T.C.

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# UYARLANMIŞ HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE SCHLÖMİLCH İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEHRA HÜLYA ARABACIOĞLU

AĞUSTOS

| | | |
|---|---|---|
| **ZEHRA HÜLYA<br>ARABACIOĞLU** | **MATEMATİK<br>ANABİLİM DALI** | **AĞUSTOS 2018** |

# UYARLANMIŞ HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE SCHLÖMİLCH İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

**Zehra Hülya ARABACIOĞLU**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**
**MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**Danışman**
**Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**AĞUSTOS 2018**

Zehra Hülya ARABACIOĞLU tarafından hazırlanan "**UYARLANMIŞ HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE SCHLÖMİLCH İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ**" adlı tez çalışması aşağıdaki jüri tarafından OY BİRLİĞİ ile Amasya Üniversitesi Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

**Danışman:** Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK
Matematik Anabilim Dalı , Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

**Başkan :** Prof. Dr. Ercan TUNÇ
Matematik Anabilim Dalı, Gaziosmanpaşa Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

**Üye :** Dr. Öğr. Üyesi Serpil ŞAHİN
Matematik Anabilim Dalı, Amasya Üniversitesi
Bu tezin, kapsam ve kalite olarak Yüksek Lisans Tezi olduğunu onaylıyorum. …………………

Tez Savunma Tarihi: 30/07/2018

Jüri tarafından kabul edilen bu tezin Yüksek Lisans Tezi olması için gerekli şartları yerine getirdiğini onaylıyorum.

…………………………….

Doç. Dr. Meryem EVECEN

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Zehra Hülya ARABACIOĞLU

UYARLANMIŞ HOMOTOPİ PERTURBASYON METODU İLE SCHLÖMİLCH İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN İNCELENMESİ

(Yüksek Lisans Tezi)

Zehra Hülya ARABACIOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ağustos 2018

## ÖZET

Lineer ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemler, atmosferik ve karasal fizikte önemli ve yararlı denklemler olarak kabul edilmektedir. Bazı iyonosferik problemler için bu denklemler ve çözümleri kullanılmıştır. Bunlar ayrıca 1. Tip Fredholm integral denklemleri olarak da düşünülebilir. Bu ilişki 1.Tip Fredholm integral denklemlerinin çözümünde kullanılan bazı tekniklerin Schlömilch integral denklemlerin çözümünde de kullanılabilmesine olanak sağlar. Bu tekniklerden en önemlilerinden biri de Homotopi Perturbasyon Metodudur. Bu yöntem ve çeşitleri, mühendislik, fizik ve matematiğin ortaya çıkardığı uygulama problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Bu çalışmada Schlömilch integral denklemlerini çözmek için Homotopi Perturbasyon Yönteminde kullanılan homotopi, modifiye edilerek yeni bir homotopi tanımlandı. Bu değişikliğin sonucu olarak lineer, lineer olmayan ve genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri de dahil olmak üzere çeşitli Shlömilch integral denklemleri için çözümler üretildi. Ayrıca önerilen yöntemle elde edilen çözümler ile iyi bilinen gama fonksiyonu arasında ilişki kuruldu. İlaveten önerilen algoritmanın kullanışlılığı ve uygulanabilirliğini göstermek için açıklayıcı örnekler verildi. Son olarak bu çalışmada uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunun, literatürde mevcut olan farklı teknikler kullanılarak çözülen problemler üzerinde, elde edilen sonuçlar karşılaştırılarak test edildi.

Anahtar Kelimeler : Schlömilch integral denklemleri,Fredholm integral denklemleri, lineer olmayan integral denklemler
Sayfa Adedi : 40
Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK

# AN INVESTIGATION OF THE SOLUTIONS OF SCHLÖMİLCH'S INTEGRAL EQUATIONS BY MODIFIED HOMOTOPY PERTURBATION METHOD

(M. Sc.)

Zehra Hülya ARABACIOĞLU

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

AUGUST 2018

## ABSTRACT

The linear and nonlinear Schlömilch's integral equations are considered to be important and useful equations in atmospheric and terrestrial physics. The equations and their solutions have been used for some ionospheric problems. They can also be considered as Fredholm integral equations of the first kind. This relation allows one to apply the techniques that are available for solving Fredholm integral equations of the first kind to Schlömilch's integral equations of various kinds. An important such technique is the homotopy perturbation method. This method and its variations have been applied to solve many application-based problems emerging from engineering, physics, and mathematics. In this study, we modify the homotopy perturbation method by introducing a new function and define a new homotopy to solve Schlömilch's integral equations. As a result of this modification, we obtain solutions for various kinds of Schlömilch's integral equations, including the linear, nonlinear, and generalized Schlömilch's integral equations. We also establish the relationship between solutions obtained from the proposed method and the well-known gamma function. Illustrative examples are provided to show the simplicity and applicability of the proposed algorithm. For the sake of comparison, we finally test the proposed method on some problems that were solved by using different techniques available in the literature.

Key Words : Schlömilch's integral equations,Fredholm integral equations, nonlinear integral equations
Page number : 40
Advisor : Asst. Prof. Dr. Ahmet ALTÜRK

# ÖNSÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu çalışma süresince bilgilerini benimle paylaşan ve önerileriyle bana rehberlik eden değerli hocam Dr. Öğr. Üyesi Ahmet ALTÜRK'e en derin saygı ve teşekkürlerimi sunuyorum. Ayrıca üzerimde çok emekleri bulunan babam Ahmet Süheyl ARABACIOĞLU ve annem Fatma ARABACIOĞLU' na sonsuz teşekkürler.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simge ve kısaltmalar aşağıda verilmiştir.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\sum$ | Toplam Sembolü |
| $\int$ | İntegral Sembolü |
| $\Gamma$ | Gama fonksiyonu |
| **ADM** | Adomian ayrıştırma metodu |
| **HPM** | Homotopi perturbasyon metodu |
| **MHPM** | Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodu |

# 1. GİRİŞ

Yüzyıllar boyunca yapılan çalışmalar neticesinde içinde yaşadığımız kainatta oluşan hiçbir fiziksel olayın rastgele oluşmadığı ve kanunlar adını verdiğimiz çok sayıdaki mecburiyet unsurlarına bağlı kaldığını biliyoruz. Bu kanunların matematiksel formu ortaya çıkarılırken öncelikle fiziksel olayı tanımlamak ve buna ilişkin fiziksel değişkenleri tanımlamak gerekir. Bundan sonra her bir olay üzerinde yapılan dikkatli gözlemler ve doğru akıl yürütmeler bu değişmeyen kanunların matematiksel formlarını ortaya çıkarır. Bu matematiksel formlar değişkenleri olduğu gibi bunların türevlerini de ihtiva edebilmektedir.

Günlük hayatta ve özellikle mühendislik ve fizik alanında karşılaştığımız olaylar modellenirken hep bu kanunlar esas alınır. Bu tür modellemelerinden biri de integral denklemleridir. İntegral denklemler, basit bir ifadeyle bilinmeyen fonksiyonun integral işareti altında gözüktüğü denklemler olarak tanımlanmaktadır. İntegral denklemleriyle ilgili ilk uğraşılar 19. yüzyılın başında başlamıştır. Fiziksel olguların matematiksel modellemesinde sıklıkla karşılaşılan denklemlerdir. Başlangıçta rastgele araştırmalar yapılmışken daha sonra daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve önemli sonuçların elde edilmeye başlandığı bilinmektedir. Abel 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. İntegral denklemlerle ilgili [1-3] başta olmak üzere farklı bilim adamlarına ait kaynaklar mevcuttur.

İntegral denklemlerinin analitik ve nümerik çözümleri üzerine bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan bazıları Adomian Ayrıştırma Metodu [19-22], Regularizasyon Metodu [23-24] ve Homotopi Perturbasyon Metodudur [25-34].

Atmosferik ve karasal fizikte önemli ve kullanışlı olan Schlömilch integral denklemi, 1. Tip Fredholm integral denklemi tipindedir. Bu yüzden Fredholm integral denklemleri için kullanılan yöntemler, Schlömilch integral denkleminin çözümü için de kullanılabilir.

