T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YEREL ARTİN TÜMLENMİŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

YAVUZ ŞAHİN

HAZİRAN

YEREL ARTİN TÜMLENMİŞ MODÜLLER

Yavuz ŞAHİN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HAZİRAN 2021

Yüksek Lisans Tezi kabul ve onay sayfası

Yavuz ŞAHİN tarafından hazırlanan "Yerel Artin Tümlenmiş Modüller" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ/OY ÇOKLUĞU ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum … …………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Figen ERYILMAZ

Matematik Anabilim Dalı, Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Üye : Dr. Öğr. Üyesi Hasan Hüseyin ÖKTEN

Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi

Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum/onaylamıyorum ……………………

Tez Savunma Tarihi: 21/05/2021

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

……………………………

Doç. Dr. Ümit YILDIRIM

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

…...................

Yavuz ŞAHİN

.../.../2021

YEREL ARTİN TÜMLENMİŞ MODÜLLER

(Yüksek Lisans Tezi)

Yavuz ŞAHİN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Haziran 2021

ÖZET

Bu tez çalışmasında, sırasıyla güçlü yerel ve ss-tümlenmiş modüllerin öz olarak genellemeleri olan RLA yerel ve yerel Artin tümlenmiş modül kavramları tanımlandı. Bu modüllerin temel özelliklerini vererek sol mükemmel halkalar üzerinde karakterizasyonu elde edildi.

Sayfa Adedi : 64

Anahtar Kelimeler : yerel Artin modül, tümlenmiş alt modül, sol mükemmel halka

Danışman : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

LOCALLY ARTINIAN SUPPLEMENTED MODULES

(M. Sc. Thesis)

Yavuz ŞAHİN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

June 2021

ABSTRACT

In this paper, it is introduced the concept of RLA local and locally Artinian supplemented modules as a proper generalization of strongly local and ss-supplemented modules respectively. It is obtained that the various properties of these modules and we also give characterization of these modules over left perfect ring.

PageNumber : 64
KeyWords : locally Artinian modules, supplement submodule, left perfect ring
Supervisor : Prof. Dr. Burcu NİŞANCI TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana veren, tecrübe ve bilgileriyle beni yönlendiren, çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen bana zaman ayırarak ilgisini ve yardımını esirgemeden değerli katkı ve önerileriyle tezimi yöneten tez danışmanım Prof. Dr. Burcu Nişancı Türkmen' e teşekkürü bir borç bilirim. Bu süreçte bana zaman ayıran, çalışmalarım sırasında yardımlarını esirgemeyen, deneyimleri ve kütüphanesinden yararlandığım, kapısı hep açık olan sayın hocam Prof. Dr. Ergül Türkmen' e çok teşekkür ederim. Ayrıca emek isteyen bu çalışmayı hazırlarken değerli zamanlarını ve engin bilgilerini benimle paylaşan teze önemli katkılarda bulunarak bana yardım eden sayın hocam Dr. Öğr. Üyesi Figen Eryılmaz' a çok teşekkür ederim. Son olarak en zor anlarımda karşılıksız destekleriyle her zaman yanımda olan, beni her durumda destekleyen eşim, annem, babam ve kardeşlerime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında kullanmış olduğumuz simgeler, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	**Açıklama**
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\subseteq$	alt küme
$\subset$	öz alt küme
$\cap$	kümelerde kesişim işlemi
0_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,+)$ abel grubunun birimi
1_R	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,\cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$J = Rad(R)$	R Halkasının Jacobson Radikali
$\leq$	alt modül
$<$	öz alt modül
M/N	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	küçük alt modül
$M \cong N$	izomorf modüller
$\prod_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin toplamı
$\bigoplus_{i\in I} N_i$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle X \rangle$	X kümesi tarafından üretilen modül
Rm	m elemanı tarafından üretilen devirli modül

Kısaltmalar	**Açıklama**
$Rad(M)$	M modülünün radikali
$Des(M)$	M modülünün desteği
$P(M)$	M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı
$Gör(f)$	Bir f homomorfizmasının görüntü kümesi
$Çek(f)$	Bir f homomorfizmasının çekirdeği
$End(M)$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$Des_s(M)$	M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı

1.GİRİŞ

Helmut Zöschinger 1970'li yıllarda tümleyen alt modül ve tümlenmiş modül kavramının temelini oluşturmuştur. Yine o yıllarda bu konu ile ilgili yoğun araştırmalar yapılmıştır. Varadarajan 1979 yılında yayınladığı bir makalesinde tümleyen alt modüllerin özelliklerini çalışmıştır. Rafail Alizade, Gökhan Bilhan ve Patrick F.Smith' in 2001 yılında yayınladıkları 'Modules Whose Maximal Submodules Have Supplements' adlı makalede eş sonlu tümlenmiş modülleri tanımlamışlar ve bu modüllerle ilgili bazı temel özellikleri vermişlerdir. Ayrıca eş sonlu tümlenmiş modüllerin yapısını Dedekind bölgesi üzerinde belirlemişlerdir. Engin Kaynar, Hamza Çalışıcı ve Ergül Türkmen 2020 yılında yayınladıkları 'ss-supplemented Modules' adlı makalelerinde, ss-tümlenmiş modülleri tümlenmiş modülleri kuvvetlendirerek çalışmışlar ve temel özelliklerine yer vermişlerdir.

M bir modül ve $U \leq M$ alt modül olmak üzere $V \leq M$ alt modülü $M = V + U$ koşulunu sağlayan minimal alt modül ise, V alt modülüne U nun tümleyeni ve U ya da M de V tümleyenine sahiptir denir. Bu tanıma denk olarak; K nın M de N nin tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = V + U,\ V \cap U \ll V$ olmasıdır. M modülünün her alt modülü M de bir tümleyene sahipse, M ye tümlenmiş modül denir. M modülünün tüm basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(M) = \sum\{N \ll M | N, M\ nin\ \ basit\ alt\ modülü\}$ olarak tanımlanır. M modülü $Rad(M) \subseteq Des(M)$ koşulunu sağlayan yerel modül olsun. Bu takdirde, M modülüne güçlü yerel modül denir. R halkası sol R-modül olarak güçlü yerel modül ise, R halkasına sol güçlü yerel halka denir. M modülü yerel ve $Rad(M)$, M nin yerel Artin alt modülü ise M modülüne RLA yerel modül denir. R halkası sol R-modül olarak RLA yerel modül ise R ye sol RLA yerel halka denir. Herhangi bir M modülü için $Des_s(M) = Rad(M) \cap Des(M)$ dir. M modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Des_s(V)$ ise V ye U nun ss-tümleyeni denir.

Bu tezde, RLA yerel ve yerel Artin tümlenmiş modüller sırasıyla güçlü yerel ve ss-tümlenmiş modüllerin birer öz genellemesi olarak tanımlandı ve bu modüllerin bazı temel özellikleri verilerek (bol) yerel Artin tümlenmiş modüller sol mükemmel halkalar üzerinde karakterize edildi.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde çalışmamızda kullanacağımız temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R, +, .)$ cebirsel yapısına **halka** denir.

(i) $(R, +)$ abel gruptur,

(ii) . işleminin birleşme özelliği vardır, yani $\forall\, a, b, c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir,

(iii) . işleminin + üzerine soldan ve sağdan dağılma özelliği adı verilen $\forall\, a, b, c \in R$ için $a(b + c) = ab + ac$ ve $(a + b)c = ac + bc$ eşitlikleri sağlanır [6].

2.1.2. Tanım R halka olsun. Her $a, b \in R$ için $ab = ba$ eşitliği sağlanıyorsa R ye **değişmeli halka**, her $a \in R$ için $1_R a = a 1_R = a$ olacak şekilde $1_R \in R$ elemanı varsa R ye **birimli halka** denir [6].

$\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ değişmeli halkalardır ve $n > 1$ olmak üzere $M_n(\mathbb{Z})$ değişmeli olmayan halkalardır [6].

Bu çalışmamızda bütün halkalar birimli halka olarak alınacaktır.

2.1.3. Tanım R halka ve $0 \neq a \in R$ olsun. $ab = 0$ $(ba = 0)$ olacak şekilde R sıfırdan farklı bir $b \in R$ varsa $a \in R$ elemanına **sol (sağ) sıfır bölen eleman**, aksi taktirde **sol (sağ) sıfır bölen olmayan eleman** denir. Halkanın sıfır elemanı ne sıfır bölen elemanıdır ne de sıfır bölen olmayan elemanıdır. R halkası sol (sağ) sıfır bölen eleman içermiyorsa R halkasına **sol (sağ) sıfır bölensiz halka** denir. Sol ve sağ sıfır bölensiz halkaya **sıfır bölensiz halka** denir [6].

Örneğin; $p \in \mathbb{P}$ asal tamsayı için $\mathbb{Z}_p$ p moduna göre kalan sınıf halkasında sıfır bölen eleman yoktur, yani $\mathbb{Z}_p$ sıfır bölensiz halkadır. Böylece $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \ldots$ halkaları sıfır bölensiz halkalara birer örnektir [6].

Birimli, değişmeli ve sıfır bölensiz halkaya **değişmeli bölge** denir [6].

Örneğin; $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkası bir değişmeli bölgedir. Ayrıca $p \in \mathbb{P}$ asal tamsayısı için $\mathbb{Z}_p$ bir değişmeli bölgedir. Böylece $\mathbb{Z}_2, \mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_5, \dots$ sıfır bölensiz halkaları birer değişmeli bölgedir.

2.1.4. Tanım R birimli halka ve $a \in R$ olsun. $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ varsa a elemanına **birim (terslenebilir)**, b elemanına ise a elemanının **tersi** denir [6].

2.1.5. Tanım Birimli R halkasının sıfırdan farklı her elemanı birim ise R halkasına **bölme halkası** denir [6].

2.1.6. Tanım R bir halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, R halkasının bir alt grubu ve her $x, y \in I$ için $xy \in I$ ise, I ya R halkasının **alt halkası** ve her $r \in R$ ve her $x \in I$ için $rx \in I$ $(xr \in I)$ ise, I ya R halkasının **sol (sağ) ideali** denir. I, R halkasının hem sağ ve hem sol ideali ise, I ya R halkasının **ideali** denir [6].

Her sağ (sol) ideal bir alt halkadır ancak tersinin doğruluğundan her zaman bahsedilemez. Örneğin; $I = \left\{ \begin{pmatrix} m & q \\ 0 & q' \end{pmatrix} \mid m \in \mathbb{Z} ;\ q, q' \in \mathbb{Q} \right\}$ kümesi $M_2(\mathbb{Z})$ matris halkasının alt halkası olmasına rağmen sol (sağ) ideali değildir [11].

0 ve R ideallerine R halkasının **aşikar idealleri** denir. R halkasının kendisi dışındaki tüm ideallerine **öz ideal** denir [6].

Örneğin; $p \in \mathbb{P}$ asal tamsayısı için $\mathbb{Z}_p$ p moduna göre kalan sınıf halkası bir cisim olup aşikar ideallerinden başka ideali mevcut değil iken $n = 4$ için $\mathbb{Z}_n$ halkasının $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$ ideali $\mathbb{Z}_n$ ün bir öz idealidir.

2.1.7. Tanım R birim elemanlı ve değişmeli bir halka ve I, R halkasının bir ideali olsun. I ideali bir tek $a \in R$ elemanı tarafından üretiliyorsa, I idealine **esas ideal** denir. Burada $I = Ra = \{ra \mid a \in R\} = \{ar \mid a \in R\} = aR$ şeklinde ifade edilir ve ${}_l\langle a \rangle = Ra$ sol esas ideal $\langle a \rangle_r = aR$ sağ esas ideale eşittir. Yani $Ra = aR = \langle a \rangle$ dir. R nin her ideali esas ideal ise, R halkasına **esas ideal halkası** denir. Esas ideal halkası olan değişmeli bölgeye **esas ideal bölgesi** denir [6].

2.1.8. Tanım R değişmeli halka ve P, R halkasının bir ideali olsun. $x, y \in R$ olmak üzere $xy \in P$ iken $x \in P$ veya $y \in P$ oluyorsa, P ye R halkasının **asal ideali** denir [6].

Örneğin; $\mathbb{Z}$ tamsayılar halkasında $3\mathbb{Z}$ esas idealini göz önüne alalım. $xy \in 3\mathbb{Z}$ olacak şekilde her $x, y \in \mathbb{Z}$ için $xy = 3k$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}$ vardır. Böylece $3|xy$ olup Euclid Teoreminden $3|x$ veya $3|y$ dir. Buradan $x \in 3\mathbb{Z}$ veya $y \in 3\mathbb{Z}$ dir. Dolayısıyla $3\mathbb{Z}$ esas ideali $\mathbb{Z}$ nin bir asal idealidir.

2.1.9. Tanım I, R halkasının kendisinden farklı sol ideali olsun. R halkasında I yı kapsayan R den başka bir sol ideal yoksa, I ya R halkasının **maksimal sol ideali** denir. Birimli ve değişmeli bir halkada her maksimal ideal asal idealdir [6].

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım R halka ve $(M, +)$ abel grup olsun. Her $r \in R$ ve her $m \in M$ elemanları için $(r, m) \longmapsto \bullet\,(r, m) = rm$ ile tanımlı $\bullet : R \times M \longrightarrow M$ dış işlemi

(i) $\forall r \in R$ ve $\forall m, n \in M$ için $r(m + n) = rm + rn$;

(i) $\forall r, s \in R$ ve $\forall m \in M$ için $(r + s)m = rm + sm$;

(ii) $\forall r, s \in R$ ve $\forall m \in M$ için $(rs)m = r(sm)$

eşitliklerini sağlıyorsa M Abel grubuna $\bullet$ dış işlemine göre **sol *R*-modül** veya kısaca ***R*-modül** denir. R birimi 1_R olan bir halka olmak üzere $m \in M$ keyfi elemanı için $1_R m = m$ ise M modülüne **üniter *R*-modül** denir [6].

G abel grup olmak üzere, G bir üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$ -modüldür. Her R halkası kendi üzerinde üniter sol R-modüldür ve ${}_{R}R$ ile gösterilir. Burada $R = \mathbb{Z}_n$ alınırsa, $\mathbb{Z}_n$ sol $\mathbb{Z}_n$- modüldür. V bir K cismi üzerinde vektör uzayı ise V_K üniter (sol,sağ) K-modüldür.

Bu çalışmada bütün modüller üniter modül olarak alınacaktır.

Zorn Lemması: X kısmen sıralı kümesinin her zincirinin bir üst sınıra sahip olma durumunda X en azından bir maksimal eleman içerir [6].

2.2.2. Tanım M R-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ olsun. Eğer N, M modülünün bir alt grubu ve her $m \in N$, her $r \in R$ için $rm \in N$ oluyorsa N alt kümesine M modülünün bir **alt modülü** denir ve $N \leq M$ yazılışı ile gösterilir [6].
Bu tanıma göre 0 ve M, M modülünün alt modülleridir. M modülünün bu alt modüllerine **aşikar alt modül** denir. M modülünün kendisinden farklı alt modüllerine **öz alt modül** denir [6].

2.2.3. Tanım N, M modülünün M den farklı bir alt modülü olsun. M nin N yi kapsayan M ve N den farklı alt modülü yoksa N ye M nin **maksimal alt modülü** denir [6].

2.2.4. Teorem M modülünün bir takım alt modüllerinin arakesiti M modülünün bir alt modülüdür [6].

2.2.5. Tanım M modül ve $X \subseteq M$ olsun. M modülünün X i kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine M modülünün X **alt kümesi tarafından üretilen alt modülü** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X kümesine de $\langle X \rangle$ alt modülünün **üreteç kümesi** denir. Eğer X sonlu küme ise, $\langle X \rangle$ alt modülüne **sonlu üretilmiş alt modül**, $X = \{m\}$ şeklinde tek elemana sahipse $\langle X \rangle = \langle m \rangle$ alt modülüne **devirli alt modül** denir. Eğer $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde M nin bir X sonlu alt kümesi varsa M ye s**onlu üretilmiş modül** ve özel olarak $M = \langle m \rangle$ olacak şekilde bir $m \in M$ varsa M ye **m elemanı tarafından üretilen devirli modül** denir [6].

