^*) = \big((k_n,0)\big)$ formundadır. O halde

$$k_n . k_{n+1} \leq k_n\ \wedge\ k_{n+1} . k_n \leq k_{n+1} \quad (4.46)$$

olduğundan $\big((k_n,0)\big)$ ortogonal bir dizidir.

(k_n^*) ortogonal dizisi Cauchy dizisi iken her $g = (g_1,g_2) \in intK$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n,m \in \mathbb{N}$ için $n,m \geq n_0$ olduğunda,

$d\big((k_n,0),(k_m,0)\big) \prec\prec g$ olup $\left(\frac{4}{5}|k_n - k_m|, |k_n - k_m| \prec\prec g\right)$ dir.

$(k_n) \subseteq (\mathbb{R}, |\,.\,|)$ bir Cauchy dizisi ve $(\mathbb{R}, |\,.\,|)$ tam uzay olduğundan $k \in \mathbb{R}$ var öyle ki $k_n \to k$ dir.

Böylece her $g = (g_1, g_2) \in intK$ için $d\big((k_n, 0), (k, 0)\big) = \left(\frac{4}{5}|k_n - k|, |k_n - k|\right) \prec\prec g$ dir.

Sonuç olarak, $(M, \perp, d)$ tam ortogonal koni metrik uzaydır.

E) f dönüşümünün ortogonalliği koruyan bir dönüşüm olduğunu gösterelim:

$(k, 0) \perp (l, 0) \Rightarrow f\big((k, 0)\big) \perp f\big((l, 0)\big)$ midir?

$(k, 0) \perp (l, 0) \Rightarrow kl \leq k \;\wedge\; kl \leq l$ olup $0 \leq k, l \leq 1$ olduğundan,

$k(1 - l) \geq 0 \;\wedge\; l(1 - k) \geq 0$ dır.

$$f\big((k, 0)\big) \perp f\big((l, 0)\big) = \left(\frac{k+1}{2}, 0\right) \perp \left(\frac{l+1}{2}, 0\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{k+1}{2}\right).\left(\frac{l+1}{2}\right) \leq \left(\frac{k+1}{2}\right) \;\wedge\; \left(\frac{k+1}{2}\right).\left(\frac{l+1}{2}\right) \leq \left(\frac{l+1}{2}\right)$$

olup $0 \leq k, l \leq 1$ olduğundan

$$\left(\frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1-l}{2}\right) \geq 0 \;\wedge\; \left(\frac{l+1}{2}\right)\left(\frac{1-k}{2}\right) \geq 0$$

dır. Sonuç olarak, f dönüşümü ortogonalliği koruyan bir dönüşümdür.

F) f dönüşümünün azalmayan bir dönüşüm olduğunu yani

$(k, 0) \sqsubseteq (l, 0) \Rightarrow f\big((k, 0)\big) \sqsubseteq f\big((l, 0)\big)$ olduğunu gösterelim:

$(k, 0) \sqsubseteq (l, 0) \Leftrightarrow (k = l) \;\vee\; (k \leq l, \forall k, l \in [0,1]\,)$ olduğundan;

$k = l$ ise $f\big((k, 0)\big) \sqsubseteq f\big((l, 0)\big)$ olduğu açıktır.

Her $k, l \in [0,1]$ için $k \leq l$ ise $\frac{k+1}{2} \leq \frac{l+1}{2}$ olup $f\big((k, 0)\big) \sqsubseteq f\big((l, 0)\big)$ elde edilir.

Sonuç olarak, f dönüşümü azalmayan bir dönüşümdür.

G) f dönüşümünün ortogonal sürekli bir dönüşüm olduğunu yani

(k_n^*) ortogonal bir dizi ve $k_n^* \to k^*$ ise $f(k_n^*) \to f(k^*)$ olduğunu gösterelim:

$(k_n^*) = \big((k_n, 0)\big)$ formunda olup ortogonal iken, $k_n.k_{n+1} \leq k_n \;\wedge\; k_{n+1}.k_n \leq k_{n+1}$ olduğundan $(k_n, 0) \to (k, 0)$ olacak şekilde $(k, 0) \in M$ vardır. Yani

$$d\big((k_n, 0), (k, 0)\big) = \left(\frac{4}{5}|k_n - k|, |k_n - k|\right) \prec\prec g \tag{4.47}$$

dir. Buradan,

$$d\left(f\big((k_n, 0)\big), f\big((k, 0)\big)\right) = d\left(\left(\frac{k_n+1}{2}, 0\right), \left(\frac{k+1}{2}\right)\right)$$

$$= \left(\frac{4}{5}\left|\frac{k_n - k}{2}\right|, \left|\frac{k_n - k}{2}\right|\right) \prec\prec g$$

elde edilir.