Schlömilch integral denklemleri atmosferdeki iyonosfer katmanıyla ilgilidir. İyonosfer, elektronların ve yüklü atomların kabuğudur. Bu bölge güneşle iyonize olur. İyonosfer radyo dalga yayılımı açısından oldukça önemlidir. İyonosfer radyo dalgalarını yansıtarak uzak bölgeler ile haberleşmenin yapılabilmesini sağlar. Schlömilch integral denklemleri, yarı transfer yaklaşım için eğik insidansa ait iyonosferik elektron yoğunluğu profilini türetmek için kullanılır [9-16].
Bu çalışmada bazı şartlar altında farklı tipteki Schlömilch integral denklemlerinin analitik çözümleri formüle edilmiştir. İncelediğimiz denklem tipleri aşağıda listelenmiştir.

- Lineer Schlömilch integral denklemleri
- Genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri
- Lineer olmayan Schlömilch integral denklemleri

Schlömilch integral denklemleri üzerine teorik olarak detaylı bir şekilde çalışılmış olmasına rağmen, matematiksel olarak çözüm metotları geliştirme kısmı literatürde eksik kalmıştır.

İntegral denklemlerini çözmek için en kullanışlı yöntemlerden biri de Homotopi Perturbasyon Metodudur. Bu yöntem Schlömilch integral denklemlerine başarıyla uygulanmıştır [4].

Homotopi Perturbasyon Metodu Ji Huan He [25] tarafından tanıtılmış ve geliştirilmiştir. Son zamanlarda, lineer ve lineer olmayan integral denklemlerine başarıyla uygulanmıştır. Homotopi Perturbasyon Metodu kısaca topolojideki homotopi ve perturbasyon yönteminin kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bir $p\epsilon[0,1]$ aralığında gömme parametresi oluşturulur. $p$ bir engelleyici gömme parametresi olarak da kabul edilir. Topolojide, Homotopi Perturbasyon Metodu, perturbasyon tekniği ve homotopinin kombinasyonu şeklindedir. perturbasyon yönteminin ve homotopi yönteminin eşleştirilmesi, geleneksel perturbasyon tekniğinin sınırlamalarını ortadan kaldırmıştır.

Bu yöntem 1. Tip ve 2. Tip Fredholm integral denklemlerine başarıyla uygulanmış olup bu yöntemi temel alan çeşitli teknikler geliştirilmiştir.

Bunlardan birisi uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodudur. Bu metot, Fredholm integral denklemlerinde çekirdeği ayrılabilir şekilde olan integral denklemlerine uygulanabilir [8].

Bu çalışmada öncelikle homotopi perturbasyon yönteminde kullanılan homotopi modifiye edilerek yeni bir homotopi tanımlandı. Bu değişikliğin sonucu olarak lineer, lineer olmayan ve genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri de dahil olmak üzere çeşitli Schlömilch integral denklemleri için çözümler üretildi. Bunun yanı sıra önerilen yöntemle elde edilen çözümler ile iyi bilinen gama fonksiyonu arasındaki ilişki kuruldu. Son olarak önerilen algoritmanın kullanışlılığı ve uygulanabilirliğini göstermek için açıklayıcı örnekler verildi. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar uluslararası bir kongrede sunulmuş olup uluslararası bir dergide makale olarak basılmıştır [4].

# 2. GENEL BİLGİLER

## 2.1. İntegral Denklem Tipleri ve Sınıflandırılması

Bilinmeyen bir fonksiyonun integral işareti altında gözüktüğü denklemlere integral denklemler denir. u(x) fonksiyonunu ihtiva eden standart formda bir integral denklem aşağıdaki şekilde verilir:

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)u(t)dt. \qquad (2.1)$$

(2.1) denkleminde $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ integral sınırları, $\lambda$ sabit bir parametre, $K(x,t)$ integralin çekirdeği olarak adlandırılan iki değişkenli bilinen bir fonksiyon, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyondur. İntegral denklemlerinin farklı sınıflandırmaları mevcuttur. Bu sınıflandırmalar bu bölümde incelenecektir.

## 2.2. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olmak üzere iki sınıfa ayrılır.
$u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,t)F[u(t)]dt. \qquad (2.2)$$

denkleminde $F[u(x)] = u(x)$ ise (2.2) denklemine lineer, $F(.)$ fonksiyonu $u$' nun lineer olmayan bir fonksiyonu ise (2.2) denklemine lineer olmayan bir integral denklem denir.

### 2.3. Tekil (Singüler) İntegral Denklemler

İntegral denkleminde iki değişkenli $K(x,t)$ fonksiyonuna çekirdek fonksiyon denir. Çekirdek fonksiyonunun tanımlanan aralıkta sürekli olması önemlidir. Fonksiyon sürekli değilse singüler integral denklemi olarak adlandırılır.

$$f(x)=\int_0^x \frac{1}{(x-t)^a}u(t)\,dt, 0<a<1 \tag{2.3}$$

$$u(x)=f(x)+\int_0^x \frac{1}{(x-t)^a}u(t)\,dt, 0<a<1 \tag{2.4}$$

şeklindeki denklemler tekil integral denklemler olarak adlandırılır veya genelleştirilmiş Abel integral denklemler olarak da adlandırılır.

Eğer $\alpha=\frac{1}{2}$ şeklinde alınırsa;

$$u(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt$$

denklemine tekil Abel integral denklemi denir.

Tekil integral denklemler (2.3) ve (2.4) ‘teki denklemlerden farklı olarak integral sınırlarından biri veya her ikisi de sonsuz ise bu tür denklemler de tekil integral denklemler adını alır.

$$f(s)=\int_0^\infty e^{-st}u(t)dt \tag{2.5}$$

$$u(x)=\int_0^x \frac{1}{\sqrt{x-t}}u(t)dt \tag{2.6}$$

(2.5) ve (2.6) denklemleri, tekil integral denklemlerine örnek olarak verilebilir.

### 2.4. Tekil olmayan İntegral Denklemlerin Tiplerine Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre iki sınıfa ayrılır. $K(x,t), f(x)$ $ve$ $\phi(x)$ bilinen fonksiyonlar, $a$ $ve$ $b$ sabitler ve $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(x) = \lambda\int_b^a K(x,t)u(t)dt \tag{2.7}$$

$$\phi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt \tag{2.8}$$

(2.7) ve (2.8) denklemlere 1. Tip integral denklemler denir.

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,t)u(t)dt, \tag{2.9}$$

(2.9) deklemlere 2.Tip integral denklemler denir 2. Tip integral denkleminde bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu hem integralin içinde hem de dışında bulunmaktadır. Örnek olarak;

$$\frac{1}{6}x^3 = \int_0^x (x-t)u(t)dt \tag{2.10}$$

$$u(x) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} - \int_0^1 (x-t)u(t)dt \tag{2.11}$$

(2.10) da integral denklemi 1.Tip integral denklemi ve (2.11) ‘deki denklemde 2.Tip integral denklemine örnek olarak verilebilir.

### 2.5. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

Bir integral denkleminde $u(x)$ bilinmeyen fonksiyon, $K(x,t)$ bilinen çekirdek fonksiyon ve $a,b$ sabitler olmak üzere $f(x)$ gibi bir fonksiyon bulunmuyorsa homojen integral denklem denir. integral denkleminde $f(x)$ bilinen fonsiyonu bulunuyorsa homojen olmayan integral denklemi olarak adlandırılır.

$$u(x)=\int_{b}^{a}K(x,t)u(t)dt, \tag{2.12}$$

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_{b}^{a}K(x,t)u(t)dt, \tag{2.13}$$

(2.12) homojen integral denklem ve (2.13) homojen olmayan integral denklemdir [2,41].

### 2.6. Fredholm ve Volterra İntegral Denklemler

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{b}K(x,t)u(t)dt \tag{2.14}$$

formundaki denklemler Fredholm integral denklemi ve

$$\phi(x)u(x)=f(x)+\lambda\int_{a}^{x}K(x,t)u(t)dt \tag{2.15}$$

formundaki denklemler ise Volterra integral denklemi şeklinde adlandırılırlar.

(2.14) ve (2.15) denklemlerinde eğer $\phi(x)\equiv 0$ olursa birinci tip, $\phi(x)\equiv 1$ olursa ikinci tip, diğer durumlarda ise üçüncü tip integral denklem olarak adlandırılırlar.