2.2.6. Sonuç M bir R-modül ve $a \in M$ olmak üzere $\langle a \rangle = Ra = \{ra \mid r \in R\}$ dir [14].

2.2.7. Tanım R bir değişmeli bölge ve M R-modül olmak üzere R nin sıfırdan farklı en az bir $r \in R$ elemanı için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanına, M nin **burulma elemanı** denir. M modülünün tüm burulma elemanlarının kümesi ile gösterilen
$T(M) = \{m \in M : 0 \neq r \in R \; için \; rm = 0\}$ kümesine M modülünün **burulmalı alt modülü** denir. Eğer $T(M) = M$ ise M ye **burulmalı modül**, $T(M) = 0$ ise **burulmasız modül** denir [1].

Örneğin; $0 \in R$ için $0m = 0_m \in T(M)$ olup $T(M) \neq \emptyset$ dir. $m_1, m_2 \in T(M)$ keyfi elemanları için $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları vardır. R değişmeli bölge olduğundan $r_1 r_2 \neq 0$ *olup* $r_1 r_2 (m_1 - m_2) = r_1(r_2 m_1) - r_1(r_2 m_2) = 0$

eşitliği gereği $m_1 - m_2 \in T(M)$ dir. $m \in T(M)$ ve $s \in R$ keyfi elemanlar olsun. $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ olup $r(sm) = s(rm) = 0$ dır. Dolayısıyla $sm \in T(M)$ olup $T(M) \leq M$ alt modüldür.

Burada R değişmeli değilse M nin $T(M)$ alt kümeleri, M R-modülünün alt modülü olmayabilir.

2.2.8. Tanım M R-modül ve K de M nin alt modülü olsun. M/K bölüm grubu $g \in R$, $m + K \in M/K$ olmak üzere, $g(m + K) = gm + K$ ile tanımlı dış işleme göre bir R-modül yapısına sahiptir. M/K bölüm grubuna M nin K ye göre **bölüm modülü** adı verilir [1].

Herhangi bir M modülünün N alt modülü için M/N sonlu üretilmiş ise N alt modülüne **eş sonlu** denir [2].

2.2.9. Teorem M R-modül ve K da M nin alt modülü olsun. Bu takdirde, $U \to U/K$ ile tanımlı M nin K yi kapsayan alt modülleri ile M/K nin alt modülleri arasında birebir bir eşleme yapılabilir. Böylece M/K nin her alt modülü; U, M nin K yi kapsayan alt modülü olmak üzere U/K şeklindedir [6].

2.2.10. Teorem K, M, N bir R-modülünün alt modülleri ve $K \subseteq N$, $K \subseteq M$ olsun. Bu takdirde, $N/K = M/K$ olması için gerek ve yeter şart $N = M$ olmasıdır [15].

İspat. ($\Rightarrow$) $n \in N$ olsun. Hipotez gereği $n + K = m + K$ olacak şekilde $\exists m \in M$ bulunabilir. Buradan $n - m = k$ olacak şekilde $\exists k \in K$ mevcut olup $K \subset M$ olduğundan $n = k + m \in M$ bulunur. Yani $N \subseteq M$ olur. Benzer şekilde N ve M nin rolleri değiştirilerek $M \subseteq N$ olduğu da gösterilebilir. Dolayısıyla her iki kapsamadan $M = N$ bulunur.

($\Leftarrow$) Açıktır.

2.3. Modül Homomorfizmaları

2.3.1. Tanım R halka olmak üzere M ve N (sol) R-modülleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: M \longrightarrow N$ fonksiyonuna **(sol) R-modül homomorfizması** denir.

(i) $\forall m_1, m_2 \in M \; için \; f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

(ii) $\forall m \in M$ ve $\forall r \in R$ $için$ $f(rm) = rf(m)$

Eğer f homomorfizması birebir ise f ye **monomorfizma**, örten ise **epimorfizma**, birebir ve örten ise **izomorfizma** adı verilir [1].

2.3.2. Teorem $f: M \to N$ ve $g: N \to K$ R-modül homomorfizmaları ise $gf = g \circ f: M \to K$ R-modül homomorfizmasıdır [1].

2.3.3. Tanım $f: M \to N$ R-modül homomorfizması olsun. $\{m \in M \mid f(m) = 0\}$ kümesine f nin **çekirdeği** denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir, $\{f(m) | m \in M\}$ kümesine de f nin **görüntüsü** denir ve $Gör(f)$ ile gösterilir. Buna göre, $Çek(f) = \{m \in M \mid f(m) = 0\}$ ve $Gör(f) = \{f(m) | m \in M\}$ dir [1].

2.3.4. Tanım M R-modül ve $K \leq M$ olsun. Bu takdirde $\pi : M \to M/K$, $a \to \pi(a) = a + K$ dönüşümü bir epimorfizma ve bu durumda $Çek(\pi) = K$ dır. Bu epimorfizmaya **doğal homomorfizma** adı verilir [6].

2.3.5. Teorem M ve N modül olmak üzere $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması verilsin. Bu taktirde,

(i) $K \leq M$ ise, $f(K) \leq N$ dir.

(ii) $L \leq N$ ise, $f^{-1}(L) \leq M$ dir.

(iii) $K \leq M$ ise, $f^{-1}\big(f(K)\big) = K + Çek(f)$ dir.

(iv) $K \leq M$ ve $L \leq N$ ise,

$f^{-1}(f(K) + L) = K + f^{-1}(L)$ ve $f(f^{-1}(L) \cap K)$=$L \cap f(K)$ dır [1].

2.3.6. Teorem M, N modüller $f: M \to N$ bir homomorfizma olsun. Bu takdirde, $f = g \circ \pi$ olacak şekilde bir tek $g: M/çek(f) \to N$ monomorfizması vardır ve $M/çek(f) \cong f(M)$ dir [1].

İspat. $\forall m + çek(f) \in M/çek(f)$ için $g(m + çek(f)) = f(m)$ olacak şekilde tanımlı $g: M/çek(f) \to N$ dönüşümü $f = g \circ \pi$ koşulunu gerçekleyen bir tek monomorfizmadır. Dolaysıyla $M/çek(f) \cong f(M)$ dir.

2.3.7. Teorem M modül ve $A \leq B \leq M$ olsun. Bu takdirde, $M/B \cong (M/A)/(B/A)$ dir [1].

İspat. $\forall a + A \in M/A$ için $f(a + A) = a + B$ ile tanımlı $f: M/A \to M/B$ dönüşümü bir epimorfizma yapısına sahiptir ve $çek(f) = B/A$ dir. Teorem 2.3.6. dan dolayı ise $(M/A)/(B/A) \cong M/B$ elde edilir.

2.3.8. Teorem M bir R-modül, U ve V, M nin alt modülleri olsunlar. Bu taktirde $(U + V)/V$ de M/V nin alt modülü olup, $(U + V)/ V \cong U/(U \cap V)$ dir [1].
İspat. $\forall a \in U$ için $f(a) = a + V$ ile tanımlı $f: U \to (U + V)/V$ dönüşümü bir epimorfizma yapısına sahiptir ve $çek(f) = U \cap V$ dir. Teorem 2.3.7 gereğince $(U + V)\ /V \cong U/(U \cap V)$ elde edilir.

2.3.9. Teorem M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu takdirde, M nin her öz alt modülü M nin bir maksimal alt modülünde kapsanır [1].
İspat. $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$, M nin üreteç kümesi ve A, M nin öz alt modülü olsun. A yı içeren M nin öz alt modülleri kümesini Φ ile gösterelim. Bu takdirde, A öz alt modül olduğundan $A \in \Phi \neq \emptyset$ dır. Φ kümesi kapsama bağıntısına göre kısmen sıralı kümedir. Γ, Φ kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. C ile Γ kümesinin elemanlarının birleşimini gösterirsek $A \leq C$ ve Γ tam sıralı olduğundan $C \leq M$ dir. Üstelik C, M nin öz alt modülüdür. Şayet C, M nin öz alt modülü değilse M sonlu üretilmiş olduğundan sonlu bir $\{m_1, m_2, \dots, m_n\}$ üreteç kümesine sahip olup her bir m_i, Γ ya ait olur. Γ tam sıralı olduğundan Γ nın tüm m_i leri kapsayan bir elemanı vardır. Bu elemana B diyelim. Buradan $M \subseteq B$ olur. Dolayısıyla $M \in \Gamma$ bulunur. Bu ise Γ nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla C bir öz alt modül olacak şekilde Γ nın üst sınırıdır. Zorn Lemmasına göre Φ kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

2.3.10. Tanım $\{N_i\}_{i\in I}$, M R-modülünün alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, $\sum_{i\in I} N_i = \{n_{i_1} + n_{i_2} + \cdots + n_{i_k}; k \in \mathbb{Z}^+, i_1, i_1, \dots, i_1 \in I, n_{i_1} \in N_{i_1}, n_{i_2} \in N_{i_2}, \dots, n_{i_k} \in N_{i_k}\}$ kümesi M nin alt modülüdür. Bu alt modüle $\{N_i\}_{i\in I}$ **ailesinin toplamı** denir [6].

2.3.11. Tanım M R-modül olsun. M nin kendi üzerine bir homomorfizmasına M nin bir **endomorfizması** denir. M nin tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir [1].

2.3.12. Tanım M modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i: N \longrightarrow M$ dönüşümü monomorfizma olup i monomorfizmasına **içerme monomorfizması** denir [6].

2.3.13. Teorem (Modüler Kuralı) M bir R-modül, A, B ve C de M nin alt modülleri olsun. $C \leq B$ ise, $(C + A) \cap B = C + (A \cap B)$ dir [1].
İspat. Her $a \in (C + A) \cap B$ için $a \in C + A$ *ve* $a \in B$ olduğundan $a = x + y$ olacak şekilde $x \in C$ *ve* $y \in A$ vardır. $C \leq B$ olduğundan $x \in B$ olur. Bu durumda $y = a - x$ *ve* $a \in B,\ x \in B$ olduğundan $y \in B$ olup $y \in A \cap B$ bulunur. Yani $x \in C,\ y \in A \cap B$ iken $a = x + y \in C + (A \cap B)$ bulunur. Bu durumda $(C + A) \cap B \leq C + A \cap B$ olur. Ayrıca, $C + (A \cap B) \leq C + A$ ve $C + (A \cap B) \leq B$ olduğundan $C + (A \cap B) \leq (C + A) \cap B$ dir. Sonuç olarak $(C + A) \cap B = C + (A \cap B)$ eşitliği sağlanır.

2.3.14. Teorem R birimli halka M ve K birer R-modül olmak üzere $f: M \longrightarrow K$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda K modülünün alt modülleri ile M modülünün $Çek(f)$ yi kapsayan alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu eşleme K nın U alt modülüne M nin $f^{-1}(U)$ alt modülünü karşılık getirerek yapılır [6].

2.3.15. Sonuç (i) M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, M/N bölüm modülünün her alt modülü; K, M nin N alt modülünü kapsayan bir alt modülü olmak üzere K/N biçimindedir.
(ii) M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülünün M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul K/N alt modülünün M/N bölüm modülünün maksimal alt modülü olmasıdır [6].
İspat. (i) M modül ve $N \leq M$ olsun. $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $N \leq K \leq M$ ise $\pi(K) = K/N \leq M/N$ dır. Tersine; $A \leq M/N$ ise $\pi^{-1}(A) = K$ için $N = \pi^{-1}(0) \leq K \leq M$ ve $\pi(K) = K/N = A$ olduğundan M nin N yi içeren K alt modülü belirlenir.
(ii) ($\Longrightarrow$) M modül ve $N \leq M$ olsun. $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülü M nin maksimal alt modülü ise M/K basittir. Teorem 2.3.7 gereğince $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ bölüm modülü basittir. Dolayısıyla K/N alt modülü M/N nin maksimal alt modülüdür. ($\Longleftarrow$) Benzer şekilde görülür.

2.4. Direkt Çarpımlar Ve Direkt Toplamlar

2.4.1. Tanım R halka ve I boştan farklı indis kümesi olmak üzere, $\{M_i\}_{i \in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\, \alpha \mid\ \alpha: I \to \bigcup_{i \in I} M_i,\ \forall\, i \in I\ için\ \alpha(i) \in M_i \,\}$ dönüşümlerin kümesine $\{M_i\}_{i \in I}$ **modüller ailesinin çarpımı** denir ve bu küme $\prod_{i \in I} M_i$ ile gösterilir. $\forall\, i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$

ve $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ ile gösterelim. Burada α_i ye **α dönüşümünün i. bileşeni** denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i, \dots.)$ şeklindedir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i\in I} M_i$ olmak üzere

(i) $\alpha = \beta \iff$ her $i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$

(ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i\in I}$

(iii) $-\alpha = (-\alpha_i)_{i\in I}$

(iv) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i\in I}$ ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i\in I} M_i$ bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir.

$\bigoplus_{i\in I}^{w} M_i = \{\, (\alpha_i)_{i\in I} \mid sonlu\ sayıda\ i \in I\ için\ \alpha_i \neq 0 \,\}$ kümesi $\prod_{i\in I} M_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ alt modülüne $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. Açıktır ki I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i\in I} M_i = \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ dir. İç direkt toplam ile dış direkt toplam izomorftur [1].

2.4.2. Tanım M bir modül olsun. I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere $\forall\, i \in I$ için $M_i = M$ alınırsa $\bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ dış direkt toplamına M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir [6].

2.4.3. Tanım F R-modül olsun. I indis kümesi olmak üzere $F = R^{(I)}$ ise F ye **serbest modül** ve $I = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde sonlu elemanlı ise, $F = R^{(n)}$ modülüne **sonlu üretilmiş serbest modül** denir [6].

2.4.4. Tanım M ve K modüller ve I boştan farklı bir indis kümesi olsun. Eğer $f: M^{(I)} \to K$ epimorfizması mevcut ise, K ya **M-üretilmiş modül** denir. Eğer I indis kümesi sonlu elemanlı ise, K ya **sonlu M-üretilmiş modül** denir [7].

2.4.5. Teorem R birimli halka olsun. Bu takdirde, her sol R-modül R-üretilmiştir. Dolayısıyla her R-modül bir serbest modülün bölüm modülüdür [6].

İspat. R birimli halka ve M R-modül olsun. M nin elemanlarından oluşan bir indis kümesi alalım ve her $(r_m)_{m\in M} \in R^{(M)}$ için $f((r_m)_{m\in M}) = \sum_{m\in M} r_m m$ ile tanımlı $f: R^{(M)} \longrightarrow M$ dönüşümünü tanımlayalım. f dönüşümünün R-modül homomorfizması olduğu açıktır. Her $m \in M$ için bir $(r_m)_{m\in M} \in R^{(M)}$ elemanını m. bileşeni 1_R ve diğer bileşenleri de 0_R olarak alalım. Bu takdirde, $f((r_m)_{m\in M}) = 1_R m = m$ olup f bir epimorfizma yapısına sahiptir. Sonuç olarak M, $F = R^{(M)}$ serbest modülünün bölüm modülü olup M R-üretilmiştir.

2.4.6. Önerme M modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun. Bu takdirde her $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ için $f((m_i)_{i\in I}) = m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} \ldots + m_{i_n}$ ile tanımlı $f\colon \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i \longrightarrow \sum_{i\in I} M_i$ epimorfizması vardır. (Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere m_{i_j} ler $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ elemanının sıfırdan farklı tüm bileşenleridir) [6].

2.4.7. Tanım M bir R-modül, U ve V, M nin alt modülleri olsunlar. Eğer $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ ise, bu takdirde M ye U ve V nin **iç direkt toplamı** veya sadece **direkt toplamı** denir ve $M = U \oplus V$ ile gösterilir. U ve V ye M nin **direkt toplam terimleri** denir. $M = U \oplus V$ yazılışına da M nin bir **direkt parçalanışı** denir [6].

Eğer M modülünün 0 ve kendisinden başka direkt toplam terimi bulunmuyorsa M modülüne **parçalanamaz modül** denir [14].

2.4.8. Teorem M bir R-modül U ve V de M nin alt modülleri olsun. M nin U ve V nin direkt toplamı olması için gerek ve yeter şart $\forall m\in M$ elemanını $m = u + v,\ u\in U,\ v\in V$ olacak şekilde tek türlü olarak yazılmasıdır [1].

2.4.9. Tanım $\{\, M_n \mid n \in \mathbb{Z}\,\}$ modüllerin ailesinden ve bunların $\{\, f_n\colon M_n \to M_{n-1} \mid n \in \mathbb{Z}\,\}$ homomorfizmalarının ailesinden oluşan ... $\longrightarrow M_{n+1} \xrightarrow{f_{n+1}} M_n \xrightarrow{f_n} M_{n-1} \longrightarrow \cdots$ dizisinde her $n \in \mathbb{Z}$ için $Gör(f_{n+1}) = Çek(f_n)$ ise bu diziye **tam dizi** denir [1].