Sonuç olarak, f dönüşümü ortogonal sürekli bir dönüşümdür.

H) f dönüşümü için $(l,0) \sqsubseteq (k,0)$ ve $\big((l,0) \perp (k,0) \;\; \vee \;\; (k,0) \perp (l,0)\big)$ iken $d\big(f(k,0), f(l,0)\big) \preccurlyeq \gamma_0 d\big((k,0),(l,0)\big)$ olacak şekilde $\gamma_0 \in (0,1)$ olduğunu gösterelim:

$$d\big(f(k,0), f(l,0)\big) \preccurlyeq \gamma_0 d\big((k,0),(l,0)\big) \tag{4.48}$$

$$\left(\frac{4}{5}\left|\frac{k - l}{2}\right|, \left|\frac{k - l}{2}\right|\right) \preccurlyeq \gamma_0 \left(\frac{4}{5}|k - l|, |k - l|\right)$$

Bu durumu $\gamma_0 - \frac{1}{2} \geq 0 \Rightarrow \gamma_0 \geq \frac{1}{2}$ olacak şekildeki her γ_0 reel sayısı sağlar.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Çalışmamızın ilk bölümünde, kapsamlı bir literatür taraması sonucu, sabit nokta teori çalışmalarının başlangıcından itibaren uygun büzülme şartlarını sağlayan dönüşümler için o sabit noktaların varlığının bulunması süreciyle ilgili gelişmelere değinilmiş, ardından da bu çalışmanın genel konusu vurgulanmıştır. İkinci ve üçüncü bölümlerde, dördüncü bölümde verilecek olan ana teoremlerin anlaşılmasını sağlamak için gerekli temel tanımlar, örnekler, lemmalar ve teoremler referanslarıyla verilmiştir. Dördüncü bölümde ise sıralı ortogonal koni metrik uzaylar üzerinde tanımlı öz dönüşümlerin öncelikle ortogonal sürekli iken farklı büzülme koşulları altında sabit noktalarının varlığı incelenmiştir. Ardından da ortogonal sürekli olmaması halinde hangi koşul altında sabit noktaya sahip olabileceği ifade ve ispat edilmiştir. Ayrıca bu teoremleri bütün detayları ile açıklayan bir örnek verilmiştir. Bu çalışmanın sonucunda koni metrik uzaylarda yapılan çalışmalar, bu çalışmadan esinlenerek sıralı ortogonal koni metrik uzaylara genelleştirilebilir.

KAYNAKLAR

1. Abbas, M. and Jungck, G. (2008). Common Fixed Point Results for Noncommuting Mappings Without Continuity in Cone Metric Spaces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *341*(1), 416-420.

2. Banach, S. (1922). Sur Les Opérations Dans Les Ensembles Abstraits et Leur Application Aux Equations İntégrales. *Fundamental Mathematics*, *3*(1), 133-181.

3. Bilgili, N. (2010). *Konik Metrik Uzaylarda Büzülme Dönüşümü Prensibi ve Sabit Nokta Teoremleri*. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

4. Bilgili Gungor, N. *(İn review).* Orthogonal Cone Metric Spaces and Fixed Points of Orthogonal Contractions. *Sahand Communications in Mathematical Analysis.*

5. Birkhoff, G. D., & Kellogg, O. D. (1922). Invariant Points in Function Space. *Transactions of the American Mathematical Society*, *23*(1), 96-115.

6. Browder, F. E. (1965). Nonexpansive Nonlinear Operators in a Banach Space. *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*, *54*(4), 1041-1044.

7. Browder, F. (1966). Topological Methods for Non-linear Elliptic Equations of Arbitrary Order. *Pacific Journal of Mathematics*, *17*(1), 17-31.

8. Caccioppoli, R. (1930). Un Teorema Generale Sull'esistenza di Elementi Uniti in Una Trasformazione Funzionale. *Rendiconti Accademia Nazionale dei Lincei*, *11,* 794-799.

9. Chu, S. C. and Diaz, J. B. (1965). Remarks on a Generalization of Banach's Principle of Contraction Mappings. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *11*, 440-446.

10. Davis, A. S. (1963). Fixpoint Theorem for Contractions of a Well-Chained Topological Space. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *14*(6), 981-985.

11. Diaz, J. B. and Margolis, B. (1968). A Fixed Point Theorem of the Alternative, for Contractions on a Generalized Complete Metric Space. *Bulletin of the American Mathematical Society*, *74*(2), 305-309.