(2.14) ve (2.15) denklemlerinde bilinen $f(x) = 0$ ise bu integral denklemlerine homojen integral denklemleri denir. $f(x) \neq 0$ ise homojen olmayan integral denklemi olarak adlandırılır [2].
(2.14) ve (2.15) İntegral denklemlerinde integral operatörü altındaki $u(x)$ fonksiyonuna göre lineer olması durumunda ifade edilen integral denklem de lineerdir.

Eğer bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu derecesi birden farklı veya lineer değilse yani $e^u$, $\sinh u$, $cosu$, ln(1+u) şeklinde ise bu tür denklemlere de lineer olmayan integral denklemler denir.

(2.14) ve (2.15) integral denklemlerinde integral işaretinin sınırlarından en az biri sonsuz veya bu sınırlarda integral çekirdeği $K(x,t)$ süreksiz ise bu tür integral denklemleri singüler integral denklem denir.

$K(x,t)$ integral çekirdeği, integral işaretinin sınırları arasında sürekli ve integral sınırlarının her ikisi de sonsuz değil ise singüler olmayan integral denklem olarak adlandırılır [2].

### 2.6.1. Fredholm integral denklemleri

Fredholm integral denklemlerinde, $K(x,t)$ integral çekirdeği, $f(x)$ bilinen bir fonksiyon, bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işareti altında gözükmek üzere ve integral sınırları $a\ ve\ b$ gibi sabitlerdir.

$$f(x) = \lambda \int_b^a K(x,t)u(x)dt, x \in D \tag{2.16}$$

Bu tür integral denklemlere 1. Tip Fredholm integral denklemi denir. (2.16) denkleminde $D$ reel sayılarda kapalı ve sınırlanmış bir küme ve $x$ in tanım aralığı integrasyon aralığıyla çakışmaz [35]. 1.Tip Fredholm integral denklemleri genellikle iyi tanımlı olmayan (ill-posed) problemler olarak kabul edilir.

Bu tür problemlerle ilgili Hadamard [36] aşağıdaki üç özelliği öne sürer.

- Çözümün varlığı
- Çözümün tekliği
- (2.3) denklemindeki, çözüm fonksiyonu $u(x)$, data fonksiyonu $f(x)$ in verilerine sürekli olarak bağımlılığı, bu özellik $f(x)$ data fonksiyonun çözümünde küçük hataların $u(x)$ verilerindeki küçük hatalara bağlı olduğunu gösterir [37].

Yukarıdaki üç durum sağlanıyorsa problem iyi tanımlı (well-posed) problem olarak adlandırılır. Dolayısıyla problem well posed problem değilse ill posed problemdir. İll posed problemlerde çözüm varsa tek değildir. Elde edilen çözüm gözlenen veriye sürekli bağlı kalmıyordur. (2.16) denklemindeki $K(x,t)$ çekirdeği düzgünse $u(x)$ çözümü $f(x)$ verilerindeki herhangi bir değişikliğe karşı çok hassastır. Bu nedenlerden dolayı 1. Tip Fredholm integral denklemi ill-posed problemlerdir [2].

1.Tip Fredholm integral denklemlerinin çözümleri için çeşitli yöntemler kullanılmıştır. Regularizasyon ve Homotopi perturbasyon metodu yöntemlerden en kullanışlı olanlarıdır.

Bunun yanı sıra bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral denkleminin hem integral işareti hemde integral işareti dışında gözüküyorsa Bu tür integral denklemlerine 2.Tip Fredholm integral denklemi denir ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{b}^{a} K(x,t)u(t)dt \tag{2.17}$$

### 2.6.2. Volterra integral denklemleri

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu integral işareti altında olmak üzere, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyon, $f(x)$ bilinen fonksiyon ve integral sınırlarından en az biri değişkene bağlı ise,

$$f(x) = \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)u(t)dt \tag{2.18}$$

şeklindeki integral denklemlerine 1. Tip Volterra integral denklemi denir.

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonu hem integral işareti altında hemde integral işareti dışında gözüküyorsa;

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_{g(x)}^{h(x)} K(x,t)dt \tag{2.19}$$

Bu tür integral denklemlerine 2. Tür Volterra integral denklemi denir [2,38].

Volterra integral denklemleri popülasyon dinamiği, salgın yayılımı ve yarı iletken cihazlar gibi bir çok bilimsel uygulamada ortaya çıktığı görülmüştür. Volterra, 1884 yılında integral denklemleri üzerinde çalışmaya başlamıştır. Ama ciddi çalışmaları 1896 yılında olmuştur. İntegral denklemi ismi 1888 yılında Bois-Reymond tarafından verildi. Ancak Volterra integral denklemi ismi, ilk olarak 1908 yılında Lalesco tarafından hazırlandı [2]. Abel dikey bir düzlemdeki bir eğrinin denkleminin saptanması sorununu düşünüyordu. Bu problemde, bir kütle noktasının yerçekimi etkisi altında, bu eğri boyunca belirli pozitif yükseklikten yatay eksene kayması için geçen süre, yüksekliğin öngörülen bir işlevine eşittir. Abel, bir tür belirli Volterra integral denklemi olan tekil Abel integral denklemi türetti. Bu konuda daha detaylı araştırma yapmak isteyen okuyucuları [2] kaynaklarına başvurmalarını öneriyoruz.

## 2.7. Schlömilch İntegral Denklemleri

İyonosfer dünyayı çevreleyen atmosferin üst bölgesinde elektron yüklü bir yapıdır. Güneş radyasyonu ile iyonize olur. Uzak bölgelere radyo yayılımını etkiler. İyonosfer kabuğu varlığını güneşten gelen morötesi radyasyona borçludur. İyonosfer kabuğu elektronların ve elektrik yüklü atomların bulunduğu benzersiz bir yapıya sahiptir.

Yarı transfer yaklaşım için eğik insidansa ait iyonosferik elektron yoğunluğu profilini türetmek için Schlömilch integral denklemleri kullanlır [9-16].

Bu denklem, $f(x)$ $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, \tag{2.20}$$

şeklinde ifade edilir.

$$u(x) = f(0) + x\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{'}(x\sin t)dt, \tag{2.21}$$

(2.20) denkleminde $f$ in $\varepsilon = x\,sint$ argümentine göre türevleri $f'$ olsun. Schlömilch integral denkleminin tek çözümü quasitransverse (QT) yaklaşımları durumunda iyonosferik elektron yoğunluğu profilini üretmek için kullanılır. Schlömilch integral denklemleri bir çok iyonosfer problemleri için kullanılmıştır [9-11].

Ayrıca (2.21) formunda verilen Schlömilch integral denklemleri 1.Tip Fredholm integral denklemleri formundadır.

Bu yüzden 1. Tip Fredholm integral denklemleri çözmek için uygulanan metotlar Schlömilch integral denklemlerine uygulanabilir.

Bunun yanı sıra (2.21) denklemine regularizasyon metodu uygulanarak 2. Tip Fredholm integral denklemlerine dönüştürülebilir. dolayısıyla 2.Tip integral denklemlerinin çözümleri için uygulanan metotlar Schlömilch integral denklemlerin çözümlerini elde etmek için de kullanışlı olabilir.

Schlömilch integral denklemlerinin 4 tipi mevcuttur. $f(x)$ bilinen bir fonksiyon ve $u(x)$ bilinmeyen bir fonksiyon olmak üzere,

Lineer Schlömilch integral denklemleri;

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \leq x \leq \pi \tag{2.22}$$

genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri;

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^n t)dt, n \geq 1 \tag{2.23}$$

Schlömilch-tip integral denklemi;

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\cos^n t)dt, n \geq 1. \tag{2.24}$$

Lineer olmayan Schlömilch integral denklemi,

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F(u(\sin t)dt, \tag{2.25}$$

F(u), $-\pi \leq x \leq \pi$ aralığında diferansiyellenebilen sürekli lineer olmayan fonksiyon olmalıdır [9-11,13].

### 2.8. Fredholm İntegral Denklemler İçin Çözüm Metotları

Fredholm İntegral denkleminin çözümü için birçok farklı metot vardır. Bu metotlardan bazıları literatürde sıklıkla karşılaştığımız ve bu çalışmada da üzerinde duracağımız regularizasyon metodu, Adomian Ayrıştırma Metodu ve Homotopi Perturbasyon Metodudur.