$0 \longrightarrow M_3 \longrightarrow M_2 \longrightarrow M_1 \longrightarrow 0$ şeklindeki tam diziye **kısa tam dizi** denir [1].

2.4.10. Teorem $0 \longrightarrow A \underset{h}{\overset{f}{\rightleftarrows}} B \underset{k}{\overset{g}{\rightleftarrows}} C \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi için aşağıdaki koşullar denktir ;

(i) $h \circ f = 1_A$ olacak şekilde bir $h\colon B \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur,

(ii) $Gör(f)$, B nin bir direkt toplam terimidir,

(iii) $g \circ k = 1_C$ olacak şekilde bir $k\colon C \longrightarrow B$ homomorfizması bulunur.

Bu durumda $B \cong A \oplus C$ dır [1].

2.4.11. Tanım Teorem 2.4.10 daki denk koşullardan herhangi birini sağlayan kısa tam diziye **parçalanan kısa tam dizi** veya kısaca **parçalanabilirdir** denir [1].

2.5. Artin Modüller Ve Sol Artin Halkalar

2.5.1. Tanım M R-modül olsun. M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her Ω ailesi bir minimal elemana sahip ise, M R-modülüne **minimal koşulunu sağlıyor** denir [11].

2.5.2. Tanım M R-modül olsun. M nin alt modüllerinin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq M_3 \supseteq \cdots$ şeklindeki her bir azalan zinciri için öyle bir $k \epsilon \mathbb{Z}^+$ ve $n \geq k$ koşulunu sağlayan her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $M_n = M_k$ oluyorsa, M ye **azalan zincir koşulunu sağlıyor** denir [11].

2.5.3. Önerme M R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir;

(i) M minimal koşulunu sağlar,
(ii) M azalan zincir koşulunu sağlar [11].

2.5.4. Tanım Azalan zincir (veya minimal) koşulunu sağlayan M modülüne **Artin modül** denir. R halkası sol R-modül olarak Artin ise, R halkasına **sol Artin halka** denir [11].

Çalışmamızda Artin halka denildiğinde sol Artin halka anlaşılacaktır.

$\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu azalan zincire sahip olduğundan Artin dir. Fakat $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ Artin modül değildir. Çünkü $(3) \supset (9) \supset (27) \ldots \supset (3^n) \ldots$ sonsuz bir azalan zincirdir. R bölme halkası ise, idealleri 0 (sıfır) ve kendisi olduğundan sol (sağ) Artin halkadır [9].

2.5.5. Teorem M modül olsun. Aşağıdaki durumlar denktir ;

(i) M Artindir,
(ii) M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her kümesi minimal elemana sahiptir [11].

İspat. (i) $\Longrightarrow$ (ii) M nin alt modüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun. $\Omega \neq \emptyset$ olduğundan $M_1 \in \Omega$ olacak şekilde $M_1 \leq M$ vardır. $|\Omega| = 1$ ise, M_1, Ω nın minimal elemanıdır. $|\Omega| \geq 2$ olsun. $M_1, M_2 \in \Omega$ için , $M_2 \subseteq M_1$ dir. Bu yöntemle $M \supseteq M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ zinciri elde edilir.

M Artin olduğundan en az bir $n_0 \epsilon \mathbb{N}$ vardır öyle ki; her $k \epsilon \mathbb{N}$ için $M_{n_0} = M_{n_{0+k}}$ olup M_{n_0}, Ω nın minimal elemanıdır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) M nin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ olacak şekilde herhangi bir azalan zincirini göz önüne alalım. (ii) den $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ailesinin bir M_j minimal elemanı vardır. O halde $M_j = M_{j+1}$ olup M Artindir.

2.5.6. Teorem $0 \longrightarrow M \longrightarrow N \longrightarrow K \longrightarrow 0$ kısa tam dizi olsun. N modülünün Artin olması için gerek ve yeter koşul M ve K modüllerinin Artin olmasıdır [11].

İspat. Genelliği bozmadan $i: M \longrightarrow N$ yi içerme monomorfizması olarak alalım. Bu takdirde $i(M) = Gör(i) = M$ olup dizi tam olduğundan $N/_M \cong K$ izomorfizması mevcuttur. İzomorfizma farkı gözetmeden $N/_M = K$ olsun. N modülünün Artin olduğunu kabul edelim. Bu takdirde Teorem 2.5.5 den N modülünün alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir minimal elemana sahip olup M alt modülünün de alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir minimal elemana sahiptir. Tekrar Teorem 2.5.5 uygulanırsa M alt modülünün Artin olduğu görülür. Şimdi $N/_M$ nin alt modüllerinin bir $E_1{}' \supseteq E_2{}' \supseteq E_3{}' \supseteq \cdots$ azalan zincirini alalım. Teorem 2.5.5 bu dizi ile eşlenen N nin M modülünü içeren alt modüllerinin bir $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ azalan zinciri vardır. N Artin olduğundan öyle bir s pozitif tam sayısı vardır ki her $r \geq s$ için $E_r = E_s$ dir. Buradan $N/_M$ deki alt modüllerin zinciri dikkate alınırsa öyle bir s pozitif tam sayısı vardır ki her $r \geq s$ için $E'r = E's$ olur. Buradan $N/_M$ bölüm modülünün Artin olduğu görülür. $N/_M \cong K$ olduğundan K Artin dir.

Tersine; M ve $N/_M \cong K$ Artin modül olsun. N modülünün alt modüllerinin bir azalan zinciri $E_1 \supseteq E_2 \supseteq E_3 \supseteq \cdots$ olsun. Bu taktirde $E_1 \cap M \supseteq E_2 \cap M \supseteq E_3 \cap M \supseteq \cdots$ ve $(E_1 + M)/_M \supseteq (E_2 + M)/_M \supseteq (E_3 + M)/_M \supseteq \cdots$ azalan zincirleri de sırasıyla M ve $N/_M$ nin alt modüllerinin bir azalan zinciridir. Hipotez gereğince $k, r \in \mathbb{N}$ için $n \geq k$ ve $m \geq r$ olan $\forall\, n, m \in \mathbb{N}$ için $E_k \cap M = E_n \cap M$ ve $(E_r + M)/_M = (E_m + M)/_M$ dir. $m \geq r$ olan $\forall\, m \in \mathbb{N}$ için $E_r + M = E_m + M$ olduğu açıktır. Genelliği bozmadan $r \geq k$ olduğunu kabul edelim. Hipotez gereğince öyle bir $m \in \mathbb{Z}^+$ vardır ki $\forall\, n \geq m$ için $E_n \cap M = E_m \cap M$ ve $(E_n + M)/_M = (E_m + M)/_M$ dir. O halde $m \in \mathbb{Z}^+$ ve $\forall\, n \geq m$ için $(E_n \subseteq E_m)$

$$E_m = E_m \cap (E_m + M)$$

$$
\begin{aligned}
&= E_m \cap (E_n + M) \\
&= E_n + (E_m \cap M) \\
&= E_n + (E_n \cap M) = E_n
\end{aligned}
$$

olup N azalan zincir koşulunu sağlar. Dolayısıyla N Artin modüldür.

2.5.7. Teorem R halka ve $M_1, M_2, \dots, M_n$ R-modüller olmak üzere $M = M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_n$ $modülünün$ Artin olması için gerek ve yeter koşul her $i = 1,2, \dots, n$ için M_i nin Artin olmasıdır [15].

İspat. n üzerine tümevarımla gösterelim. Genelliği bozmadan $n = 2$ için doğruluğunu gösterelim. $0 \longrightarrow M_1 \longrightarrow M_1 \oplus M_2 \longrightarrow M_2 \longrightarrow O$ kısa tam dizisini alalım. Teorem 2.5.6 için istenen açıktır.

2.5.8. Teorem M bir R-modülü için aşağıdaki özellikler denktir;

(i) M Artindir,

(ii) M nin alt modüllerinin boştan farklı her alt kümesi minimal elemana sahiptir,

(iii) M nin her bölüm modülü sonlu üretilmiştir [15].

2.6. Projektif Ve İnjektif Modüller

2.6.1. Tanım (i) M ve N birer modül olsun. Verilen her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N modülüne ***M*** **-projektiftir** denir.

$$
\begin{tikzcd}
& N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\
M \arrow[r, "g"'] & K \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
$$

Yani, yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her f, g homomorfizmaları için $f = g \circ h$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse N modülüne ***M*-projektiftir** denir.

(ii) N modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N modülüne **projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Yani yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her f, g homomorfizmaları için $f = g \circ h$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse N modülüne **projektiftir** denir. Eğer N, N-projektif ise N ye **hemen hemen projektiftir** denir. Eğer N modülü M-projektif ise N, M nin her U alt modülü için de U-projektiftir [6].

2.6.2. Teorem $\{M_i\}_{i\in I}$ modüller ailesi olsun. $M = \oplus_{i\in I} M_i$ modülünün projektif olması için gerek ve yeter koşul $\forall\, i \in I$ için M_i lerin projektif olmasıdır [1].

2.6.3. Teorem Her F serbest modülü projektiftir [6].

İspat. $f: A \longrightarrow B$ bir epimorfizma ve $g: F \longrightarrow B$ bir homomorfizma olsun. F nin bir $X = \{x_k |\ k \in K\}$ tabanını alalım. f bir epimorfizma olduğundan her $k \in K$ için $f(a_k) = g(x_k)$ olacak şekilde bir $a_k \in A$ vardır. Her $k \in K$ için $s(x_k) = a_k$ alarak bir $s: X \longrightarrow A$ fonksiyonunu tanımlayalım. [1, 4.8] den dolayı $h(x_k) = s(x_k) = a_k$ olacak şekilde bir $h: F \longrightarrow A$ homomorfizması bulunur. O halde $c = \sum_{k\in K} r_k x_k \in F$ için ;

$$\begin{aligned}
(foh)(c) &= f\left(h\left(\sum_{k\in K} r_k x_k\right)\right) \\
&= f\left(\sum_{k\in K} r_k h(x_k)\right) \\
&= \sum_{k\in K} r_k f(a_k) = \sum_{k\in K} r_k g(x_k) = g\left(\sum_{k\in K} r_k x_k\right) = g(c)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $foh = g$ dir. Böylece F modülü projektiftir.

2.6.4. Teorem C modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) C projektiftir;

(ii) $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ şeklinde olan her kısa tam dizi parçalanabilirdir

(iii) C bir serbest modülün direkt toplam terimidir [1].

İspat. (i)⟹(ii) $0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$ dizisi tam olsun. Bu takdirde $g: B \longrightarrow C$ epimorfizmasıdır. 1_K, C nin birim homomorfizması olmak üzere C projektif olduğundan $g \circ h = 1_C$ olacak şekilde bir $h: C \longrightarrow B$ homomorfizması vardır. Dolayısıyla Teorem 2.4.10 dan verilen dizi parçalanabilirdir.

(ii)⟹(iii) Teorem 2.4.5 den F bir serbest modül olmak üzere $g: F \longrightarrow C$ epimorfizması vardır. Bu durumda kabulümüzden $0 \longrightarrow Çek(g) \longrightarrow F \longrightarrow C \longrightarrow 0$ tam dizisi parçalanabilirdir. Dolayısıyla C, F nin direkt toplam terimidir.

(iii)⟹(i) Teorem 2.4.10 dan görülür.

2.6.5. Tanım R halka ve M R-modül olsun. $M = U + V$ koşulunu sağlayan her U, V alt modülleri için $Gör(f) \leq U$ ve $Gör(1_M - f) \leq V$ olacak şekilde bir $f \in End(M)$ varsa, M ye **π-projektif modül** denir [15].

2.6.6. Teorem Her projektif modül π-projektiftir [4].

İspat. M projektif modül, U ve V, M nin alt modülleri olmak üzere $M = U + V$ olsun. Bu durumda $p: M \rightarrow M/V$ doğal homomorfizmasının $p_{|_U}: U \longrightarrow M/V$ kısıtlanışı bir epimorfizma olup M projektif olduğundan

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "p"] & \\ U \arrow[r, "p_{|_U}"'] & M/V \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$$p_{|_U} \circ h = p$$

diyagramı değişmelidir. Yani $p_{|_U} \circ h = p$ olacak şekilde $h: M \longrightarrow U$ homomorfizması vardır ve $Gör(h) \leq U$ olduğu açıktır. Her $n \in Gör(1_M - h)$ olsun. Bu durumda $m \in M$ için $n = m - h(m)$ yazılır. Şimdi n elemanının p altında görüntüsüne bakalım.

$p(n) = p(m - h(m)) = p(m) - (ph)(m) = p(m) - (p_{|_U}h)(m) = p(m) - p(m) = 0$

olduğundan $n \in Çek(p) = V$ bulunur. Böylece $Gör(1_M - h) \leq V$ olup M π-projektiftir.

2.7. Küçük Alt Modüller

2.7.1. Tanım M bir R-modül ve K , M nin alt modülü olsun. Eğer M nin $K + L = M$ şartını sağlayan L öz alt modülü yoksa K ya M de **küçüktür** denir ve $K \ll M$ ile gösterilir. Tanım gereği $K \ll M$ ve $K + L = M$ ise $L = M$ dir. Bu durumda $0 \ll M$ dir [15].

2.7.2. Teorem M R-modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Eğer $N \ll M$ ise $K \ll M$ dir.
İspat. $K + L = M$ olan herhangi L alt modülünü ele alalım. Bu takdirde $K \leq N$ olduğundan $N + L = M$ olup $N \ll M$ olduğundan $L = M$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll M$ dir [15].

2.7.3. Teorem M bir modül ve $K \leq N \leq M$ olsun. Eğer $K \ll N$ ise, K, M nin N yi kapsayan tüm alt modüllerinde de küçüktür [15].
İspat. L, M nin N alt modülünü kapsayan bir alt modülü olsun. $K + U = L$ koşulunu sağlayan L nin bir U alt modülü için $N \leq L$ olduğundan $(K + U) \cap N = N$ bulunur. $K \leq N$ olduğundan $K + (N \cap U) = N$ yazılır. $K \ll N$ olduğundan $N \cap U = N$ bulunur. Buradan $N \leq U$ yazılır. $K \leq N \leq U$ ve $K + U = L$ olduğundan $U = L$ bulunur. Dolayısıyla $K \ll L$ dir.

2.7.4. Teorem M ve N birer modül, K, M nin bir alt modülü ve $f: M \longrightarrow N$ herhangi homomorfizma olsun. Eğer $K \ll M$ ise $f(K) \ll N$ dir [15].
İspat. $f(K) + L = f(M)$ koşulunu sağlayan $f(M)$ nin bir L alt modülü için $f^{-1}(f(K) + L) = M$ olup $K + f^{-1}(L) = M$ yazılır. $K \ll M$ olduğundan $f^{-1}(L) = M$ bulunur. O halde $L = f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(K) \ll f(M)$ olup Teorem 2.7.3 gereğince $f(K) \ll N$ elde edilir.

2.7.5. Tanım M, N modül ve $f: M \longrightarrow N$ epimorfizma olsun. Eğer $Çek(f) \ll M$ ise, f epimorfizmasına **küçük epimorfizma** denir [15].

2.7.6. Tanım M projektif modülüne, $f: M \longrightarrow N$ küçük epimorfizması ile birlikte N modülünün **projektif örtüsü** denir [1].

2.7.7. Teorem M R-modülü $\pi_1: M_1 \longrightarrow N_1$ ve $\pi_2: M_2 \longrightarrow N_2$ küçük epimorfizmaları sırası ile N_1 ve N_2 modüllerinin projektif örtüleri ise $\pi_1 \oplus \pi_2 : M_1 \oplus M_2 \longrightarrow N_1 \oplus N_2$ de $N_1 \oplus N_2$ nin projektif örtüsüdür [15].

2.8. Basit, Yarı-Basit Modüller ve Bir Modülün Radikali

2.8.1. Tanım M R-modül olsun. Eğer M nin 0 ve kendisinden başka alt modülü yoksa M ye **basit modül** denir. ${}_R R$ sol R-modülü basit modül ise, R ye **sol basit halka** denir. Benzer şekilde R_R sağ R-modülü basit modül ise R ye **sağ basit halka** denir [1].

2.8.2. Teorem R birimli halka olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir.

(i) R bölme halkasıdır.

(ii) R sol basit halkadır.