12. Edelstein, M. (1961). An Extension of Banach's Contraction Principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *12*(1), 7-10.

13. Edelstein, M. (1964, July). On Non-Expansive Mappings of Banach Spaces. In *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, *60*(3),439-447. Cambridge University Press.

14. Edelstein, M. and Thompson, A. C. (1967, January). Contractions, İsometries and Some Properties of İnner-Product Spaces. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Series A*, *70*, 326-332.

15. Eshaghi Gordji, M. and Habibi, H. (2017) Fixed Point Theory in Generalized Orthogonal Metric Space. *Journal of Linear and Topological Algebra (JLTA)*, *6*(3), 251-260.

16. Gordji, M. E., Ramezani, M., De La Sen, M. and Cho, Y. J. (2017). On Orthogonal Sets and Banach Fixed Point Theorem. *Fixed Point Theory*, *18*(2), 569-578.

17. Göhde, D. (1965). Zum Prinzip der Kontraktiven Abbildung. *Mathematische Nachrichten*, *30*(3-4), 251-258.

18. Gungor, N. B. and Surmelioglu, M. (2020). Some Fixed Point Theorems for Contractive Mappings on Ordered Orthogonal Cone Metric Spaces. *Journal of Universal Mathematics*, *3*(1), 83-93.

19. Huang, L. G. and Zhang, X. (2007). Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings. *Journal of mathematical Analysis and Applications*, *332*(2), 1468-1476.

20. Kammerer, W. J. and Kasriel, R. H. (1964). On Contractive Mappings in Uniform Spaces. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *15*(2), 288-290.

21. Luxemburg, W. A. J. (1958). On the Convergence of Successive Approximations in the Theory of Ordinary Differential Equations. *Canadian Mathematical Bulletin*, *1*(1), 9-20.

22. Margolis, B. (1968). On Some Fixed Points Theorems in Generalized Complete Metric Spaces. *Bulletin of the American Mathematical Society, 74*(2), 275-282.

23. Monna, A. F. (1961, January). Sur un Theoreme de M. Luxemburg Concernant Les Points Fixes d’une Classe d’applications d’un Espace Metrique Dans Lui Meme. In *Indagationes Mathematicae Proceedings*, *64*, 89-96.

24. Naimpally, S. A. (1965). Contractive Mappings in Uniform Spaces. *Proceedings of the Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Series*, *68*, 477-481.

25. Norris, C. W. (1969). *Fixed and Periodic Points Under Contraction Mappings in Metric Spaces*. Unpublished Masters Thesis, Memorial University of Newfoundland, Newfoundland and Labrador.

26. Rakotch, E. (1962). A Note on Contractive Mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, *13*(3), 459-465.

27. Ran, A. C. and Reurings, M. C. (2004). A Fixed Point Theorem in Partially Ordered Sets and Some Applications to Matrix Equations. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 1435-1443.

28. Rezapour, S. and Hamlbarani, R. (2008). Some notes on the paper "Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems of Contractive Mappings". *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *345*(2), 719-724.

29. Russell, W. C. (1970). *Fixed Point Theorems in Uniform Spaces*. Unpublished Masters Thesis, Memorial University of Newfoundland, Newfoundland and Labrador.

30. Turkoglu, D. and Abuloha, M. (2010). Cone Metric Spaces and Fixed Point Theorems in Diametrically Contractive Mappings. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, *26*(3), 489-496.

31. Wong, J. S. (1968). Two Extensions of the Banach Contraction Mapping Principle. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, *22*(2), 438-443.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Mehmet SÜRMELİOĞLU
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum Tarihi ve Yeri	:
Medeni Hali	:
Yabancı Dili	: İngilizce
E-posta	:

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Anadolu Üniversitesi / Sosyoloji	2019
Yüksek Lisans (Tezsiz)	Çukurova Üniversitesi / Orta Öğretim Matematik Öğretmenliği	2007
Lisans	Harran Üniversitesi / Matematik	2006
Lise	İskenderun Lisesi (Y.D.A.)	2001

Çalıştığı Yer	**Görevi**
	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Gungor, N. B. and Surmelıoglu, M. (2020). Some Fixed Point Theorems for Contractive Mappings on Ordered Orthogonal Cone Metric Spaces. *Journal of Universal Mathematics*, *3*(1), 83-93.

2. Surmelıoglu, M. and Gungor, N. B. (2019). Ortogonal Koni Metrik Uzaylarda Bazı Ortak Sabit Nokta Teoremleri. *SETSCI Conference Proceedings*, *4*(1), 326-332.