#### 2.8.1. Regularizasyon metodu

Regularizasyon Metodu, birbirinden bağımsız olarak Tikhonov ve Philips tarafından tanıtıldı [23,24]. Bu metod 1. Tip Fredholm integral denklemini 2. Tip Fredholm integral denklemine çevirmektedir. Açıkça ifade edecek olursak regülarizasyon yöntemi;

$$f(x) = \int_b^a K(x,t)u(t)dt, \tag{2.26}$$

şeklindeki 1.Tip Fredholm integral denklemini;

$$\alpha u_\alpha(x) = f(x) - \int_b^a K(x.t)u_\alpha(t)dt, \tag{2.27}$$

2. Tip Fredholm integral denklemine dönüştürür. (2.27) denkleminde, $\alpha$ pozitif bir regularizasyon parametresidir. Denklemin her iki tarafı $\alpha$ ile bölünürse;

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f(x) - \frac{1}{\alpha}\int_b^a K(x,t)u_\alpha(t)dt, \tag{2.28}$$

elde edilir. Ayrıca [39,40] da (2.28) denkleminin çözümünün (2.26) in çözümüne belli şartlar altında yakınsadığı kanıtlandı.

Aşağıdaki lemmada, (2.28) denkleminin çözümü olan $u_\alpha(x)$ fonksiyonunun (2.26) denkleminin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonuna belli şartlar altında yakınsadığı ifade edilmiştir.

2.1. Lemma

$$f(x) = \int_b^a K(x.t)u(t)dt, \tag{2.29}$$

Yukarıdaki integral denklemindeki integral operatörünün, $f(x), u(x)\ ve\ u_\alpha(x)$ tanımlandığı Hilbert uzayında sürekli ve coercive olduğunu varsayalım.

**1)** $|u_\alpha|$, $\alpha$ den bağımsız olarak sınırlandırılmıştır ve
**2)** $|u_\alpha - u(x)| \to 0$ iken $\alpha \to 0$ olur [2,39,40].

Özet olarak bu lemmada regularizasyon metodu ile 2. Tip Fredholm integral denkleminin çözümü için kullanılan yöntemlerden herhangi biriyle birleştirildiğinde, 1. Tip Fredholm integral denklemini çözebileceğini söyler. Lemmanın kanıtı için okuyucuyu [39,40] kaynaklarına yönlendiriyoruz.

O halde (2.26) formunda verilen bir integral denklemi, öncelikle regülarizasyon yöntemi uygulanarak;

$$u_\alpha(x) = \frac{1}{\alpha} f(x) - \frac{1}{\alpha}\int_b^a K(x,t)u_\alpha(t)dt, \tag{2.30}$$

denkleme dönüştürülür. Daha sonra (2.30) denklemi Adomian ayrıştırma metodu, homotopi perturbasyon metodu veya başka bir metotla çözülerek $u_\alpha(x)$ çözümü elde edilir[2].
Buradan,

$$u(x) = \lim_{\alpha \to 0} u_\alpha(x) \tag{2.31}$$

eşitliğiyle (2.26) denkleminin çözümü elde edilir.

### 2.8.2. Adomian ayrıştırma metodu

Adomian Ayrıştırma Metodu (ADM) George Adomian tarafından tanıtıldı ve geliştirildi [19-22]. Adomian Ayrıştırma Metoduyla ilgili birçok çalışma mevcuttur.

Adomian Ayrıştırma Metodunun çözümü seri formundadır. Bu metottaki yöntem, herhangi bir denklemin bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun, ayrışma serisi tarafından tanımlanan sonsuz sayıda bileşen toplamına ayrıştırılmasını içerir.
Daha açık bir ifadeyle:

$$u(x)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x), \tag{2.32}$$

dolayısıyla,

$$u(x)=u_0(x)+u_1(x)+u_2(x)+... \tag{2.33}$$

şeklindedir. Adomian Ayrıştıma Metodu kendi $u_0, u_1, u_2$ ... bileşenlerinin bulunmasıyla ilgilenir. Bu bileşenlerinin bulunması, kolaylıkla değerlendirilecek basit integralleri içerir ve tekrarlama ilişkisi yoluyla kolay bir şekilde elde edilir. Seri formu (2.32) deki denklem aşağıdaki 2. Tip Fredholm integral denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty}u_n(x)= f(x)+\lambda\int_b^a K(x,t)\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_n(t)\right)dt, \tag{2.34}$$

şeklinde olur.

$$u_0(x)+u_1(x)+...= f(x)+\lambda\int_b^a K(x,t)\left[u_0(t)+u_1(t)...\right]dt, \tag{2.35}$$

Sıfırıncı bileşen $u_0(x)$, integral işareti altında bulunmayan tüm terimleri kapsayacak şekilde tanımlanır. Bu bilinmeyen fonksiyon $u(x)$ in bileşenleri $u_j(x)$ $(j \geq 0)$ nin tekrarlama ilişkisinin ayarlanmasıyla tamamen belirlendiği anlamına gelir.

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_b^a K(x.t) u_n(t) dt, \qquad n \geq 0 \tag{2.36}$$

$$u_0(x) = f(x)$$

$$u_1(x) = \lambda \int_b^a K(x,t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_b^a K(x,t) u_1(t) dt,$$

$$u_3(x) = \lambda \int_b^a K(x,t) u_2(t) dt,$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_b^a K(x,t) u_n(t) dt \qquad n \geq 0 \tag{2.37}$$

Bu eşitliklerden bileşenleri hesaplayarak çözümü oluşturan parçalar elde edilir. $u_0(x),\ u_1(x), u_2(x)$ .... bileşenleri (2.32) denkleminden elde edilip hesaplanır. Sonuç olarak Fredholm integral denkleminin çözümü olan $u(x)$ fonksiyonu seri formunda kolayca elde edilir.

Adomian ayrıştırma metodu, integral denklemini hesaplanabilir bileşenlerden oluşan hale dönüştürdüğü açıkça görülmektedir. Eğer problem için kesin bir çözüm mevcutsa, elde edilen seri hızlı bir şekilde bu kesin çözüme yakınsamış olacaktır. Ayrışma serinin yakınsaklık konsepti, sonuç kısmında ortaya çıkan serinin hızlı yakınsamasını doğrulamak için birçok araştırmacı tarafından araştırılmıştır. Bununla birlikte kapalı formundaki çözümü elde edilemeyen problemler için, sayısal sonuçların genellikle bileşenleri kesilmiş serinin terimlerinden oluşur. Daha fazla bileşen kullanılırsa yaklaşımda yapılan hata azalır [2].

### 2.8.3. Homotopi perturbasyon metodu

Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM), Jİ Huan He [25] tarafından tanıtıldı. Son zamanlarda lineer ve lineer olmayan integral denklemlerini çözmek için kullanıldı. Basitçe ifade edecek olursak bu yöntem gömme parametresi olarak adlandırılan $p \in [0,1]$ olan bir homotopi oluşturulur. Burada, $p$ küçük bir parametredir. Topolojide, homotopi perturbasyon metodu, pertürbasyon tekniği ve homotopinin kombinasyonu şeklindedir. Perturbasyon yönteminin ve homotopi yönteminin eşleştirilmesi, geleneksel perturbasyon tekniğinin sınırlamalarını ortadan kaldırmıştır. Bu güçlü kombinasyon bir çok probleme başarılı bir şekilde uygulanmıştır [26-31]. Bu yöntem 1. Tip ve 2. Tip Fredholm integral denklemlerine kolayca uygulanabilir.

HPM metodunun, 2. Tip integral denklemlerine uygulanmasını inceleyelim;

$$u(x) = f(x) + \int_b^a K(x,t)u(t)dt \tag{2.38}$$

yeni bir operatör tanımlanırsa;

$$L(u) = u(x) - f(x) - \int_b^a K(x,t)u(t)dt = 0 \tag{2.39}$$

$v(x) = u(x)$ ve $H(u,p)$ , $p \in [0,1]$ konveks bir homotopi olacak şekilde, homotopi tanımlansın.

$$H(u,0) = F(u), \qquad H(u,1) = L(u) \tag{2.40}$$

$F(u)$ fonksiyonel bir operatördür. Konveks bir homotopi aşağıdaki şekildedir.

$$H(u,p) = (1-p)F(u) + pL(u) = 0 \tag{2.41}$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \tag{2.42}$$

şeklinde alınırsa;

$$v = \lim_{p \to 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n \tag{2.43}$$

Böyle bir çözüm mevcutsa (2.43) deki seri tam çözüme yakınsar.