(iii)R sağ basit halkadır [7].

İspat. (i) $\Longrightarrow$ (ii) R bölme halkası olsun. $\{0\} \subseteq$ I koşulunu sağlayan R nin bir I sol idealini ele alalım. O halde $a \neq 0$ olacak şekilde $a \in I$ elemanı vardır ve I sol ideal olduğundan $1_R = a^{-1}a \in I$ dır. Böylece her $r \in R$ için $r = r1_R \in I$ olduğundan $R = I$ elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) R sol basit halka olsun. $0 \neq a \in R$ elemanını ele alalım. ${}_l\langle a\rangle = R$ olup $1_R \in {}_l\langle a\rangle = \{ra|r \in R\}$ olduğundan $1_R = ra$ olacak şekilde $0 \neq r \in R$ vardır. Diğer taraftan bu r elemanı içinde benzer şekilde $tr = 1_R$ olacak şekilde $t \in R$ vardır. Buradan $t = t1_R = t(ra) = (tr)a = 1_R a = a$ olur. Dolayısıyla $ra = 1_R = ar$ olup a nın tersi vardır. R nin sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut olduğundan R bölme halkasıdır.

(i) $\Longrightarrow$ (iii) ve (iii) $\Longrightarrow$ (i) benzer şekilde elde edilir.

2.8.3. Örnek Her bölme halkası basit halkadır. Fakat bir basit halka bölme halkası olmak zorunda değildir. R birimli ve değişmeli bir halka olmak üzere $M_2(R)$ matris halkasını ele alalım. A, $M_2(R)$ nin sıfırdan farklı bir ideali olsun. Bu takdirde, $a, b, c, d \in R$ elemanlarının en az biri sıfırdan farklı olacak şekilde $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in A$ vardır. O halde A ideal olduğundan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ için $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & 0 \\ d & 0 \end{bmatrix} \in A$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ ve $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ elde edilir.

Böylece $0 \neq a \in R$ için A idealinde bir $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ matrisi mevcuttur. O halde $a^{-1} \in R$ için $\begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(R)$ biçiminde matris vardır.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ ca^{-1} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ dır. Diğer taraftan $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in A$ olur. Buradan $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in A$ dır. Böylece $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I_2 \in A$ olur. Dolayısıyla $A = M_2(R)$ olup $M_2(R)$ matris halkasının bölme halkası olmayan bir basit halka olduğu görülür [7].

2.8.4. Lemma M modül olsun. M_i, M nin basit alt modülleri olmak üzere $M = \sum_{i \in I} M_i$ ve U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. Bu takdirde,

(i) $M = U \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ olacak şekilde $J \subset I$ alt kümesi vardır,

(ii) $U \cong \oplus_{i \in K} M_i$ olacak şekilde $K \subset I$ alt kümesi vardır [7].

İspat. (i) $\Gamma = \{L \mid L \subseteq I \text{ için } U + (\sum_{i \in L} M_i) = U \oplus (\oplus_{i \in L} M_i)\}$ kümesini tanımlayalım. $L = \emptyset$ ise, $\oplus_{i \in \emptyset} M_i = 0$ olduğundan $\emptyset \in \Gamma$ olup $\Gamma \neq \emptyset$ dır. Γ kapsama bağıntısına göre kısmen sıralı kümedir. Λ, Γ kümesinin tam sıralı alt kümesi olsun. $L^* = \bigcup_{L \in \Lambda} L$ Λ kümesinin bir üst sınırıdır. Şimdi $L^* \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. E sonlu olmak üzere $E \subset L^*$ alt kümesini alalım. Bu takdirde, Λ tam sıralı olduğundan $E \subset L$ olacak şekilde bir $L \in \Lambda$ vardır. $0 = u + \sum_{i \in E} m_i$ olacak şekilde $u \in U$ ve $m_i \in M_i$ elemanlarını alalım. $E \subset L$ olduğundan her $i \in E$ için $u = m_i = 0$ bulunur. Buradan $U + \sum_{i \in L^*} M_i = U \oplus (\oplus_{i \in L^*} M_i)$ olup $L^* \in \Gamma$ dır. Dolayısıyla Γ nın her tam sıralı alt kümesi bir üst sınıra sahiptir. Zorn Lemmasından Γ nın bir J maksimal elemanı vardır. Kabul edelim ki $N = U + \sum_{i \in J} M_i = U \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ olsun. Herhangi bir $i_0 \in I$ için $N + M_{i_0}$ alt modülünü alalım. J nin maksimalliğinden dolayı $N + M_{i_0} \neq N \oplus M_{i_0}$ yazılabilir. M_{i_0} basit olduğundan $N \cap M_{i_0} = M_{i_0}$ olup $M_{i_0} \leq N$ bulunur. Yani N, M modülündeki tüm basit alt modülleri kapsar. Sonuç olarak $N = M$ elde edilir.

(ii) (i) den dolayı $M = N \oplus (\oplus_{i \in J} M_i)$ yazılır. Şimdi (i) deki U alt modülü yerine $U = \oplus_{i \in J} M_i$ alt modülünü alalım. Tekrar (i) yi uygularsak $M = (\oplus_{i \in J} M_i) \oplus (\oplus_{i \in K} M_i)$ olacak şekilde $K \subset I$ alt kümesi vardır. Teorem 2.3.7 den $U \cong M / \oplus_{i \in J} M_i \cong \oplus_{i \in K} M_i$ olup istenilen elde edilir.

2.8.5. Önerme M basit R-modül ise 0, M modülünün maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir [7].

İspat. M basit modül olduğundan 0 alt modülünü kapsayan M nin kendisinden başka alt modül yoktur. Dolayısıyla tanım gereği 0, M nin maksimal alt modülüdür. Her $0 \neq m \in M$ elemanı için Rm, M nin bir alt modülüdür ve $m \in Rm$ dir. Böylece $0 \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

2.8.6. Teorem M modül olsun. U alt modülünün M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter koşul M/U bölüm modülünün basit olmasıdır [15].

İspat. U, M nin bir maksimal alt modülü ve $V/U \leq M/U$ olsun. U, M de maksimal alt modül olduğundan $V = U$ veya $V = M$ olmalıdır. Dolayısıyla M/U basittir. Tersine; M/U basit olsun. $U \leq V \leq M$ olacak şekilde V alt modülünü alalım. Sonuç 2.3.15.(i) den $V/U, M/U$ bölüm modülünün bir alt modülüdür. M/N basit olduğundan $V/U = M/U$ veya $V/U = \{U\}$ olup $V = M$ veya $= U$ dir. O halde U, M nin maksimal alt modülüdür.

2.8.7. Teorem M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M nin her alt modülü basit alt modüllerin toplamıdır;

(ii) M basit alt modüllerin toplamıdır;

(iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır;

(iv) M nin her alt modülü M nin direkt toplam terimidir [7].

İspat. (i)⟹(ii) Açıktır.

(ii)⟹(iii) Lemma 2.8.4.(i) de $U = 0$ alınırsa istenen elde edilir.

(iii)⟹(iv) Lemma 2.8.4.(i) den açıktır.

(iv)⟹(i) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. M_i ler U alt modülünde kapsanan basit alt modüller olmak üzere $U_0 = \sum_{M_i \leq U} M_i$ alt modülünü alalım. Hipotezden M nin bir U_0 direkt toplam terimi vardır. Yani $M = U_0 \oplus N$ olacak şekilde $N \leq M$ alt modülü vardır. Modüler Kural gereğince $U = M \cap U = U_0 \oplus (N \cap U) = 0$ eşitliği vardır. $N \cap U = 0$ ise, $U = U_0$ olup (i) sağlanır. $N \cap V \neq 0$ olsun. Lemma 2.8.4 den $N \cap U$ bir B basit alt modülünü içerir. Bu takdirde, U_0 ın tanımından $B \leq U_0 \cap (N \cap U) = 0$ çelişkisi elde edilir. Sonuç olarak U basit alt modüllerin toplamıdır.

2.8.8. Tanım Teorem 2.8.7 deki denk koşullardan birini sağlayan M modülüne **yarı basit modül** denir. M modülünün basit alt modüllerinin toplamına M nin **desteği** denir ve $Des(M)$ ile gösterilir [14].

2.8.9. Lemma M yarı basit modül olsun. Bu taktirde M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit modül içerir [7].

İspat. U, M nin sıfırdan farklı sonlu üretilmiş bir alt modülü olsun. Teorem 2.3.9 dan U bir C maksimal alt modülünü içerir. Hipotezden; $M = C \oplus M_1$ olacak şekilde M_1 alt modülü vardır. Teorem 2.3.7 den $U = M \cap U = C \oplus (M_1 \cap U)$ dır. Böylece $U/C \cong M_1 \cap U$ elde edilir. C, U nun maksimali olduğundan U/C basittir. Sonuç olarak $M_1 \cap U$, U nun basit alt modülüdür. M nin sıfırdan farklı her alt modülü sonlu üretilmiş bir alt modül kapsayacağından M nin sıfırdan farklı her alt modülü bir basit alt modül içerir.

Destek tanımı gereği Teorem 2.8.7 nin bir sonucu olarak aşağıdaki sonuçları elde ederiz.

2.8.10. Sonuç M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir;

(i) M nin her N alt modülü için $N = Des(N)$ dir;
(ii) $M = Des(M)$ dir;
(iii) M basit alt modüllerin direkt toplamıdır;
(iv) M yarı basittir [7].

2.8.11. Sonuç (i) Yarı basit modüllerin her alt modülü de yarı basittir;
(ii) Yarı basit modülün her homomorfik görüntüsü de yarı basit modüldür;
(iii) Yarı basit modüllerin herhangi sayıdaki toplamı da yarı basittir [7].
İspat. (i) Teorem 2.8.6.(i) den açıktır.
(ii) A basit alt modül ve $\alpha: A \longrightarrow B$ epimorfizma olsun. Bu takdirde, $A/Çek(\varphi) \cong B$ dir. A basit modül olduğu için iki durum vardır. Eğer $Çek(\varphi) = 0$ ise B basit modüldür. Eğer $Çek(\varphi) = A$ ise $B = 0$ dır. O halde basit modüllerin toplamının homomorfizma altındaki görüntüsü de yine basit modüllerin toplamıdır. Böylece Teorem 2.8.6 dan yarı basittir.
(iii) M yarı basit modüllerin toplamı olan modül olsun. Teorem 2.8.6 dan her yarı basit modül basit modüllerin toplamı olduğundan M basit modüllerin toplamıdır. Dolayısıyla M modülü yarı basittir.

2.8.12. Teorem M bir R-modül N de M nin M den farklı bir alt modülü olsun. Bu takdirde N nin M nin maksimal alt modülü olması için gerek ve yeter şart $\forall m \in M \setminus N$ için $N + \langle m \rangle = M$ olmasıdır [15].

İspat. ($\Rightarrow$) $\forall\, m \in M \setminus N$ için $N \subset N+< m >$, $N \neq N+< m >$ ve N maksimal olduğundan maksimallık tanımı gereği $N+< m >= M$ olur.
($\Leftarrow$) $N \subseteq K$ ve $N \neq K$ olan herhangi bir K alt modülünü ele alalım. Eğer $K = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \neq K$ olduğundan $m \in K \setminus N$ vardır. Bu durumda $m \in M \setminus N$ olup hipotez gereği $N+< m >= M$ dir. Aynı zamanda $m \in K$ olduğundan $< m > \subset K$ olup $M = N+< m > \subseteq K$ kapsaması bulunur. Dolayısıyla $K = M$ olur.

2.8.13. Tanım M bir R-modül olsun. M nin bütün maksimal alt modüllerinin arakesitine M nin **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. Eğer M nin maksimal alt modülü yoksa $Rad(M) = M$ diye tanımlanır ve M modülüne **radikal modül** denir [3].
N, $\mathbb{Q}$ nun bir maksimal alt modülü olsun. O halde her $a \in \mathbb{Q} \setminus N$ için $N + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}$ dur. $X = N \cup \{a\}$ alınırsa $\langle X \rangle = N + \mathbb{Z}a = \mathbb{Q}$ olup X, $\mathbb{Q}$ nun bir üreteç kümesidir. $\mathbb{Q} = \langle X \rangle = \langle X \setminus \{a\} \rangle = \langle N \rangle = N$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ modülünün maksimal alt modülü olmadığından Rad(${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$) = ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ dur [3].

2.8.14. Teorem M bir R-modül olsun. Bu takdirde $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ dir [3].

İspat. Herhangi bir $L \ll M$ alt modülünü ele alalım. Eğer M nin bir K maksimal alt modülü L yi içermezse $K + L = M$ olup $K = M$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla L M nin bütün maksimal alt modüllerinde içerilir ki $L \subseteq Rad(M)$ olur. Buradan da $\sum_{L \ll M} L \subseteq Rad(M)$ bulunur. Şimdi de ters kapsamayı gösterelim. $\forall m \in Rad(M)$ için $< m >= Rm \ll M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $m \in Rad(M)$ olsun. Kabul edelim ki Rm, M de küçük olmasın. Bu durumda $Rm + L = M$ olacak şekilde $\exists L \neq M$ alt modülü vardır. Bu durumda $S = \{L | m \notin L, Rm + L = M\}$ kümesi boştan farklıdır. Bu kümede kapsama bağıntısına göre her zincirin bir üst sınırı olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki K, S nin bir zinciri ve $C = \cup_{B \in K} B$ olsun. Bu takdirde C, M nin bir alt modülüdür. $M \neq C$ olduğunu gösterelim. $M = C$ olsun. $m \in C = \bigcup_{B \in K} B$ $için\, m \in B$ olacak şekilde $\exists B \in K \subset S$ mevcuttur. Buradan $B = Rm + B = M$ olur ki $B \in S$ olmasıyla çelişir. Dolayısıyla $M \neq C$ dir. C nin K da bir üst sınır olduğu açıktır. Dolayısıyla Zorn Lemması gereği S, P gibi bir maksimal eleman içerir. Burada P nin M de maksimal alt modül olduğu açıktır. Böylece $m \notin P$ olduğundan $m \in Rad(M) \subseteq P$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $< m >= Rm \ll M$ olmak zorundadır.

$Rad(M) = 0$ ise M nin 0 dan başka küçük alt modülünün olmadığı açıktır [3].

2.8.15. Teorem M bir R-modül olsun. Eğer M nin her özalt modülü bir maksimal alt modülde içerilirse bu takdirde $Rad(M) \ll M$ dir [3].

İspat. $Rad(M) + L = M$ olan herhangi bir L alt modülü için eğer $L \neq M$ olsa, hipotez gereği L bir K maksimal alt modülde içerilmiş olur. Buradan da $L \subseteq K$ ve $Rad(M) \subseteq K$ olduğundan $M = Rad(M) + L \subseteq K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $L = M$ olup $Rad(M) \ll M$ dir.

2.8.16. Sonuç M sonlu üretilmiş R-modül ise $Rad(M) \ll M$ dir [3].

2.8.17. Lemma M modül olsun. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için N_i modülleri M nin $N \leq M$ alt modülünü kapsayan alt modüller ise $\bigcap_{i\in I}(N_i/N) = (\bigcap_{i\in I} N_i)/N$ dir [15].
İspat. Herhangi bir $m + N \in \bigcap_{i\in I}(N_i/N)$ elemanı ve her $i \in I$ için $m + N \in N_i/N$ olup $m \in N_i$ dir. Buradan $m \in \bigcap_{i\in I} N_i$ olur ki $m + N \in (\bigcap_{i\in I} N_i)/N$ elde edilir. Tersine; benzer işlemler yapılarak eşitlik gösterilebilir.

2.8.18. Teorem

(i) M ve N birer modül ve $f \in Hom(M, N)$ olsun. Bu takdirde, $f(Rad(M)) \leq Rad(N)$ dir. Eğer $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise, $f(Rad(M)) = Rad(f(M))$ dir;

(ii) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ dır;

(iii) $U \leq V \leq M$ ise $Rad(U) \leq Rad(V)$ dir;

(iv) $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ ise $Rad(M) = \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i)$ dir;

(v) $N \leq M$ ise, $(N + Rad(M))/N \leq Rad(M/N)$ ve $N \leq Rad(M)$ ise, $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ dir;

(vi) M nin radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş alt modülünün M de küçük olmasıdır [7],[15].