(2.42) denklemi ve $F(u) = u(x) - f(x)$ (2.41) denkleminde yerine yazılırsa,

$$p^0 : u_0(x) = f(x), \qquad p^{n+1} : u_{n+1} = \int_a^b K(x,t) u_n(t) dt, n \geq 0. \tag{2.44}$$

(2.44) teki tekrarlama ilişkisinin standart Adomian ayrıştırma metodunun çözümüyle aynı olduğu görülür[2].

Bu yöntemi ayrıntılı bir şekilde incelemek isteyen okuyucularımızı [2,25, 32-34] kaynaklarına yönlendiriyoruz.

Homotopi perturbasyon metodunun 1. Tip integral denklemlerine uygulanışını inceleyelim.
1.Tip integral denklemleri aşağıdaki şekildedir.

$$f(x) = \int_b^a K(x,t) v(t) dt. \tag{2.45}$$

operatörleri tanımlanırsa;

$$L(u) = f(x) - \int_b^a K(x,t) u(t) dt = 0 \tag{2.46}$$

formun konveks bir homotopisi oluşturulursa;

$$H(u,p) = (1-p)u(x) + pL(u) = 0 \tag{2.47}$$

gömme parametresi $p$ monoton olarak 0 dan 1 e yükselir.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_{n,} \tag{2.48}$$

sonuç olarak;

$$v(x) = \lim_{p\to 1} \sum_{n=0}^{\infty} p^n u_n(x) \tag{2.49}$$

böyle bir çözüm varsa seri kesin çözüme yakınsar.

$K(x,t)$ ayrılabilir bir çekirdek;

$$\left| 1 - \int_b^a K(t,t)dt \right| < 1 \tag{2.50}$$

(2.50) deki durum çözümün yakınsaması için aranan şarttır [2].

# 3. LİTERATÜR TARAMASI

Lineer ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemleri, atmosferik ve karasal fizikte önemli ve yararlı denklemler olarak kabul edilir. Çoğu iyonosferik problemler için Schlömilch integral denklemleri kullanılmıştır [9-16]. Schlömilch integral denklemleri, teorik olarak detaylı bir şekilde çalışılmış olmasına rağmen, matematiksel olarak çözüm metotları geliştirme kısmında eksik kalmıştır.

Literatürde Schlömilch integral denklemlerinin çözümü için kullanılan yöntemlerinden biri lineer ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemlerini çözmek için genelleştirilmiş Chebyshev Ortogonal Fonksiyonların Sıralama Metodudur [32]. Diğer yöntem, Schlömilch integral denklemleri 1. Tip Fredholm integral denklemleri formunda olduğundan, Fredholm integral denklemlerine uygulanan çözümler Schlömilch integral denklemlerine başarıyla uygulanabilir [5-7].

Schlömilch integral denklemindeki bilinen fonksiyonu özel bir formda ise iyi bilinen gama fonksiyonu kullanılarak lineer ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemlerinin çözümü, kapalı bir form ile ifade edilebileceği [5] te gösterilmiştir. Ayrıca Schlömilch integral denklemleri 1. Tip Fredholm integral denklemi tipinde olduğu için çözümünde Regularizasyon Metodu uygulanarak 2. Tip integral denklemine çevrilir ve Adomian Ayrıştırma Metodu uygulanarak çözüme ulaşıldığı görülmüştür [13]. Bu metotla lineer, lineer olmayan, genel Schlömilch denklemi ve Schlömilch tip integral denkleminin çözümlerine ulaşıldığı görülür.

İntegral denklemlerinin çözümü için kullanılan yöntemlerden biride homotopi perturbasyon metodudur. Bu yöntem ve onun çeşitleri; mühendislik, fizik ve matematik gibi birçok farklı bilim dallarında ortaya çıkan, uygulamaya dayalı problemleri çözmek için uygulanmıştır. Bunlardan biride Fredholm integral denkleminin çözümü için kullanılan yöntemlerden biri de Homotopi Perturbasyon Metodudur [7]. Fredholm integral denklemlerini çözmenin bir başka yoluda Homotopi Perturbasyon Metoduna bir modifikasyon oluşturmaktır [8].

Bu tez çalışmasının yöntem bölümünde Schlömilch integral denklemleri ve çeşitlerini çözmek için Homotopi Perturbasyon Yönteminde kullanılan homotopi modifiye edilerek yeni bir homotopi tanımlandı. Bu değişikliğin sonucu olarak lineer, lineer olmayan ve genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemlerine başarılı bir şekilde uygulandı. Ayrıca önerilen yöntemle elde edilen çözümler ile iyi bilinen gama fonksiyonu arasında ilişki kuruldu. Önerilen algoritmanın kullanışlığı ve uygulanabilirliğini göstermek için açıklayıcı örnekler verildi. Böylece Schlömilch integral denklemlerini çözmek için bulunan formülün uygulanabilirliği örnekler üzerinde test edildi. Bu çalışmada elde edilen sonuçlar uluslararası bir kongrede sunulmuş olup uluslararası bir dergide makale olarak basılmıştır [4].

# 4. YÖNTEM

Lineer ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemleri atmosferik olarak önemli ve yararlı denklemler olarak kabul edilir. Bazı iyonosferik problemler için denklemler ve çözümleri kullanılmıştır. Denklemin ve fizikteki uygulamalarının kapsamlı bilgisi için okuyucuyu [9-15] kaynaklarına yönlendiriyoruz. Standart Schlömilch integral denklemi aşağıdaki forma sahiptir.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, \qquad -\pi \le x \le \pi. \tag{4.1}$$

Bu denklemin aşağıdaki formda çözümünün bulunduğu bilinmektedir.

$$u(x)= f(0)+x\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} f^{'}(x\sin t)dt, \tag{4.2}$$

burada türevin $xsint$ ya göre alınması gerekir [9-12].
Standart Schlömilch integral denklemine ek olarak Schlömilch integral denkleminin iki çeşit formu daha vardır. Bunlardan birincisi genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemidir. Aşağıdaki şekildedir.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^{n} t)dt, n\ge 1. \tag{4.3}$$

ikincisi lineer olmayan Schlömilch integral denklemidir. Aşağıdaki formdadır.

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} F(u(x\sin t)dt, \tag{4.4}$$

burada $F(u(xsint)$ lineer olmayan fonksiyondur. $u(xsint)\ ve\ f \quad -\pi \le x \le \pi$ aralığında sürekli diferansiyellenebilen fonksiyondur.
İyonosferik problemlerin teorik analizlerinin aksine, bunların hesaplama yöntemleri üzerine araştırma yapılmıştır [4,9-11].

### 4.1. Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodu

Schlömilch integral denklemlerinin çözümü için Homotopi Perturbasyon Yönteminde kullanılan homotopi modifiye edilerek yeni bir homotopi tanımlandı. Bu değişikliğin sonucu olarak lineer, lineer olmayan ve genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri de dâhil olmak üzere çeşitli Schlömilch integral denklemlerine başarılı bir şekilde uygulandı. Ayrıca önerilen yöntemle elde edilen çözümler ile iyi bilinen gama fonksiyonu arasında ilişki kuruldu. Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu diğer metotlardan ayıran özellik ise problemlerin çözümünde kullanılan hesaplamaların azaldığı, bazı özel $f$ fonksiyonları için analitik çözümlerin verildiği görülmektedir. Önerilen algoritmanın kullanışlılığı ve uygulanabilirliği göstermek için açıklayıcı örnekler verildi. Böylece Schlömilch integral denklemlerini çözmek için bulunan formülün uygulanabilirliği örnekler üzerinde test edildi. . Bu çalışmada elde edilen sonuçlar uluslararası bir kongrede sunulmuş olup uluslararası bir dergide makale olarak basılmıştır [4]. Daha detaylı araştırma yapmak isteyen okuyucuları [4] kaynağına yönlendiriyoruz.

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunun lineer Schlömilch integral denklemleri, genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemleri ve lineer olmayan Schlömilch integral denklemlerine uygulanışını inceleyelim.

### 4.2. Lineer Schlömilch İntegral Denklemi

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, \qquad (4.5)$$

(4.5) Lineer Schlömilch integral denklemine, yeni uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım.

4.2.1. Teorem

Derecesi $n$ olan $f$ bir polinom fonksiyondur. (4.5) denkleminin çözümüde $f$ fonksiyonun derecesiyle aynı olan bir polinom fonksiyondur [5].

Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon metodu;

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

olarak seçilsin.

$$H(u,p,m)=(1-p)F(u)+pL(u)+p(1-p)\sum_{i=0}^{n} m_i x^i=0 \tag{4.6}$$

şeklinde tanımlanarak yeni bir homotopi elde edildi.

$$F(u)=u(x)$$

$$L(u)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt-f(x)$$

olarak seçilsin (4.6) daki denklemde yerine yazılırsa;

$$H(u,p,m)=(1-p)u+p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt-f(x)\right)+p\sum_{i=0}^{n} m_i x^i-p^2\sum_{i=0}^{n} m_i x^i=0 \tag{4.7}$$

elde edilir.

$u=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots$ şeklinde (4.7) denkleminde yerine yazılırsa;

$$p^0: u_0=0,$$

$$p^1: u_1=\sum_{i=0}^{n}(a_i-m_i)x^i,$$

$$p^2: u_2=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i-\frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)(a_i-m_i)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{i}{2}+1\right)}\right)x^i \tag{4.8}$$

.

.

.

$$p^{k+1}: u_{k+1} = u_k - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_k(x\sin t)dt, k \geq 2$$ bulunur.

(4.8) denlemindeki $u_2$ fonksiyonu sıfıra eşitlenirse $m_i$ $(i = 0,1,2,\ldots n)$ bulunur.

$$u = u_1 = \sum_{i=0}^{n}(a_i - m_i)x^i. \tag{4.9}$$

(4.8) de $u_2 = 0$ çözülerek bulunan $m_i$ ler (4.9) yerine yazılırsa Schlömilch integral denkleminin kapalı formda çözümü bulunur.

Ayrıca $i = 0,1,2,\ldots$ $m_i$ leri veren formül aşağıdaki şekildedir.

$$m_i = \frac{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right) - \sqrt{\pi}\left(\frac{i}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{i+1}{2}\right)} a_i, i = 0,1,2,\ldots,n. \tag{4.10}$$

$m_i$ nin gama fonksiyonuna bağlı olarak çözümü bulunur [4].

*Örnek*

Lineer Schlömilch integral denklemini, $f(x) = x^3$ olarak çözelim.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \leq x \leq \pi$$

Lineer Schlömilch integral denklemine Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodu uygulanırsa;

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\sum_{i=0}^{3} m_i x^i = 0$$

$f(u) = u$ ve $L(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt - x^3$ olarak seçilir.

$$H(u,p,m) = (1-p)(u_0 + pu_1 + p^2u_2 + \ldots)$$
$$+ p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(x\sin t) + pu_1(x\sin t) + p^2u_2(x\sin t) + \ldots dt - x^3 + \sum_{i=0}^{3} m_i x^i\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Terimler açık bir şekilde yazılırsa;

$u_0 = 0$

$u_1 = x^3 - m_0 - m_1 x - m_2 x^2 - m_3 x^3 = (1 - m_3)x^3 - m_2 x^2 - m_1 x - m_0$

$$u_2 = u_1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x\sin t)dt + \sum_{i=0}^{3} m_i x^i$$

.

.

.

$u_2 = 0$ eşitlenerek, $m_0 = m_1 = m_2 = 0$ ve $m_3 = 1 - \frac{3\pi}{4}$ olarak bulunur.

$u = u_0 + u_1 = (1 - m_3)x^3 - m_2 x^2 - m_1 x - m_0$

$= \frac{3\pi}{4}x^3$ olarak bulunur.

*Örnek*

Lineer Schlömilch integral denklemini, $f(x) = 1 + x + \pi x^2$ olarak çözelim.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım;

$$H(u,p,m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\sum_{i=0}^{2} m_i x^i = 0$$

$f(u) = u$ ve $L(u) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt - (1 + x + \pi x^2)$ olarak seçilir.

$$H(u,p,m) = (1-p)(u_0 + pu_1 + p^2 u_2 + ...)$$
$$+ p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(x\sin t) + pu_1(x\sin t) + p^2 u_2(x\sin t) + ...dt - x^3 + \sum_{i=0}^{3} m_i x^i\right) = 0$$

Terimler açılırsa;

$u_0 = 0,$

$u_1 = 1 + x + \pi x^2 - m_0 - m_1 x - m_2 x^2 = 1 - m_0 + (1 - m_1)x + (\pi - m_2)x^2,$

$$u_2 = u_1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(x\sin t)dt + \sum_{i=0}^{2} m_i x^i$$

$u_2 = 0$ olarak seçilirse $m_0, m_1, m_2$ değerleri hesaplanırsa;

$m_0 = 0,\ m_1 = \frac{2-\pi}{2},\ m_2 = -\pi.$ olarak bulunur.

$u = u_0 + u_1 = 1 - m_0 + (1 - m_1)x + (\pi - m_2)x^2,$

$\quad = 1 + \frac{\pi}{2}x + 2\pi x^2.$

*Örnek*

Lineer Schlömilch integral denklemi, $f(x) = x + 3x^2$ olarak çözelim.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım;

$f(x)$ denklemindeki $x$ lerin katsayıları $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3$ olarak verilmiştir $m_i$ leri bulmak için (4.10) denklemi kullanılarak $m_0 = 0, m_1 = 1 - \frac{\pi}{2},\ m_2 = -3,$ bulunur. Böylece kapalı formdaki çözümü;

$$\begin{aligned} u = u_1 &= (a_0 - m_0) + (a_1 - m_1)x + (a_2 - m_2)x^2 \\ &= \frac{\pi}{2}x + 6x^2 \end{aligned}$$

şeklinde bulunur.

*Örnek*

Lineer Schlömilch integral denklemi için $f(x) = 1 + \pi x^2$ olsun.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım;

$f(x)$ fonksiyonunda $a_0 = 1, a_1 = 0, a_2 = \pi$ olarak verilmiştir. Ayrıca (4.10) denklemi kullanılarak $m_0 = 0, m_1 = 0$ $m_2 = -\pi,$ bulunur. Böylece

$$\begin{aligned} u = u_1 &= (a_0 - m_0) + (a_1 - m_1)x + (a_2 - m_2)x^2 \\ &= 1 + 2\pi x^2. \end{aligned}$$

kapalı formdaki çözümü bulunur.

**4.3. Genelleştirilmiş Schlömilch İntegral Denklemi**

Genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemi;

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^r t)dt, r \ge 1 \tag{4.11}$$

$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ olarak tanımlanır. Homotopi tanımlanırsa;

$$H(u, p, m) = (1-p)F(u) + pL(u) + p(1-p)\sum_{i=0}^{n} m_i x^i = 0 \tag{4.12}$$

denklemi elde edilir.

$F(u) = u$ *ve* $L(f) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^r t)dt - f$ denklemler (4.12) yerine yazılırsa;

$$H(u,p,m)=(1-p)u+p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u(x\sin^r t)dt-f\right)+p\sum_{i=0}^{n}m_ix^i-p^2\sum_{i=0}^{n}m_ix^i=0$$

elde edilir. $u=u_0+pu_1+p^2u_2+\cdots$ (4.12) yerine yazılırsa;

$$p^0:u_0=0,$$

$$p^1:u_1=\sum_{i=0}^{n}(a_i-m_i)x^i,$$

$$p^2:u_2=\sum_{i=0}^{n}\left(a_i-\frac{\Gamma\left(\frac{ri+1}{2}\right)(a_i-m_i)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{ri}{2}+1\right)}\right)x^i \tag{4.13}$$

.

.

.

$$p^{k+1}:u_{k+1}=u_k-\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}u_k(x\sin^r t)dt,k\geq 2$$ bulunur.