İspat. (i) $Rad(M) = \sum_{L\ll M} L$ olduğundan $f(Rad(M)) = \sum_{L\ll M} f(L)$ dir. Teorem 2.7.4 den $f(L) \ll N$ olur. Sonuç olarak $f(Rad(M)) \leq Rad(N)$ elde edilir. $m \in Rad(M)$ ise, Sonuç 2.8.16 dan $Rm \ll M$ olup $f(Rm) = Rf(m) \ll f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(m) \in Rad(f(M))$ olup $f(Rad(M)) \leq Rad(f(M))$ olur. Şimdi ise herhangi bir $f(m) \in Rad(f(M))$ alalım. Sonuç 2.8.16 dan $Rf(m) \ll f(M)$ dir. Kabul edelim ki $m \notin Rad(M)$ olsun. Bu takdirde

Lemma 2.8.17 den $Rm + K = M$ olacak şekilde M nin K maksimal alt modülü vardır. Buradan $Rf(m) + f(K) = f(M)$ olup $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ elde edilir. Teorem 2.7.4 den $M = K + Çek(f)$ olup $Çek(f) \leq Rad(M) \leq K$ olduğundan $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in Rad(M)$ olmalıdır. O halde $f(m) \in f(Rad(M))$ olur. Sonuç olarak $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ bulunur.

(ii) Sonuç 2.3.15.(ii) den M nin maksimal alt modülleriyle $M/Rad(M)$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu takdirde, X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M))$ Lemma 2.8.17 den $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M)) = (\bigcap_{U \in X} U)/Rad(M) = Rad(M)/Rad(M) = 0$ elde edilir.

(iii) $m \in Rad(U)$ olsun. Bu takdirde, $Rm \ll U$ ve $U \leq V$ olduğundan Teorem 2.7.3 gereğince $Rm \ll V$ olup Sonuç 2.8.16 dan $m \in Rad(V)$ dir.

(iv) (iii) gereğince $M_i \leq M \Longrightarrow Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir. Buradan $\sum_{i \in I} Rad(M_i) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$ olur. Tersine; $m = \sum_{i \in I} m_i \in Rad(M)$ elemanını alalım. $\pi_i(m) = m_i$ ile tanımlı $\pi_i : M \longrightarrow M_i$ i.projeksiyon olmak üzere (i) gereğince $\pi_i(m) = m_i \in Rad(M_i)$ dir. Böylece $m \in \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ olur. Sonuç olarak $\bigoplus_{i \in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ bulunur.

(v) $p: M \rightarrow M/N$ doğal homomorfizmasını alalım. (i) den $p(Rad(M)) = (Rad(M) + N)/N \leq Rad(M/N)$ dir. $Çek(p) = N \leq Rad(M)$ olup tekrar (i) kullanılırsa $p(Rad(M)) = (Rad(M) + N)/N = Rad(M)/N$ dir. Aynı zamanda $Rad(p(M)) = Rad(M/N)$ olduğundan $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ bulunur.

(vi) $M = Rad(M)$ ise, her $m \in M$ için Sonuç 2.8.16 gereği $Rm \ll M$ olur. Buradan M nin sonlu üretilmiş her öz alt modülü M de küçük olur. Tersi Sonuç 2.8.16 dan açıktır.

2.8.19. Tanım M modül olsun. M modülünün her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanıyor ise, M modülüne **eş atom modül** denir [18].

2.8.20. Teorem M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde,

(i) M eş atom ise, $Rad(M) \ll M$ dir.

(ii) M eş atom ise, M/N eş atomdur.

(iii) N ve M/N eş atom ise, M eş atomdur [18].

2.8.21. Tanım Herhangi bir R halkası için, sıfırdan farklı her sol R-modül maksimal alt modüle sahip ise R ye **sol maksimal halka** denir [12].

R sol maksimal halka olsun. Bu durumda her sol R-modül eş atomdur.

2.8.22. Önerme R halka ve P sıfırdan farklı projektif bir R-modül olsun. Bu takdirde $Rad(R)P = Rad(P)$ ve $Des(R)P = Des(P)$ dir [15].

İspat. P bir $F = R^{(I)}$ serbest modülünün direkt toplam terimidir. O halde $F = P \oplus N$ olacak şekilde bir N modülü vardır. Bu takdirde $Rad(R) = J$ olmak üzere $JF = J(R^{(I)}) = J^{(I)} = JP \oplus JN$ yazılabilir. Teorem 2.8.18.(iii) den $Rad(P) \leq J^{(I)}$ dir. $JM \leq Rad(P)$ olduğundan Modüler Kuralı ile $Rad(P) = Rad(P) \cap J^{(I)} = JP \oplus (Rad(P) \cap JN)$ olup $JP = Rad(P)$ elde edilir. Şimdi $Des(R)P = Des(P)$ eşitliğini gösterelim. $Des({}_RR)P \subseteq Des(P)$ olduğunu biliyoruz. Herhangi bir $x \in Des(P)$ alalım. P projektif olduğundan yerel projektif olup $f_1(x)y_1 + f_2(x)y_2 + \cdots + f_n(x)y_n = x$ olacak şekilde $f: P \longrightarrow R$ homomorfizma ve $1 \leq i \leq n$ için $y_i \in P$ vardır. Ayrıca $f_i(Des(P)) \subseteq Des({}_RR)$ olduğundan $f_i(x) \in Des({}_RR)$ dir. O halde $x \in Des({}_RR)P$ dir. Böylece $Des(P) \subseteq Des({}_RR)P$ bulunur. $Des({}_RR)P = Des(P)$ elde edilir.

2.9. Yerel ve Oyuk Modüller

2.9.1. Tanım M bir R-modül olsun. Eğer M nin her öz alt modülü M de küçük alt modül ise, M ye **oyuk modül** denir [15].

2.9.2. Teorem Oyuk modüllerin her bölüm modülüde oyuktur [15].

İspat. M bir oyuk R-modül, M / K da herhangi bir bölüm modülü olsun. $N/K \subset M/K$ bir öz alt modül olsun. Bu durumda N, M nin özalt modülü olup $N \ll M$ bulunur $N/K + H / K = M / K$ olan herhangi bir $H \leq M$ alt modülü verilsin. Bu durumda $(N + H)/K = M/K$ olduğundan $N + H = M$ olur. Bu durumda $N \ll M$ olduğundan $H = M$ olup $H / K = M / K$ olur ki $N / K \ll M / K$ dir.

2.9.3. Tanım M bir R-modül olsun. Eğer M modülünün tüm öz alt modüllerini içeren bir en geniş öz alt modülü varsa M modülüne **yerel modül** denir. R (sol) R-modül olarak yerel modül ise R halkasına **yerel halka** denir [15].

2.9.4. Teorem M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. Bu takdirde aşağıdakiler denktir.

(i) M oyuktur ve $Rad\ (M)\ \neq M$ dir;

(ii) M oyuktur ve devirlidir (veya sonlu üretilmiştir);

(iii) M yereldir [15].

İspat. (i) ⇒ (ii) $Rad(M)\ \neq M$ olduğundan M nin bir K maksimal alt modülü vardır. K maksimal olduğundan $\forall m \in M \setminus K$ için $K\ +\ Rm\ = M$ dir. Ayrıca M oyuk olduğundan $K \ll M$ olup $Rm = M$ bulunur. Dolayısıyla M devirlidir.

(ii) ⇒ (iii) M devirli ise sonlu üretilmiştir. Dolayısıyla $Rad(M)\ \neq M$ dır. Böylece M nin bir N maksimal alt modülü vardır. Şimdi bu N maksimal alt modülün bütün diğer öz alt modülleri içerdiğini gösterirsek ispat tamamlanmış olur. K, M nin herhangi bir öz alt modülü olsun. Eğer $K \not\subset N$ olsaydı N maksimal olduğundan $K + N = M$ olup M oyuk olduğundan $N = M$ bulunur. Buradan $K \subset N$ olmak zorundadır. Yani N, M nin bütün diğer öz alt modüllerini içerir. Ayrıca N öz alt modül olduğundan M yereldir.

(iii) ⇒ (i) M yerel olsun. Bu takdirde M nin diğer öz alt modüllerini içeren bir N öz alt modülü vardır. $N + L = M$ için eğer $L \neq M$ olsa, $L \subset N$ olup $N = M$ olurdu. Dolayısıyla $N + L = M$ şartını sağlayan her L alt modülü için $L = M$ olur. Yani $N \ll M$ dır. Şimdi M nin herhangi bir K öz alt modülünü alırsak $K \subset N$ ve $N \ll M$ olduğundan $K \ll M$ olur. Dolayısıyla M oyuk olup $Rad(M) = N \neq M$ dır.

2.9.5. Teorem Sıfırdan farklı M R-modülünün yerel olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş (devirli) ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M nin maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir [15].

İspat. M yerel bir modül ve M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K ise $K\ \neq M$ dir. Bu takdirde, en az bir $m \in M$ vardır ki $m \notin K$ olup $Rm \nsubseteq K$ dır. K nın tanımı gereği $Rm\ =\ M$ olup M devirlidir. Ayrıca K alt modülünün bir tek maksimal alt modül olduğu açıktır. Tersine, M devirli ve M bir tek K maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan M modülünün her öz alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K olup M yerel modüldür. Bir modülün radikali tanımı gereği $Rad(M) = K$ olup M devirli olduğundan $Rad(M) \ll M$ olduğu açıktır.

2.9.6. Sonuç M modülünün yerel olması için gerek ve yeter koşul M modülünün sonlu üretilmiş ve $M/Rad(M)$ bölüm modülünün basit olmasıdır [15].

2.9.7. Önerme M modülünün yerel olması için gerek ve yeter koşul M sonlu üretilmiş ve $Rad(M)$, M nin tek maksimal alt modülüdür [15].

2.9.8. Sonuç R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) R yerel halkadır;
(ii) R tek maksimal sol ideale sahiptir;
(iii) $Rad(R)$, R nin maksimal sol idealidir;
(iv) R halkasının birim olmayan elemanlarının kümesi toplama işlemi altında kapalıdır;
(v) $Rad(R)$, R nin maksimal sağ idealdir;
(vi) $R/Rad(R)$ bölme halkasıdır [7],[15].

2.9.9. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. $M/Rad(M)$ yarı basit ise, M modülüne **yarı-yerel modül** denir. R halkası sol (sağ) R-modül olarak yarı-yerel ise, bu durumda R halkasına **yarı-yerel halka** denir [5].

2.9.10. Teorem R yarı yerel halka ve M herhangi bir sol R-modül olsun. Bu takdirde, $Rad(M) = Rad(R)M$ dir [16].

2.10. Yerel Artin Modüller

2.10.1. Tanım Her sonlu üretilmiş alt modülü Artin olan modüle **yerel Artin modül** denir [15].

2.10.2. Teorem 1) $0 \longrightarrow N' \longrightarrow N \longrightarrow N'' \longrightarrow 0$ kısa tam dizisi olmak üzere;

i) N (yerel) Artin ise N' ve N'' (yerel) Artin modüllerdir,
ii) N' ve N'' Artin modül ise N Artindir.
iii) N' Artin modül ve N'' yerel Artin modül ise N yerel Artin modüldür.

2) Yerel Artin modüllerin herhangi sayıdaki direkt toplam terimi yerel Artin modüldür.

3) M yerel Artin modül ise $M/_{Rad(M)}$ yarı - basit modüldür [15].

2.10.3. Sonuç i) Yerel Artin modülün her alt modülü yerel Artindir,

ii) Yerel Artin modülün homomorfik görüntüsü yerel Artin modüldür [15].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Tümlenmiş ve Bol Tümlenmiş Modüller

3.1.1. Tanım M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olacak şekilde bir V alt modülü var ve V bu şarta göre minimal ise, yani $U + L = M$ koşulunu gerçekleyen her $L \leq V$ için $L = V$ ise, V ye M de U nun **tümleyeni** ve U ya M de **tümleyene sahiptir** denir. Eğer $M = U + V$ koşulunu gerçekleyen her V alt modülü için U nun M de V tarafından kapsanan bir tümleyeni varsa, U ya M de **bol tümleyene sahiptir** denir [15].

M modül ve $N \ll M$ olsun. Bu takdirde, küçük alt modül tanımından görüleceği üzere M, N alt modülünün tümleyenidir. Dolayısıyla modülün kendisi sıfırının tek tümleyenidir.

3.1.2. Teorem L modülünün K nin bir tümleyeni olması için gerek ve yeter şart $K + L = M$ ve $K \cap L \ll L$ olmasıdır [15].

İspat. ($\Rightarrow$) $L,\ K$ alt modülünün bir tümleyeni olsun. Bu durumda tanıma göre $K + L = M$ dır. $N \leq L$ alt modülü için $K \leq L + N = L$ olsun. Bu durumda $K + (K \cap L) + X = M$ ve $K + N = M$ bulunur. $X \leq L$ olduğundan L nin minimalliği göz önünde bulundurulursa $N = L$ bulunur. Yani $(K \cap L) + N = L$ şartını sağlayan her $N \leq L$ alt modülü için $N = L$ olur. Sonuç olarak $K \cap L \ll L$ dir.

($\Leftarrow$) $K + L = M$ ve $K \cap L \leq L$ olsun. $K + N = M$ şartını sağlayan her $N \leq L$ alt modülü için $N = L$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $N \leq L$ ve $K + N = M$ olan herhangi N alt modülünü ele alalım. Eşitliğin her iki tarafının L ile arakesitini ele alırsak $(K + N) \cap L = M \cap L = L$ bulunur. Bu durumda Modüler kuralına göre $(K + N) \cap L = (K \cap L) + N$ olup $(K \cap L) + N = L$ olur. $K \cap L \ll L$ olduğundan $N = L$ bulunur ki bu da istenendir.

3.1.3. Teorem V, U modülünün M de bir tümleyeni, $W \leq U$ alt modülü için $W + V = M$ ise $V,\ W$ nın da M de bir tümleyenidir [15].

3.1.4. Teorem V bir U modülünün M de bir tümleyeni ve U modülü maksimal alt modülü ise V devirlidir ve $U \cap V,\ V$ nin tek maksimal alt modülüdür. Bu durumda $U \cap V = Rad(V)$ dır [15].

3.1.5. Teorem V modülü, U nun M de bir tümleyeni ve $K \ll M$ ise V, $U + K$ nın da bir tümleyenidir [15].

İspat. $U + V = M$ olduğundan $U + K + V = M$ dir. Şimdi $X \leq V$ alt modül olmak üzere, $U + K + X = M$ olsun. Buradan $K + U + X = M$ olup $K \ll M$ olduğundan $U + X = M$ bulunur. $X \leq V$ ve V, U nun bir tümleyeni olduğundan V nin minimalliği gereği $X = V$ dir. Dolayısıyla V, $U + K$ nın bir tümleyenidir.

3.1.6. Teorem V, U nun M içinde bir tümleyeni ve $K \ll M$ ise $K \cap V \ll V$ dır [15].

İspat. $X \leq V$ alt modülü için $K \cap V + X = V$ olsun. Buradan $U + K \cap V + X = M$ olup $U + K + X = M$ olur. $K \ll M$ olduğundan Teorem 3.1.3 gereği V, $U + K$ nın bir tümleyenidir.
Bu taktirde ise $(U + K) \cap V \ll V$ olup $K \cap V \subset (U + K) \cap V$ olduğundan $K \cap V \ll V$ dir.

3.1.7. Teorem V, U nun M de tümleyeni ve K, V nin maksimal alt modülü ise $U + K$ da M nin maksimal alt modülüdür. Bu durumda $K = (U + K) \cap V$ dir [15].

3.1.8. Teorem M bir R-modül ve V, M nin bir alt modülü olsun. Eğer K, M nin maksimal alt modülü ve $V \not\subset K$ ise $V \cap K$ da V nin maksimal alt modülüdür [15].

3.1.9. Sonuç U bir M modülünde sıfırdan farklı bir tümleyeni bulunan alt modül ve $Rad(M) \ll M$ ise U, M nin bir maksimal alt modülünde içerilir [15].

3.1.10. Sonuç V, M içinde herhangi bir alt modülün tümleyeni ise $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir [15].

3.1.11. Teorem V, U nun M içinde bir tümleyeni ve $L \leq U$ ise $(V + L)/L$ de U/L nin M/L içinde bir tümleyenidir [15].