(4.13) denkleminde $u_2=0$ eşitlenir ve $m_i$ ler bulunur.

$$u=u_1=\sum_{i=0}^{n}(a_i-m_i)x^i,$$

Schlimilch integral denkleminin kapalı formdaki çözümü bulunur [4].
Ayrıca $m_i$'leri veren formül aşağıdaki şekildedir.

$$m_i=\frac{\Gamma\left(\frac{ri+1}{2}\right)-\sqrt{\pi}\left(\frac{ri}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{ri+1}{2}\right)}a_i,(i=0,1,2,...,n). \tag{4.14}$$

*Örnek*

Aşağıdaki genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemini ,
$f(x) = 4x - \frac{5}{16}x^2 \; ve \; r = 3$ için çözelim[13].

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^3 t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

Uyarlanmış homotopi pertubasyon metodunu uygulayalım.

$f(x) = 4x - \frac{5}{16}x^2$ olduğu için $a_0 = 0, a_1 = 4 \; ve \; a_2 = -\frac{5}{16}$ olur.
$m_i \;\; i = 0,1,2,\ldots$ için (4.14) denklemi uygulanırsa $m_0 = 0, m_1 = 4 - 3\pi, \; m_2 = \frac{11}{16}$ olarak bulunur.

$$u = u_1 = \sum_{i=0}^{2}(a_i - m_i)x^i,$$

$$= 3\pi x - x^2,$$

kapalı formdaki çözümü bulunur.

*Örnek*

Aşağıdaki genelleştirilmiş Schlömilch integral denklemini
$f(x) = x + 3x^2$ ve $r = 2$ için çözelim.

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin^2 t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım.

$a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 3$ ve (4.14) deki formül uygulanırsa $m_0 = 0, \; m_1 = -1,$
$m_2 = -5$ olarak bulunur.

$$u = u_1 = \sum_{i=0}^{2}(a_i - m_i)x^i,$$

$$= 2x + 8x^2$$

kapalı formdaki çözümü bulunur.

## 4.4. Lineer Olmayan Schlömilch İntegral Denklemi

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} F[u(x\sin t)]dt, -\pi \le x \le \pi \tag{4.15}$$

$F[u(xsint)]$ lineer olmayan fonksiyondur. ve $F$ fonksiyonun tersi var ise $F[u(xsint)] = h(xsint)$ şeklindedir ve $u(xsint) = F^{-1}[h(xsint)]$ olur.

$$u(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin t)dt$$

$h(x)$ fonksiyonu bulunur sonra $F^{-1}$ fonksiyonun tersi uygulanır ve $u(x)$ fonksiyonu bulunur[4].

*Örnek*

Lineer olmayan Schlömilch integral denklemi $f(x) = x^2$ için uygulanırsa [13]

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u^2(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi,$$

Uyarlanmış homotopi perturbasyon metodunu uygulayalım.
$h = u^2$ olarak değiştirilirse;

$$x^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} h(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

$a_0 = a_1 = 0,\ a_2 = 1\ f(x)$ denkleminden elde edilir. (4.10)daki formül kullanılarak $m_0 = m_1 = 0\ \ m_2 = -1$ bulunur. Böylece açık çözüm $h = 2x^2$ dir. $h = u^2$ olduğu için kapalı formdaki çözümü
$u(x) = \pm\sqrt{2}x$ şeklindedir.

# 5. KARŞILAŞTIRMA VE TARTIŞMA

Bu bölümün amacı, bir örneği hem Regularizasyon-Adomian Ayrıştırma Metodu, hem Homotopi Perturbasyon Metodu hem de Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metoduyla çözerek Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodunun kullanışlığını, uygulanabilirliğini ve mükemmelliğini bir örnek üzerinden tartışmak ve karşılaştırmaktır. Aşağıdaki örnekte açıkça görüleceği üzere, f bir polinom fonksiyonu olduğunda, uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodu her iki yöntem üzerinde de önemli derecede avantajlıdır.

*Örnek*

Aşağıdaki Schlömilch integral denklemini çözelim.

$$1+x+\pi x^2=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt, -\pi \le x \le \pi$$

örneğini farklı metodlarla çözelim. Kullanacağımız metotlar Homotopi Perturbasyon Metodu, Regularizasyon-Adomian Metodu ve Uyarlanmış Homotopi Metodudur.

Homotopi Perturbasyon Metodu (HPM):

$$H(u,p)=(1-p)u(x)+p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u(x\sin t)dt-f(x)\right)=0$$

$$H(u,p)=(1-p)\left(u_0+pu_1+p^2u_2+\ldots\right)+p\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_0(xsint)+pu_1(xsint)+\ldots dt-f(x)\right)=0$$

terimler açılırsa;

$$u_0=0,$$
$$u_1=f(x)=1+x+\pi x^2,$$

$$u_2 = u_1 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_1(xsint)dt = (1-\frac{2}{\pi})x + \frac{1}{2}\pi x^2,$$

$$u_3 = u_2 - \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_2(x\sin t)dt = (1-\frac{2}{\pi})x + \frac{1}{2}\pi x^2,$$

bulunan terimler hesaplanarak toplanırsa;

$$u(x) = u_0 + u_1 + u_2 + ...$$

$$= 1 + x + \pi x^2 + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)x + \frac{1}{2}\pi x^2 + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)^2 x + \frac{1}{4}\pi x^2 + \ldots\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^k x + \frac{1}{2^k}\pi x^2 + \ldots$$

$$= 1 + x + \pi x^2 + \left(1-\frac{2}{\pi}\right)x\left(1+\left(1+\frac{2}{\pi}\right)+\left(1-\frac{2}{\pi}\right)^2 + \ldots\right) + \pi x^2\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots\right)$$

$= 1 + \frac{\pi}{2}x + 2\pi x^2$ olarak bulunur.

Regularizasyon-Adomian Metodu [13]:

Regularizasyon metodu uygulanırsa;

$$u_\alpha(x) = \frac{1+x+\pi x^2}{\alpha} - \frac{2}{\alpha\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} u_a(x\sin t)dt,$$

Adomian ayrıştırma metodu uygulanırsa;

$u_{a_0}(x) = \frac{1}{\alpha}(1 + x + \pi x^2)$ ,

$u_{a_1}(x) = -\frac{1}{a^2} - \frac{2x}{\pi a^2} - \frac{\pi x^2}{2a^2}$ ,

$u_{a_2}(x) = \frac{1}{a^3} + \frac{4x}{\pi^2 a^3} + \frac{\pi x^2}{4a^3}$ , terimler toplanırsa;

$$u_a(x) = \frac{1}{a}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^3}\right) + \frac{1}{a}x\left(1 - \frac{2}{a\pi} + \frac{4}{a^2\pi^2} - \cdots\right) + \frac{\pi x^2}{a}\left(1 - \frac{1}{2a} - \frac{1}{4a^2} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{a+1} + \frac{\pi x}{a\pi} + \frac{2\pi x^2}{2a+1}.$$

elde edilir.

$$u(x) = \lim_{\alpha \to 0} u_\alpha(x) = 1 + \frac{\pi}{2}x + 2\pi x^2$$

çözümü bulunur.

Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodu:

$f(x)$ denklemindeki $a_{\mathbf{0}} = 1, a_1 = 1, a_2 = \pi$ olmak üzere, (4.10) denklemi kullanılarak $a_{\mathbf{0}} = 1, a_1 = 1, a_2 = \pi$ bulunur.

Böylece çözüm;

$$u = u_1 = (a_0 - m_0) + (a_1 - m_1)x + (a_2 - m_2)x^2$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2}x + 2\pi x^2.$$

olarak bulunur.

Bu yöntemle Schlömilch'in çeşitli integral denklemlerinin çözümü için Homotopi Perturbasyon Yöntemine bir modifikasyon uyguladık.
Böylece Uyarlanmış Homotopi Perturbasyon Metodu diğer yöntemlerde öngörülen çok miktarda hesaplamayı azalttığı görülmüştür.
Ayrıca önerilen yöntemle elde edilen çözümler ile iyi bilinen gama fonksiyonu arasında ilişki kuruldu. Sunulan yöntemin kullanışlılığı ve uygulanabilirliği için açık örnekler verilmiştir [4].

## 6. KAYNAKLAR

[1] Tricomi, F. G., “Integral Equations”, ***Dover***, (1985).