İspat. $(V + L)/L$ ve U/L, M/L nin alt modülleridir. V, U nun M de tümleyeni olduğundan $V + U = M$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Buradan $(V + L)/L + U/L = M/L$ elde edilir. Ayrıca $\{(U/L) \cap [(V + L)/L]\} + K/L = (V + L)/L$ olacak şekilde $K/L \leq (V +$

$L)/L$ olsun. Modüler Kuralına göre $(L+(U\cap V)+K)/L=(V+L)/L$ ve $L\leq K$ olduğundan, $(U\cap V)+K=V+L$ dir. Böylece $(U/L)\cap[(V+L)/L]\ll(V+L)/L$ olup $(V+L)/L$, U/L nin M/L de tümleyenidir.

3.1.12. Tanım Bir M, R-modülünün her alt modülü bir tümleyene sahipse M modülüne **tümlenmiş modül** denir [18].

3.1.13. Lemma M bir R modül, M_1 ve U M nin alt modülleri ve M_1 tümlenmiş olsun. Eğer M_1+U nun M de bir tümleyeni varsa U nun da bir tümleyeni vardır [15].

İspat. M_1+U nun M içindeki tümleyeni X, ve $M_1\cap(U+X)$ alt modülünün M_1 deki tümleyeni Y olsun. Bu takdirde X, M_1+U nun M deki tümleyeni olduğundan $(M_1+U)+X=M$, $(M_1+U)\cap X\ll X$ ve Y, $M_1\cap(U+X)$ in M_1 deki tümleyeni olduğundan $M_1\cap(U+X)+Y=M_1$ ve $[M_1\cap(U+X)]\cap Y\ll Y$ dir. Buradan $M_1\cap(U+X)+U+Y=M_1+U=M$ olduğundan $U+X+Y=M$ elde edilir. Diğer yandan, $U\cap(X+Y)\leq X\cap(U+Y)+Y\cap(U+X)$ olup $Y<M_1$ ve $Y\cap(U+X)\ll Y$ olduğundan $U\cap(X+Y)\ll X+Y$ olup $X+Y$, U nun M deki tümleyenidir.

3.1.14. Teorem M_1 ve M_2 bir M R-modülünün alt modülleri olmak üzere, $M=M_1+M_2$ ve M_1 ve M_2 tümlenmiş iseler M de tümlenmiştir [15].

İspat. U, M nin herhangi bir alt modülü olsun . V de $(M_1+U)\cap M_2$ nin M_2 de bir tümleyeni olsun. Bu durumda $M=M_1+M_2=M_1+(M_1+U)\cap M_2+V=M_1+U+V$ bulunur. Ayrıca V, $(M_1+U)\cap M_2$ nin M_2 de bir tümleyeni olduğundan $(M_1+U)\cap V=[(M_1+U)\cap M_2]\cap V\ll V$ olur. Dolayısıyla V, M_1+U nun M de bir tümleyenidir. Yani M_1+U nun M içinde tümleyeni vardır. M_1 tümlenmiş olduğundan Teorem 3.1.9 gereği U nun da M içinde tümleyeni vardır. Dolayısıyla M tümlenmiştir.

3.1.15. Teorem Tümlenmiş bir modülün homomorfik görüntüsü de tümlenmiştir [15].

3.1.16. Teorem Oyuk modüller tümlenmiştir [15].

3.1.17. Teorem M bir R-modül olsun. Bu takdirde $Rad(M)=M$ olması için gerek ve yeter şart M nin her sonlu üretilmiş alt modülünün M de küçük olmasıdır [15].

İspat: ($\Rightarrow$) $Rad(M) = M$ olsun. $\forall m \in M$ için $Rm \ll M$ dir. M nin herhangi bir K sonlu üretilmiş alt modülünü ele alalım. O halde $K = < \{k_1, k_2, \dots k_n\} >$ olacak şekilde $k_1, k_2, \dots k_n \in K$ bulunabilir. $K \subset Rk_1 + Rk_2 + \dots + Rk_n$ olduğu gösterilebilir.

$$Rk_1 \ll M$$

$$Rk_2 \ll M$$

$$.$$

$$.$$

.

$$Rk_n \ll M$$

olduğundan , $K \subset Rk_1 + Rk_2 + \dots + Rk_n \ll M$ olup $K \ll M$ bulunur.

($\Leftarrow$) M nin her sonlu üretilmiş alt modülü M de küçük olsun. O halde her $m \in M$ için $Rm \ll M$ olur. Eğer K, M nin bir maksimal alt modülü olsa $\forall m \in M \setminus K$ için $Rm + K = M$ olup $Rm \ll M$ olduğundan $K = M$ olurdu ki bu da bir çelişkidir.

3.1.18. Sonuç Yerel modüller tümlenmiştir [15].

3.1.19. Tanım $\{M_i\}_{i \in I}$ herhangi bir R-modülün alt modülleri ailesi olmak üzere $\sum_{i \in I} M_i$ toplamı için, eğer $\forall i_0 \in I$ için $\sum_{i \neq i_0} M_i \neq \sum_{i \in I} M_i$ oluyorsa $\sum_{i \in I} M_i$ toplamına **kısaltılamayandır** denir [15].

3.1.20. Teorem Bir M R-modülü için aşağıdaki ifadeler denktir;

(i) M oyuk alt modüllerin bir toplamıdır ve $Rad(M) \ll M$ dir.

(ii) M yerel modüllerin kısaltılamayan bir toplamıdır ve $Rad(M) \ll M$ dır.

(iii) M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde içerilir ve

(a) Her maksimal alt modülün M de bir tümleyeni vardır veya

(b) M / K sonlu üretilmiş olmak üzere M nin her K alt modülü M de bir tümleyene sahiptir [8].

3.1.21. Sonuç Her M sonlu üretilmiş R-modülü için aşağıdakiler denktir;

(i) M tümlenmiştir,

(ii) M nin her maksimal alt modülünün M de bir tümleyeni vardır,

(iii) M oyuk modüllerin bir toplamıdır,

(iv) M yerel modüllerin kısaltılamayan bir toplamıdır [8].

3.1.22. Sonuç M modülü tümlenmiş ve $Rad(M) \ll M$ ise M yerel modüllerin kısaltılamayan toplamıdır [15].

3.1.23. Teorem U bir M R-modülünün alt modülü olsun. Eğer $U + V = M$ şartını sağlayan her V alt modülü için U nun $V' \subseteq V$ olan bir V' tümleyeni varsa U nun M içinde bol tümleyeni vardır [15].

3.1.24. Tanım M bir R-modül olsun. Eğer M nin her alt modülü bol tümleyene sahipse M ye **bol tümlenmiştir** denir [15].

3.1.25. Sonuç M bol tümlenmiş ise tümlenmiştir [15].

3.1.26. Teorem M bol t ümlenmiş R-modül, M de herhangi bir alt modülün bir tümleyeni olsun. Bu takdirde M de bol tümlenmiştir [15].

3.1.27. Teorem M bol tümlenmiş bir R-modül ise, M nin her direkt toplam terimi ve her bölüm modülü de bol tümlenmiştir [15].

3.1.28. Sonuç M R-modülü bol tümlenmiş ise M-modülünün homomorfik görüntüsü de bol tümlenmiştir [15].

3.1.29. Teorem M bol tümlenmiş bir R-modül olsun. Bu takdirde Mi, L_i ler yerel alt modüller ve K, $Rad\,(K) = K$ şartını sağlayan alt modül olmak üzere $M = \sum_{i\in I} L_i + K$ kısaltılamayan toplam şeklinde yazılabilir. $M/Rad(M)$ bölüm modülü sonlu üretilmiş ise, toplam sonlu olur [15].

3.1.30. Teorem M bir R-modül ve $M = U_1 + U_2$ olsun. Eğer U_1 ve U_2 bol tümleyene sahip ise, $U_1 \cap U_2$ de bol tümleyene sahiptir [15].

3.1.31. Teorem Bir M R-modülü için aşağıdakiler denktir;

(i) M bol tümlenmiştir,

(ii) M nin her U alt modülü X tümlenmiş ve $Y \ll M$ olmak üzere $U = X + Y$ şeklinde yazılabilir,

(iii) M nin her U alt modülü için $U/X \ll M/X$ olacak şekilde bir $X \subseteq U$ tümlenmiş alt modülü vardır [15].

3.1.32. Teorem M modülü için aşağıdakiler denktir:

(a) M tümlenmiş ve π-projektiftir;

(b) (i) M bol tümlenmiştir;

(ii) Birbirinin tümleyenleri olan alt modüllerin kesişimleri sıfırdır;

(c) (i) M nin her alt modülü bir direkt toplam terimi üzerindedir;

(ii) $M = U + V$ olacak şekilde U ve V alt modülleri direkt toplam terimleri iseler $U \cap V$ de M nin direkt toplam terimidir;

(d) $M = U + V$ olacak şekilde U ve V alt modülleri için $\alpha(M) \subset U$, $(1_M - \alpha)(M) \subset V$ ve $(1_M - \alpha)(U) \ll (1_M - \alpha)(M)$ koşullarını sağlayan $e \in End(M)$ vardır [15].

3.2. ss-Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım M modülü $Rad(M) \subseteq Des(M)$ koşulunu sağlayan yerel modül olsun. Bu takdirde, M modülüne **güçlü yerel modül** denir. R halkası sol R-modül olarak güçlü yerel modül ise, R halkasına sol **güçlü yerel halka** denir. O halde aşağıdaki diyagram sağlanır.

basit modül ⟹ güçlü yerel modül ⟹ yerel modül

Örneğin; $M = \mathbb{Z}_4$ yerel sol $\mathbb{Z}$-modülü olsun. $Rad(M) = Des(M) = \{\overline{0}, \overline{2}\} =< \overline{2} >$ olduğundan M güçlü yerel modüldür fakat basit değildir. Diğer taraftan; $M = \mathbb{Z}_8$ yerel sol $\mathbb{Z}$-modülü için $\{\overline{0}, \overline{2}\} = Des(M) \subseteq Rad(M) = \{\overline{0}, \overline{2}\, \overline{4}, \overline{6}\}$ olduğundan M güçlü yerel modül değildir [8].

3.2.2. Önerme M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, M nin her bölüm modülü güçlü yerel modüldür [8].

3.2.3. Tanım M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(M) = \sum\{N \ll M \,|N,\ M\ nin\ basit\ alt\ mod\ddot{u}\text{lü}\}$ olarak tanımlanır [16].

3.2.4. Tanım M modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ şartları sağlanıyor ise, V ye U nun **ss-tümleyeni** denir [8].

3.2.5. Lemma M bir modül $U, V \leq M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdakiler denktir:

(i) V, U alt modülünün M de ss-tümleyenidir;

(ii) $M = U + V, U \cap V \subseteq Rad(V)$ ve $U \cap V$ yarı basittir;

(iii)$M = U + V, U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir [8].

İspat. (i)⟹(ii) V, U nun ss-tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(V) \subseteq Rad(V)$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(V) \subseteq Des(V)$ olduğundan, $U \cap V$ basit alt modüllerin toplamı olup $U \cap V$ yarı basittir.

(ii)⟹(iii) $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Rad(V)$ ve $U \cap V$ yarı basit olsun. $U \cap V \ll V$ olduğunu gösterelim. $(U \cap V) + K = V$ koşulunu sağlayan $K \leq V$ için $K = V$ olduğunu göstermeliyiz. Bunun için $K \leq V \Longrightarrow U \cap K \leq U \cap V$ dir. Buradan $U \cap V$ yarı basit olduğundan $(U \cap K) \oplus L = U \cap V$ olacak şekilde $L \leq U \cap V$ vardır. Sonuç (i) den L yarı basittir. Yarı basit modüllerin tek küçük alt modülü 0 olduğundan $Rad(L) = 0$ dır. Buradan $V = (U \cap V) + K = \big((U \cap K) \oplus L\big) + K = L \oplus K$ olur. Diğer yandan $U \cap V \subseteq Rad(V) = Rad(L) \oplus Rad(K) = Rad(K) \subseteq K$ dır. Hem $U \cap V \subseteq K$ hem de $V = (U \cap V) + K$ olduğundan $K = V$ bulunur. Böylece $U \cap V \ll V$ olur.

(iii)⟹(i) $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basit olsun. $U \cap V \subseteq Des_s(V)$ olup istenen elde edilir.

Dolayısıyla Lemma 3.2.5 den görüldüğü gibi ss-tümleyen alt modüller tümleyen alt modüllerden daha güçlü bir kavramdır. Böylece aşağıdaki diyagramı elde ederiz.

ss-tümleyen $\Longrightarrow$ tümleyen

3.2.6. Tanım M modül ve $U \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ şartını sağlayan bir V alt modülü için U nun $V' \leq V$ olan bir V' ss-tümleyeni varsa *U, M* de **bol ss-tümleyene sahiptir** denir [8].

3.2.7. Tanım M modül olsun. Eğer M nin her alt modülü (bol) ss-tümleyene sahipse, M modülüne **(bol) ss-tümlenmiş modül** denir [8].

3.2.8. Önerme M modül ve U, M nin maksimal alt modülü olsun. V, U alt modülünün M modülünde ss-tümleyeni ise, V güçlü yerel modüldür [8].
İspat. V, U nun M de ss-tümleyeni olsun. $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basittir. U maksimal alt modülü ve V, U nun tümleyeni olduğundan V yerel modüldür. Yani $Rad(V)$, V nin tek maksimali ve $Rad(V) \ll V$ dir. Diğer yandan $M/U \cong V/U \cap V$ basit olup $U \cap V$, V nin maksimali olup $U \cap V = Rad(V)$ olur. 1. durum: $U \cap V = 0$ ise $Rad(V) = 0$ ve V yerel modül olduğundan V basittir. $Rad(V) \subseteq Des(V)$ kapsaması sağlanır.2. durum: $U \cap V \neq 0$ ise V yerel modül olduğundan $Des(V) \subseteq Rad(V) = U \cap V$ ve $U \cap V$ yarı basit olduğundan $U \cap V \subseteq Des(V)$ olur. Böylece $Des(V) = Rad(V)$ bulunur.
Her iki durumda da V yerel ve $Rad(V) \subseteq Des(V)$ olduğundan V güçlü yerel modüldür.

3.2.9. Önerme M herhangi bir ss-tümlenmiş modül ve $N \ll M$ ise $N \subseteq Des_s(M)$ dir [8].

3.2.10. Sonuç M ss-tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [8].
İspat. M ss-tümlenmiş ve $Rad(M) \ll M$ olduğundan M, $Rad(M)$ nin ss-tümleyenidir. Dolayısıyla, $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$ ve $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarı basit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ elde edilir.

3.2.11. Lemma M tümlenmiş modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu taktirde, M modülü ss-tümlenmiştir [8].

İspat. N, M nin keyfi bir alt modülü olsun. Hipotez gereğince M nin $M = N + K$ ve $N \cap K \ll K$ koşullarını sağlayan K alt modülü vardır. $N \cap K \ll K$ olduğundan $N \cap K \subseteq Rad(K) \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ kapsaması yardımıyla $N \cap K$ nın M nin yarı basit alt modülü olduğu görülür. Böylece $N \cap K \subseteq Des_s(M)$ olup M ss-tümlenmiştir.

3.2.12. Önerme Her güçlü yerel modül ss-tümlenmiştir [8].

İspat. M güçlü yerel modül olsun. Bu takdirde, M yereldir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir. M yerel olduğundan tümlenmiştir ve Lemma 3.2.5 den M ss-tümlenmiştir.

3.2.13. Önerme M oyuk modül olsun. Bu takdirde, M nin ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin güçlü yerel modül olmasıdır [8].

3.2.14. Örnek p asal tamsayı ve sol $\mathbb{Z}$-modül $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{p^n}$ yerel olmayan oyuk modülü ele alırsak herhangi n doğal sayısı için $c_n = \frac{1}{p^n} + \mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olsun. $pc_1 = 0$, $pc_2 = c_1$,..., $pc_{n+1} = c_n$,... Buradan $\{c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots\}$ kümesinin $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ modülünü ürettiği açıktır. Hatta $\mathbb{Z}_{p^\infty} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \langle c_n \rangle$ dir. $\langle c_1 \rangle \subseteq \langle c_2 \rangle \subseteq \cdots$ olup $\langle c_1 \rangle = \langle \frac{1}{p} + \mathbb{Z} \rangle = Des(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ dır. Ayrıca $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ maksimal alt modüle sahip değildir. $Rad(\mathbb{Z}_{p^\infty}) = \mathbb{Z}_{p^\infty}$ olup $Rad(\mathbb{Z}_{p^\infty}) \nsubseteq Des(\mathbb{Z}_{p^\infty})$ olur. Böylece $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ ss-tümlenmiş modül değildir [8].

3.2.15. Teorem M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M ss-tümlenmiştir;

(ii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir;

(iii) M tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [8].

3.2.16. Sonuç M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu takdirde, M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır [8].

3.2.17. Örnek p asal tamsayı olmak üzere $M = \mathbb{Z}_{p^k}$ $(k \geq 1)$ yerel $\mathbb{Z}$-modülünü ele alalım.

1.durum: $k = 1$ ise, M basit olup M ss-tümlenmiştir.

2.durum: $k = 2$ ise, M basit değildir ve $Rad(\mathbb{Z}_{p^2}) = Des(\mathbb{Z}_{p^2}) \cong \mathbb{Z}_p$ olup M ss-tümlenmiştir.

Örneğin; $k = 2$ ve $p = 2$ için $\mathbb{Z}_4$ ss-tümlenmiştir.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_4 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

$Des(\mathbb{Z}_4) = Rad(\mathbb{Z}_4) = \{\bar{0}, \bar{2}\}$ olur.

3.durum: $k \geq 3$ olsun. $Rad(\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_{p^{k-1}} \neq Des(\mathbb{Z}_{p^k}) \cong \mathbb{Z}_p$ olduğundan Sonuç 3.2.17 den M ss-tümlenmiş değildir. Örneğin; $k = 3$ ve $p = 2$ için $\mathbb{Z}_8$ tümlenmiştir. Fakat ss-tümlenmiş değildir.

$$\begin{array}{c} \mathbb{Z}_8 \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}, \bar{4}\} \\ \uparrow \\ \{\bar{0}\} \end{array}$$

$Des(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\} \cong \mathbb{Z}_2 \; ve \; Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_4$ olup $Des(\mathbb{Z}_8) \neq Rad(\mathbb{Z}_8)$ Ayrıca; $Des_s(\mathbb{Z}_8) = Des(\mathbb{Z}_8) \cap Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dir.

Böylece $\mathbb{Z}_8$ yerel $\mathbb{Z}$-modülü tümlenmiştir, fakat ss-tümlenmiş değildir. Diğer yandan $\mathbb{Z}_4$ yerel $\mathbb{Z}$-modülü ss-tümlenmiştir, fakat yarı basit değildir. Böylece ss-tümlenmiş modüller yarı basit modüllerin öz genellemesidir. Dolayısıyla aşağıdaki diyagramı elde edilir.

Yarı basit modüller $\Longrightarrow$ ss-tümlenmiş modüller $\Longrightarrow$ tümlenmiş modüller [8].

3.2.18. Lemma M bir R-modül, M_1 ve U, M nin alt modülleri ve M_1 ss-tümlenmiş olsun. Eğer $M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni varsa U nun da M de bir ss-tümleyeni vardır [8].

İspat. X, $M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni olsun. M_1 ss-tümlenmiş olduğundan $(X + U) \cap M_1$ inde M_1 de bir Y ss-tümleyeni vardır. Bu durumda $M = X + M_1 + U = U + X + M_1 = U + X + (X + U) \cap M_1 + Y = U + X + Y$ olur. Şimdi $(X + Y) \cap U \ll X + Y$ olduğunu gösterelim. $(X + Y) \cap U \leq X \cap (Y + U) + Y \cap (X + U)$ olduğu açıktır. Ayrıca X, $M_1 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni ve $Y \leq M_1$ olduğundan $X \cap (Y + U) \leq X \cap (M_1 + U) \ll X$ olup $X \cap (Y + U) \ll X$ olduğu görülür. Benzer şekilde Y alt modülü $M_1 \cap (X + U)$ nun M_1 de ss-tümleyeni olduğundan $Y \cap (X + U) = Y \cap [(X + U) \cap M_1] \ll Y$ olur. $(X + Y) \cap U \leq X \cap (Y + U) + Y \cap (X + U)$ olduğundan $(X + Y) \cap U \ll X + Y$ olur. Diğer yandan X alt modülü $M_1 + U$ nun M de ss-tümleyeni olduğundan $X \cap (M_1 + U)$ yarı basittir ve $Y \leq M_1$ olduğundan $X \cap (Y + U) \leq X \cap (M_1 + U)$ olup $X \cap (Y + U)$ yarı basittir. Benzer şekilde Y alt modülü $(X + U) \cap M_1$ in ss-tümleyeni olduğundan $Y \cap [(X + U) \cap M_1]$ yarı basittir. Öyleyse $Y \leq M_1$ olduğundan $Y \cap (X + U) = Y \cap [(X + U) \cap M_1]$ olduğundan $Y \cap (X + U)$ yarı basittir. Sonuç 3.2.16.(i) ve (iii) den $(X + Y) \cap U$ yarı basittir. Böylece $X + Y$ modülü U nun bir ss-tümleyenidir.

3.2.19. Önerme M_1 ve M_2, $M = M_1 + M_2$ şartını sağlayan M R-modülünün herhangi alt modülleri olsun. Bu takdirde, M_1 ve M_2 ss-tümlenmiş ise, M ss-tümlenmiştir [8].

İspat. U modülü M R-modülünün herhangi alt modülü olsun. 0 modülü $M = M_1 + M_2 + U$ nun ss-tümleyenidir. M_1 ss-tümlenmiş olduğundan $M_2 + U$ nun M de bir ss-tümleyeni vardır. Lemma 3.2.5 kullanılarak $M_2 + U$ nun M deki ss-tümleyeni yardımıyla U nun M de bir ss-tümleyeni olduğu görülür. O halde M nin her alt modülü ss-tümleyene sahip olup M ss-tümlenmiştir.

3.2.20. Sonuç $M_1, M_2, \dots M_n$ modülleri M R-modülünün ss-tümlenmiş alt modülleri ise, $M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ sonlu toplamı da ss-tümlenmiştir [8].

3.2.21. Örnek $M = \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4$ $\mathbb{Z}$-modülü güçlü yerel modüllerin toplamı olarak ss-tümlenmiş modüldür. Fakat M modülü güçlü yerel modül değildir [8].

Dolayısıyla sıradaki diyagram elde edilir.

$$\begin{tikzcd}
& \text{güçlü yerel modül} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\text{yerel modül} \arrow[dr] & & \text{ss-tümlenmiş modül} \arrow[dl] \\
& \text{tümlenmiş modül} &
\end{tikzcd}$$

3.2.22. Önerme M (bol) ss-tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde, M nin her bölüm modülü (bol) ss-tümlenmiştir [8].

İspat. M ss-tümlenmiş modül ve M/L, M nin bölüm modülü olsun. Hipotezden L yi içeren M nin U alt modülü için $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarı basit olacak şekilde M nin bir V alt modülü vardır. $\pi: M \longrightarrow M/L$ doğal homomorfizma olmak üzere $M/L = U/L + (V + L)/L$ ve $U/L \cap (V + L)/L = ((U \cap V) + L)/L = \pi(U \cap V) \ll \pi(V) = (V + L)/L$ olur. $U \cap V$ yarı basit olduğundan $\pi(U \cap V) = ((U \cap V) + L)/L = U/L \cap (V + L)/L$ yarı basittir. Yani $(V + L)/L$, M/L de U/L nin ss-tümleyenidir. Benzer ispat yöntemi kullanılarak M nin bol ss-tümlenmiş modül olması durumunda $L \leq M$ olmak üzere M/L bölüm modülünün de bol ss-tümlenmiş olduğu gösterilebilir.

3.2.23. Teorem I bir indis kümesi ve $i \in I$ için M_i güçlü yerel modül olmak üzere $M = \oplus_{i \in I} M_i$ modülü ss-tümlenmiş ve eş atomdur [8].

3.2.24. Sonuç M güçlü yerel modül olmak üzere her M-üretilmiş modül ss- tümlenmiştir ve eş atomdur [8].

3.2.25. Sonuç R sol güçlü yerel halka olsun. Bu takdirde, her sol R-modül ss-tümlenmiştir [8].

3.2.26. Teorem Herhangi bir M modülü için aşağıdakiler denktir:

(i) M tüm güçlü yerel alt modüllerin toplamıdır;

(ii) M ss-tümlenmiştir ve eş atomdur;

(iii) M eş atomdur ve M nin her eş sonlu alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir;

(iv) M eş atomdur ve M nin her maksimal alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir [8].

3.2.27. Sonuç M eş atom modülü için aşağıdakiler denktir.

(i) M güçlü yerel modüllerin toplamıdır.

(ii) M ss-tümlenmiştir.

(iii)M nin her maksimal alt modülü M de bir ss-tümleyene sahiptir [8].

3.2.28. Sonuç R sol maksimal halka ve M sıfırdan farklı sol R-modül olsun. Bu takdirde, M modülünün tüm güçlü yerel alt modüllerinin toplamı olması için gerek ve yeter koşul M ss-tümlenmiş olmasıdır [8].

3.2.29. Önerme M modülünün her alt modülü ss-tümlenmiş ise, M bol ss-tümlenmiştir [8].

3.2.30. Lemma M bol ss-tümlenmiş modül ve V ss-tümleyen alt modül olsun. Bu takdirde, V bol ss-tümlenmiştir [8].

3.2.31. Teorem M modül olsun. Bu takdirde, M modülünün bol ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul X ss-tümlenmiş ve $Y \subseteq Des_s(M)$ olmak üzere M nin her U alt modülünün $U = X + Y$ şeklinde yazılabilmesidir [8].

İspat. ($\Longrightarrow$) $U \leq M$ olsun. M ss-tümlenmiş olduğundan U bir V ss-tümleyenine sahiptir. M bol ss-tümlenmiş olduğundan M de V nin ss-tümleyeni olacak şekilde $X \subseteq U$ modülü vardır. $U \cap V = Y$ diyelim. V, U nun ss-tümleyeni olduğundan $Y \subseteq Des_s(V) \subseteq Des_s(M)$ dir. $U = U \cap M = U \cap (X + V) = X + (U \cap V) = X + Y$ elde edilir. Böylece X ss-tümlenmiştir.

($\Longleftarrow$) $U \leq M$ olsun. Hipotezden $U = X + Y$, X ss-tümlenmiş ve $Y \subseteq Des_s(M)$ olacak şekilde $X, Y \leq M$ alt modülleri vardır. $Y \subseteq Des_s(M)$ olduğundan $Y \subseteq Des(M)$ dır. Buradan Y yarı basit olup ss-tümlenmiştir. Önerme 3.2.10 gereği U ss-tümlenmiştir. Önerme 3.2.13 gereği M bol ss-tümlenmiştir.

3.2.32. Sonuç M modülü için aşağıdakiler denktir:

(i) M bol ss-tümlenmiştir;

(ii) M nin her alt modülü ss-tümlenmiştir;

(iii) M nin her alt modülü bol ss-tümlenmiştir [8].

3.2.33. Önerme M π-projektif ve ss-tümlenmiş modül ise M bol ss-tümlenmiştir [8].

İspat. $U, V \leq M$ olmak üzere, $M = U + V$ olsun. M π-projektif olduğundan $f(M) \leq U$ ve $(1-f)(M) \leq V$ olacak şekilde M nin bir f epimorfizması vardır. $(1-f)(U) \leq U$ olduğu açıktır. V', M de U nun ss-tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = f(M) + (1-f)(M) = f(M) + (1-f)(U + V') \leq U + (1-f)(V')$ olup $M = U + (1-f)(V')$ olur. $(1-f)(V') \leq V$ olduğu açıktır. $y \in U \cap (1-f)(V')$ alalım. Buradan $y \in U$ ve $y = (1-f)(x) = x - f(x)$ olacak şekilde $x \in V'$ vardır. O halde $x = y + f(x) \in U$ olduğundan $y = (1-f)(x) \in (1-f)(U \cap V')$ dir. Böylece $U \cap (1-f)(V') = (1-f)(U \cap V')$ olur. $U \cap V' \ll V'$ olduğundan $U \cap (1-f)(V') \ll (1-f)(V')$ dir. Ayrıca Sonuç (ii) den $U \cap (1-f)(V') = (1-f)(U \cap V')$ yarı basittir. Buradan $(1-f)(V')$, U nun M de ss-tümleyenidir. Böylece M bol ss-tümlenmiş bulunur.

3.2.34. Sonuç Projektif ss-tümlenmiş modülün her alt modülü ss-tümlenmiştir [8].

4.BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Yerel Artin Tümlenmiş Modüller

4.1.1. Tanım M modülü yerel ve $Rad(M)$, M nin yerel Artin alt modülü ise M modülüne **RLA yerel modül** denir. R halkası sol R-modül olarak RLA yerel modül ise R ye sol **RLA yerel halka** denir.

Yarı-basit modüller yerel Artin dir. Böylece aşağıdaki diyagram sağlanır;

güçlü yerel modül $\Longrightarrow$ RLA yerel modül $\Longrightarrow$ yerel modül

M hem yerel hemde Artin bir modül ise M nin RLA yerel modül olduğu açıktır.

4.1.2. Örnek (i) $\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu üretilmiştir. $Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \cong \mathbb{Z}_4$ olduğundan $\mathbb{Z}_8$ yerel modüldür. $\forall n \in \mathbb{N}^*$ için $\mathbb{Z}_n$ esas ideal bölgesi olduğundan $\mathbb{Z}_4$ Artindir. $Rad(\mathbb{Z}_8) \cong \mathbb{Z}_4$ yerel Artin modüldür. O halde $\mathbb{Z}_8$ RLA yerel modüldür. Diğer taraftan $\mathbb{Z}_8$ güçlü yerel modül değildir.

(ii) p asal tamsayı olmak üzere $\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{\frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}\, ve\, p \nmid b\right\}$ Dedekind bölgesi verilsin. $\mathbb{Z}_{(p)}$ halkası yereldir fakat RLA yerel değildir.

4.1.3. Önerme RLA yerel modülün her bölüm modülü RLA yerel modüldür.

İspat. Kabul edelim ki M RLA yerel modül ve $N \leq M$ olsun. M yerel olduğundan M/N yereldir. M yerel olduğundan $Rad(M)$, M nin tek maksimal alt modülüdür. [Wisbauer, 31.2 (1) (ii)] gereğince $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ yerel Artin modüldür. Dolayısıyla M/N RLA yerel modüldür.

4.1.4. Tanım M bir modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$, M nin yerel Artin modülü ise V ye U nun **yerel Artin tümleyeni** denir. M modülünün her alt modülü M de yerel Artin tümleyene sahipse M modülüne **yerel Artin tümlenmiş modül** denir. M modülünün $M = U + V$ olan her $U \leq M$ alt modülü V de kapsanan yerel artin tümleyene sahip ise M ye **bol yerel Artin tümlenmiş modül** denir.

Şimdi ise yerel Artin tümlenmiş modülleri, ss-tümlenmiş modülleri, Artin modülleri ve tümlenmiş modülleri birbirinden ayıran bazı örnekler verelim. Bu örnekle Artin modüllerin tümlenmiş olduğu ve sol Artin halka üzerindeki her modülün yerel Artin tümlenmiş olduğu kullanılmaktadır.

4.1.5. Örnek p asal tamsayı olmak üzere $M = {}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}_{p^\infty}$ olsun. Bu durumda M Artindir ve bu yüzden yerel Artin tümlenmiştir ancak Örnek 3.2.17 gereğince M ss-tümlenmiş değildir.

4.1.6. Örnek R sol Artin halka ve $M = R^{(\mathbb{N})}$ sol R-modülü olsun. Bu taktirde M Artin olmayan tümlenmiş modüldür.

4.1.7. Örnek R yerel Dedekind bölgesinin kesir cismi K olsun. Bu durumda ${}_RK$ oyuk modüldür ve bu yüzden de tümlenmiştir. Bu yüzden $Des\left({}_RK\right) = 0$ olduğundan ${}_RK$ yerel Artin tümlenmiş modül değildir.

Verilen örneklerle birlikte modüller üzerinde sıradaki diyagrama sahip olduğumuz açıktır;

$$\begin{tikzcd} \text{ss-tümlenmiş} \arrow[dr] & & \\ & \text{yerel Artin tümlenmiş} \arrow[r] & \text{tümlenmiş} \\ \text{Artin modüller} \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

4.1.8. Lemma M tümlenmiş modül ve $Rad(M)$, M nin yerel Artin alt modül olsun. Bu takdirde M yerel Artin tümlenmiş modüldür.

İspat. M tümlenmiş modül olduğundan $K \leq M$ için $M = K + L$, $K \cap L \ll L$ dir. Dolayısıyla $K \cap L \ll M$ dir. $K \cap L \subseteq Rad(M)$ ve $Rad(M)$ yerel Artin alt modül olduğundan Sonuç 2.10.3(i) den $K \cap L$ yerel Artin alt modüldür. Böylece M yerel Artin tümlenmiştir.