[2] Wazwaz, A. M., “Linear and Nonlinear Integral Equations Methods and Applications”, ***Springer Verlag***, Berlin Heidelberg, 4, 33-35, 65-66, 160, 161-162, 121-122, 166-168 (2011).

[3] Zemyan, S., M., “The Classical Theory of Integral Equations: A Concise Treatment”, ***Birkhauser***, (2012).

[4] Altürk, A., Arabacıoğlu H., “A new modification to homotopy perturbation method for solving Schlömilch’s integral equation” **Int. J. Adv. Appl. Math. andMech.,** 5(1): 40 – 48, (2017).

[5] Altürk, A., “On the solutions of Schlomilch’s integral equations”, **CBU Journal of Science,** 13(3): (2017).

[6] Altürk, A., “The Regularization- Homotopiy Method for Two-Dimensional Fredholm Integral Equations of the First Kind”, **Mathematical and Computational Applications**, 21(2): (2016).

[7] Altürk, A., “Numerical solution of linear and nonlinear Fredholm integral equations by using weighted mean-value theorem”**. Springerplus**, 5(1): (2016).

[8] Golbabai, A., Keremati B., “Modified homotopy perturbation method for solving Fredholm integral equations”, **Chaos, Solitons and Fractals**, 37: 1528–1537 (2008).

[9] Unz, H., “Schlömilch’s integral equation”**, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics**, 25(2): 101–102 (1963).

[10] Unz, H., “Schlömilch’s integral equation for oblique incidence”**, Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics**,28(3): 315–316 (1966).

[11] Gething, P.J.D., Maliphant R. G., "Unz's application of Schlomilch's integral equation to oblique incidence observations", **Journal of Atmospheric and Terrestrial Physics**, 29(5): 599–600 (1967).

[12] Parand, K., Delkhosh, M., "Solving the nonlinear Schlomilch's integral equation arising in ionospheric problems", **Afr. Mat.,** 28(3-4): 459-480 (2017).

[13] Wazwaz, A.M., "Solving Schlömilch's integral equation by the Regularization-Adomian method"**, Rom. Journ. Phys**. 60(1-2): 56–71 (2015).

[14] Bougoffa, L, Al-Hagbani, M, Brceski, I, Randolph, C.R.A., "Convenient Technique for Solving Integral Equations of the First Kind by the Adomian Decomposition Method"***, Kybernetes***, 41: 145-156 (2012).

[15] De, S.S, . Sarkar B. K, Mal M., M. De, Adhikari B. G., "On Schlomilch's integral equation for the ionospheric plasma"**, Japanese Journal of Applied Physics**, 33(1-7A): 4154–4156 (1994).

[16] Kourosh, P., "Delkhosh M.,Solving the nonlinear Schlömilch's integral equation arising in ionospheric problems", **Afr. Mat**. 28(3): 459-480 (2017).

[17] Wazwaz, A. M., "The regularization-homotopy method for the linear and non-linear Fredholm integral equations of the first kind", **ISPACS**-Communications in Numerical Analysis, 2011:11 (2011).

[18]Coşgun T., "Waveletlerle integral denklemlerine yaklaşım",Yüksek Lisans Tezi, **Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü,** Amasya, 24 (2015).

[19] Adomian G., "A Solving Frontier Problems of Physics, The Decomposition Method", **Kluwer**, Boston, (1994).

[20] Adomian G., “A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation”, **Math. Comput. Modelling**, 13:17–43(1992).

[21] Wazwaz A.M., “Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory”, **HEP and Springer**, Beijing and Berlin, (2009).

[22] Wazwaz A.M., “A First Course in Integral Equations”, **World Scientific** Singapore, (1997).

[23] Phillips D.L., “A technique for the numerical solution of certain integral equations of the first kind”**, J. Assoc. Comput**. Mach, 9: 84–96 (1962).

[24] Tikhonov A.N., “On the solution of incorrectly posed problem and the method of regularization”, **Soviet Math**, 4:1035–1038 (1963).

[25] He J.H., “Homotopy perturbation technique”, **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg**., 178 :257–262(1999).

[26] Rajabi, A., Ganji, D.D., Taherian H., “Application of homotopy perturbation method in nonlinear heat conduction and convection equations”, **Physics Letters A**, 360(4-5): 570–573 (2007).

[27] Fereidoon, A.,Yaghoobi H., Davoudabadi M., “Application of the homotopy perturbation method for solving the foam drainage equation”, **International Journal of Differential Equations**, Article ID 864023 doi:10.1155/2011/864023(2011).

[28] Mallik, A., Ranjan, R., Das R., “Application of homotopy perturbation method and inverse prediction of thermal parameters for an annular fin subjected to thermal load”, **Journal of Thermal Stresses**, 39(3):298–313 (2016).

[29] Gupta, S., Kumar, D., Singh, J., “Application of He’s homotopy perturbation method for solving nonlinear wave-like equations with variable coefficients”, **Int. J. of Adv. in Appl.Math andMech**., 1(2): 65–79 (2013).

[30]Jassim, H. K., “Homotopy perturbation algorithm using Laplace transform for Newell-Whitehead-Segel equation”, **Int. J. of Adv. in Appl.Math andMech**., 2(4): 8–12 (2015).

[31] Pathak, S.,Singh T., “The solution of non-linear problem arising in infiltration phenomenon in unsaturated soil by optimal homotopy analysis method”**, Int. J. of Adv. in Appl.Math andMech**., 4(2): 21–28 (2016).

[32] Nayfeh, A.H., “Problems in perturbation”,**Wiley**, New York, (1985).

[33] Liao, S.J., “Boundary element method for general nonlinear differential operators”, **Engineering Analysis with Boundary Elements**, 20(2):91–99 (1997).

[34] Liao, S.J., “An approximate solution technique not depending on small parameters: A special example”**, International Journal of Non-LinearMechanics**, 30(3):371–380 (1995).

[35] Delves, L.M., and Walsh J., “Numerical Solution of Integral Equations”**,** **Oxford University Press**, London, (1974).

[36] Hadamard, J., “Lectures on Cauchy’s Problem in Linear Partial Differential equations”, **Yale University Press**, New Haven, (1923).

[37] Kress, R., “Linear Integral Equations”, **Springer**, Berlin, (1999).

[38] Bocher, M., “Integral Equations”, **Cambridge University Press**, London, (1974).

[39] Delves, L.M., and Walsh J., “Numerical Solution of Integral Equations”, **OxfordUniversity Press**, London, (1974).

[40] Churchhouse, R.F., “Handbook of Applicable Mathematics”, **Wiley**, New York (1981).

[41] Aksoy, Y,. İntegral Denklemler, Cilt 1, **Y.T.Ü Yayınları**, İstanbul,13-66 (1998).

# 7. ÖZGEÇMİŞ VE İLETİŞİM BİLGİLERİ

**Kişisel Bilgiler**

Soyadı, Adı : Zehra Hülya ARABACIOĞLU

Uyruğu : T.C.

Doğum Tarihi ve Yeri : 18.08.1991- Amasya

E-Mail : hulyaarabacioglu@gmail.com

**Eğitim**

| **Derece** | **Eğitim Birimi** | **Mezuniyet tarihi** |
|---|---|---|
| Yüksek Lisans | Amasya Üniversitesi /Matematik | 2018 |
| Lisans | Amasya Üniversitesi/ Matematik | 2014 |
| Lise | Amasya Alptekin Anadolu Lisesi | 2009 |

| **İş Deneyimi/Yıl** | **Yer** | **Görev** |
|---|---|---|
| 2016/2017 | Sınav Eğitim Kurumları | Lise Matematik Öğretmeni |
| 2017- | Amasya Özel Açı Temel Lisesi | Lise Matematik Öğretmeni |

**Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)**

**1.** Altürk A., Arabacıoğlu H., A new modification to homotopy perturbation method for solving Schlömilch's integral equation**,** ***Int. J. Adv. Appl. Math. And Mech***. 5(1): 40 – 48 (2017).

**2.** Arabacıoğlu H., Altürk A., A new modification to homotopy perturbation method for solving Schlömilch's integral equations , ICMME-2017, Harran Üniversitesi, Şanlıurfa, Türkiye, 11-13 Mayıs 2017. (***Sözlü Sunum***)