4.1.9. Teorem M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir;

(i) M yerel Artin tümlenmiştir,

(ii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$, M de yerel Artin tümleyene sahiptir,

(iii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$ yerel Artin dir.

İspat. (i) $\Longrightarrow$ (ii) M yerel Artin tümlenmiş olduğundan M tümlenmiştir ve $Rad(M)$, M de yerel Artin tümleyene sahip olduğu açıktır.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii) $Rad(M) \ll M$ olduğundan $Rad(M)$ nin M deki yerel Artin tümleyeni M dir. Böylece $M = Rad(M) + M$, $Rad(M) = Rad(M) \cap M \ll M$ ve $Rad(M)$ yerel Artin modüldür.
(iii) $\Longrightarrow$ (i) Lemma 4.1.8 gereğince açıktır.

Her sol R-modül projektif örtüye sahipse R halkasına **mükemmel** denir. Her sonlu üretilmiş sol R-modül projektif örtüye sahipse R halkasına **yarı mükemmel** denir. [Wisbauer, 42.6] dan R nin yarı mükemmel olması için gerek ve yeter şartın ${}_RR$ nin tümlenmiş olmasıdır. Bu gerçeği yukarıdaki teoremle kullanarak aşağıdakileri elde ederiz;

4.1.10. Sonuç R halka olsun. Bu taktirde ${}_RR$ yerel Artin tümlenmiştir gerek ve yeter koşul ${}_RR$ yarı mükemmeldir ve $Rad(R)$ yerel Artindir.

4.1.11. Teorem Her RLA yerel modül, bol yerel Artin tümlenmiş modüldür.
İspat. $M = U + V$ olsun. M yerel ve $Rad(M)$ yerel Artin modüldür. M yerel olduğundan bol tümlenmiştir. Bu yüzden V nin öyle bir V' alt modülü vardır ki $M = U + V$ ve $U \cap V' \ll V'$ dir. Dolayısıyla $U \cap V' \subseteq Rad(V') \subseteq Rad(M)$ dir. Bu ise $U \cap V'$ nin yerel Artin olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla M bol yerel Artin tümlenmiştir.

Yerel Artin modülün her alt modülünün yerel Artin olduğunu [Wisbauer, 31.2(ii)] den hatırlayalım.

4.1.12. Önerme M modül ve U, M nin maksimal alt modülü olsun. Bu taktirde $V \leq M$, U nun yerel Artin tümleyenidir gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve V RLA yerel modüldür.

İspat. ($\Rightarrow$) V, U nun M de yerel Artin tümleyeni olsun. Bu takdirde $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yerel Artin modüldür. U, M nin maksimal alt modül ve V, U nun tümleyeni olduğundan [Wisbauer, 41.1. (3)] gereğince V yerel modüldür. Ayrıca $U \cap V = Rad(V)$, V tek maksimal alt modüldür. $U \cap V = Rad(V)$ olduğundan V RLA yerel modüldür.
($\Leftarrow$) V RLA yerel modül oldsun. Bu durumda V yereldir ve $Rad(V)$ yerel Artin modüldür. Ayrıca V yerel ve U, M nin maksimal alt modülü olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(V)$ dir. Bu ise

$U \cap V$ nin yerel Artin ve $U \cap V \ll V$ olduğu anlamına gelir. Dolayısıyla $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $Rad(V) = U \cap V$ yerel Artin modüldür.

Şimdi ise yerel Artin tümlenmiş modüllerin sonlu toplamınında yerel Artin olduğunu göstermek için aşağıdaki lemma ile devam edelim.

4.1.13. Lemma M modül, U, M nin yerel Artin tümlenmiş alt modülü ve V, M nin alt modülü olsun. Eğer $U + V$, M de yerel Artin tümleyene sahip ise V, M de yerel Artin tümleyene sahiptir.
İspat. K, $U + V$ nin M de yerel Artin tümleyeni ve L, $(K + V) \cap U \leq U$ nun yerel Artin tümleyeni olsun. $M = U + V + K$, $(U + V) \cap K \ll K$ ve $(U + V) \cap K$ yerel Artindir. $U = [(K + V) \cap U] + L$, $(K + V) \cap L = [(K + V) \cap U] \cap L \ll L$ ve $(K + V) \cap L$ yerel Artin modüldür. Böylece $M = U + V + K = [(K + V) \cap U] + L + (V + K) = V + (K + L)$ dir. $K \cap (U + V) \ll K$ ve $L \cap (K + V) \ll L$ olduğundan $V \cap (K + L) \subseteq [K \cap (V + L)] + [L \cap (K + V)] \subseteq [K \cap (U + V)] + [L \cap (K + V)] \ll K + L$ elde edilir.

4.1.14. Önerme U ve V, $M = U + V$ koşulunu sağlayan M R-modülünün herhangi alt modülleri olsun. Bu takdirde U ve V yerel Artin tümlenmiş modüller ise M yerel Artin tümlenmiş modüldür.

İspat. $K \leq M$ olsun. $M = U + V + K$ dir. $U + V + K$, M de 0 aşikar yerel Artin tümleyene sahiptir. U yerel Artin tümlenmiş olduğundan Lemma 4.1.13 gereğince $V + K$, M de yerel Artin tümleyene sahiptir. Tekrar Lemma 4.1.13 uygulanırsa V yerel Artin tümlenmiş olduğundan K, M de yerel Artin tümleyene sahiptir. Dolayısıyla M yerel Artin tümlenmiştir.

Bu önermeyi kullanarak aşağıdaki sonucu elde ederiz;

4.1.15. Sonuç Yerel Artin tümlenmiş modüllerin sonlu toplamıda yerel Artin tümlenmiştir.

4.1.16. Önerme M (bol) yerel Artin tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M nin her bölüm modülü (bol) yerel Artin tümlenmiştir.
İspat. M yerel Artin tümlenmiş ve M/N, M nin bölüm modülü olsun. Hipotezde N yi kapsayan $U \leq M$ için $M = U + V$, $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yerel Artin olacak şekilde M nin V

alt modülü vardır. $\pi : M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizma olmak üzere $M/N = U/N + (V + N)/N$ ve [Wisbauer, 19.3. (4)] den dolayı $U/N \cap (V + N)/N = [(U \cap V) + N]/N = \pi(U \cap V) \ll \pi(V) = (V + N)/N$ dir. $U \cap V$ yerel Artin olduğundan Sonuç 2.10.3(ii) den dolayı $\pi(U \cup V)$= $((U \cap V) + N)/N$= $U/N \cap (V + N)/N$ yerel Artindir. Yani $(V + N)/N$, U/N in M/N de yerel Artin tümleyenidir. M nin bol yerel Artin tümlenmiş modül olması durumunda $N \leq M$ olmak üzere M/N bölüm modülünde bol yerel Artin tümlenmiş modül olması olduğu benzer ispat yöntemi kullanılarak gösterilir.

4.1.17. Önerme M modül olsun. M nin her alt modülü yerel Artin tümlenmiş ise M bol yerel Artin tümlenmiştir.

İspat. $M = K + L$ olacak şekilde $K, L \leq M$ alt modüllerini alalım. L yerel Artin tümlenmiş olduğundan $L = (K \cap L) + L', K \cap L' \ll L'$, ve $K \cap L'$ yerel Artin koşullarını sağlayan $L' \leq L$ alt modülü vardır. $L = (K \cap L)$ olduğundan $M = K + L = K + ((K \cap L) + L') = K + L'$ elde edilir. Dolayısıyla L', K nın M de L de kapsanan yerel Artin tümleyenidir. O halde M bol yerel Artin tümlenmiştir.

4.1.18. Lemma M bol yerel Artin tümlenmiş modül ve V yerel Artin tümleyen alt modül olsun. Bu takdirde V bol yerel Artin tümlenmiştir.

İspat. V, U nun M de tümleyeni olsun. X ve Y V nin $V = X + Y$ koşulunu sağlayan alt modüleri olsun. Bu takdirde $M = (U + X) + Y$ dir. M bol yerel Artin tümlenmiş olduğundan $U + X$, M de $Y' \leq Y$ yerel Artin tümleyenine sahiptir. Buradan $X + Y' \leq V$ dir. V nin U ya göre minimalliğinden $V \leq X + Y'$ olup $V = X + Y'$ dir. Ayrıca [Wisbauer, 8.1.5] den $X \cap Y' \subseteq (U + X) \cap Y' \ll Y'$ dir. Buradan $X + Y' \ll Y'$dir. Sonuç 2.10.3(i) gereğince $(U + X) \cap Y'$ yerel Artin iken $X \cap Y'$ de yerel Artindir. Y', X in Y alt modülünde kapsanan yerel Artin tümleyeni olduğundan bol yerel Artin tümlenmiştir.

4.1.19. Önerme M bol yerel Artin tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin $U = K + L$ olan her U alt modülü için K yerel Artin tümlenmiş ve $L \ll M$ yerel Artin modüldür.

İspat. $U \ll M$ olsun. M yerel Artin tümlenmiş olduğundan U, V yerel Artin tümleyene sahiptir. M bol yerel Artin tümlenmiş olduğundan M de V nin yerel Artin tümleyeni olacak şekilde $K \leq U$ modülü vardır. $U \cap V = L$ diyelim. V, U nun yerel Artin tümleyeni olduğundan L yerel Artin modüldür. Modüler kural gereğince $U = U \cap M = U \cap$

$(K+V)=K+(U\cap V)=K+L$ dir. Lemma 4.1.18 gereğince K yerel Artin tümlenmiştir. $L\ll V$ olduğundan $L\ll M$ dir.

4.1.20. Önerme M π-projektif yerel Artin tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde M bol yerel Artin tümlenmiştir.

İspat. $M=U+V$ ve $U,V\leq M$ olsun. M π-projektif olduğundan $\varphi(M)\subseteq U$ ve $(1-\varphi)(M)\subseteq V$ olacak şekilde M nin $\varphi\in End(M)$ vardır. $(1-\varphi)(U)\subseteq U$ olduğu açıktır. K, M de U nun yerel Artin tümleyeni olsun. Bu takdirde $M=\varphi(M)+(1-\varphi)(M)=\varphi(M)+(1-\varphi)(U+K))\leq U+(1-\varphi)(K)$ olup $M=U+(1-\varphi)(K)$ olur. $(1-\varphi)(K)\leq V$ olduğu açıktır. $y\in U\cap(1-\varphi)(K)$ alalım. Buradan $y\in V$ ve $y=(1-\varphi)(x)=x-\varphi(x)$ olacak şekilde $x\in K$ vardır. $x=y+\varphi(x)\in U$ olduğundan $y=(1-\varphi)(x)\in(1-\varphi)(U\cap K)$ dir. Böylece $U\cap(1-\varphi)(K)\leq(1-\varphi)(U\cap K)$ dir. Ters kapsama benzer yöntemle gösterilebilir. $U\cap(1-\varphi)(K)=(1-\varphi)(U\cap K)$ dir. [Wisbauer, 19.3. (4)] gereği $U\cap(1-\varphi)(K)=(1-\varphi)(U\cap K)\ll(1-\varphi)(K)$ dir. Ayrıca $U\cap K$ yerel Artin modül olduğundan Sonuç 2.10.3(ii) gereğince $(1-\varphi)(U\cap K)$ yerel Artin dir. $M=U+(1-\varphi)(K)$, $U\cap(1-\varphi)(K)\ll(1-\varphi)(K)$ ve $U\cap(1-\varphi)(K)=(1-\varphi)(K)$ olduğundan M bol yerel Artin tümlenmiştir.

Her projektif modül π-projektif olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz;

4.1.21. Sonuç Projektif yerel Artin tümlenmiş modülün her alt modülü bol yerel Artin tümlenmiştir.

Şimdi ise yerel Artin tümlenmiş halkaları karakterize edeceğiz;

4.1.22. Lemma M projektif modül olsun. M nin yerel Artin tümlenmiş modül olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş ve $Rad(M)$ nin yerel Artin olmasıdır.

İspat. M projektif tümlenmiş modül olsun. Bu takdirde [Wisbauer, 42. 5] gereği $Rad(M)\ll M$ dir. Teorem 4.1.9 gereğince açıktır.

4.1.23. Teorem R halkası için aşağıdakiler denktir;

(i) R bir sol mükemmel halkadır ve $Rad(R)$ yerel Artin modüldür;

(ii) Her serbest sol R-modül (bol) yerel Artin tümlenmiştir;

(iii) Her sol R-modül (bol) yerel Artin tümlenmiştir;

İspat. (i) $\Rightarrow$ (ii) I indis kümesi için $F = R^{(I)}$ verilsin. $[\text{Wisbauer}, 43.9]$ dan dolayı F tümlenmiştir. $[\text{Wisbauer}, 31.2\ (2)]$ den dolayı ise $Rad(F) = Rad(R^{(I)}) = Rad(R)^{(I)}$ yerel Artin modüldür. Dolayısıyla Teorem 4.1.9 dan dolayı F yerel Artin tümlenmiştir.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Her modül serbest bir modülün homomorfik görüntüsü olduğundan Önerme 4.1.18 gereğince açıktır.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Teorem 4.1.9 ve $[\text{Wisbauer}, 43.9]$ gereğince açıktır.

5.SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, yerel Artin tümlenmiş modüllerle ilgili önermeler, teoremler ve sonuçlar; dördüncü bölümde yer almaktadır. Bu çalışmada, ss-tümlenmiş modülleri zayıflatarak yerel Artin tümlenmiş modül kavramını tanımladık ve temel özelliklerini belirledik. Bu modüllerin sol mükemmel halkalar üzerindeki karakterizasyonunu verdik. Bu çalışmada tanımlanan modüllerin yapısı, Dedekind bölgeleri üzerinde incelenebilir. Yine yerel Artin modüller üzerinde farklı halka karakterizasyonları araştırılabilir. Her genişlemesinde yerel Artin tümleyene sahip olan modüller çalışılabilir.

KAYNAKLAR

1. Alizade, R., Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 177.

2. Alizade, R., Bilhan, G., Smith P.F. (2001) Modules Whose Maximal Submodules Have Supplements. *Communications in Algebra,* 29(6), 2389-2405.

3. Anderson, F.W., Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 363.

4. Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja , N. , Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Frontiers in Mathematics. Basel, 394.

5. Facchini, A., (1998). *Module Theory, Progress in Mathematics, 167, Birkhauser 281s, Verlag, Basel*

6. Hungerford, T.W. (1974). *Algebra.* Springer Verlag, 502.

7. Kasch, F. (1982). *Modules and Rings.* Academic Press, 372.

8. Kaynar, E., Çalışıcı, H. ve Türkmen, E. (2020). ss-supplemented Modules, *Communications Faculty of Science University of Ankara Series A1 Mathematics and statistics, 69, 1.*

9. Nişancı Türkmen, B. (2019). *İdeallerin Çarpımsal Teorisi.* Nobel Akademi.

10. Nişancı Türkmen, B., Pancar, A. (2010). On Generalization of ⊕-Cofinitely Supplemented Modules. *Ukrainian Mathematical Journal*, 62(2) , 203-209

11. Nişancı Türkmen, B., Pancar, A. (2014). *İnjektif Modüllere Giriş.* Pegem Akademi, 217.

12. Tuganbaev A. (2003). Max Rings nd V-rings, Handbook of Algebra, Vol 3.

13. Türkmen, E. (2010) Radikal tümlenmiş ve eş sonlu radikal tümlenmiş modüllerin karakterizasyonları, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Doktora Tezi.

14. Sharpe, D.W. , Vamos, P. (1972). *Injective Modules,* Cambridge at the University Press, 190.

15. Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 606.

16. Zhou D. X., Zhang X. R. (2011). Small-Essential Submodules and Morita Duality, *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 35: 1051-1062.

17. Zöschinger H. Moduln, die in jeder Erveiterung ein Komplement haben // *Mathematica Scandinavica* -1974. -35. -P. 267-287 (1974).

18. Zöschinger H. (1974) Komplementierte moduln uber Dedekindringen, *Journal of Algebra*, 29, 42-56

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı
Doğum Yeri
Doğum Tarihi
Medeni Durumu :

Eğitim Derecesi

Lise **:** Turhal Sami Baklacı Anadolu Lisesi
Lisans **:** Tokat Gaziosmanpaşa Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

Yabancı Dili

İngilizce

İletişim Bilgileri

E-posta:
Adres: