TC

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

SS-YARIYEREL MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ARZU OLĞUN

AĞUSTOS 2020

SS-YARIYEREL MODÜLLER

Arzu OLĞUN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

AĞUSTOS 2020

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

....

Arzu OLĞUN

31/08/2020

SS-YARIYEREL MODÜLLER
(Yüksek Lisans Tezi)

Arzu OLĞUN

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Ağustos 2020

ÖZET

Bu tez çalışmasında, ss-yarıyerel modüller tanımlanarak temel özellikleri verilmiştir. M nin her U alt modülü, U arakesit V yarıbasit olacak şekilde M de V zayıf tümleyenine sahip ise, M ye ss-yarıyerel modül denir. Ss-yarıyerel modüllerin sınıfı bölüm modülleri, tümleyen alt modüller ve direkt toplamlar altında kapalıdır. Özellikle, R bir halka olmak üzere her sol R-modülün ss-yarıyerel olması için gerek ve yeter koşul R nin yarıyerel ve R sol R-modülün desteğinin R nin radikalini kapsamasıdır.

Sayfa Adedi : 48
Anahtar Kelimeler : ss-yarıyerel modül, yarıyerel modül, zayıf ss-tümleyen
Danışman : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

SS-SEMILOCAL MODULES

(M. Sc. Thesis)

Arzu OLĞUN

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

August 2020

ABSTRACT

In this study, the basic properties of ss-semilocal modules have been proved by defining the ss-semilocal modules. A module M is ss-semilocal if every submodule U of M has a weak supplement V in M such that U intersection V is semisimple. The class of ss-semilocal modules is closed under factor modules, supplement modules and direct sums. In particular, for a ring R every left R-module is ss-semilocal if and only if R is semilocal and socle of R left R-module includes the radical of R.

Page Number : 48

Key Words : semilocal module, ss-semilocal module, weak ss-supplement

Supervisor : Prof. Dr. Ergül TÜRKMEN

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Süreç boyunca desteğini esirgemeyen, zorlandığım her aşamada yardımcı olan, bilgi ve birikiminden faydalandığım tez danışmanım Prof. Dr. Ergül Türkmen'e en içten saygı ve teşekkürlerimi sunarım. Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen çok sevdiğim annem ve babama çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında kullanmış olduğumuz simgeler, yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

Simgeler	Açıklama
$\emptyset$	boş küme
$\mathbb{N}$	doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	asal sayılar kümesi
$\subseteq$	alt küme
$\subset$	öz alt küme
$\cap$	kümelerde kesişim işlemi
$\mathbf{0}_{\boldsymbol{R}}$	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,+)$ abel grubunun birimi
$\mathbf{1}_{\boldsymbol{R}}$	$(R,+,\cdot)$ halkasında $(R,\cdot)$ cebirsel yapısının birimi
$\leq$	alt modül
$<$	öz alt modül
$\boldsymbol{M} / \boldsymbol{N}$	M modülünün N alt modülüne göre bölüm modülü
$\ll$	küçük alt modül
$\boldsymbol{M} \cong \boldsymbol{N}$	izomorf modüller
$\prod_{i\in I} \boldsymbol{N_i}$	N_i alt modüllerinin direkt çarpımı
$\sum_{i\in I} \boldsymbol{N_i}$	N_i alt modüllerinin toplamı
$\oplus_{i\in I} \boldsymbol{N_i}$	N_i alt modüllerinin direkt toplamı
$\langle \boldsymbol{X} \rangle$	X alt kümesi tarafından üretilen modül
$\boldsymbol{Rm}$	m elemanı tarafından üretilen devirli modül
$\boldsymbol{M}^{(I)}$	M modülünün I indis kümesine göre kopyalarının direkt toplamı

Kısaltmalar	Açıklama
$\boldsymbol{Rad}(\boldsymbol{M})$	M modülünün radikali
$\boldsymbol{Des}(\boldsymbol{M})$	M modülünün desteği

$\boldsymbol{Des_S(M)}$	M modülünün tüm basit olan küçük alt modüllerinin toplamı
$\boldsymbol{P(M)}$	M modülünün tüm radikal alt modüllerinin toplamı
$\boldsymbol{G}$ör$\boldsymbol{(f)}$	f homomorfizmasının görüntü kümesi
Ç$\boldsymbol{ek(f)}$	f homomorfizmasının çekirdeği
$\boldsymbol{End(M)}$	M modülünün endomorfizmalarının kümesi
$\boldsymbol{Hom_R(A,B)}$	A dan B ye R-modül homomorfizmalar kümesi
$\boldsymbol{R}$-**Mod**	Sol R-modüller kategorisi
$\boldsymbol{J = Rad(R)}$	R Halkasının Jacobson Radikali
$\boldsymbol{Ob(\mathcal{K})}$	$\mathcal{K}$ kategorisinin nesneler sınıfı
$\boldsymbol{Mor_{\mathcal{K}}(A,B)}$	$\mathcal{K}$ kategorisinde A dan B ye morfizmalar kümesi

1.GİRİŞ

Bu tezde, R halkası olarak birimli halka ve tüm modüller üniter sol R-modül olarak alınmıştır.

R halka ve M bir R-modül olsun. $U \leq M$ ifadesi U nun M nin alt modülü veya M nin U nun bir genişlemesi olduğunu gösterir. M nin her K öz alt modülü için $M \neq N + K$ ise, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir. M nin her alt modülü M de küçük ise, M ye **oyuk modül** denir. M nin tüm küçük alt modüllerinin toplamı M nin **radikalidir** ve $Rad(M)$ ile gösterilir. $Rad(M)$ aynı zamanda M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine eşittir. Sonlu üretilmiş bir M oyuk modülü yereldir. M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile arakesiti sıfırdan farklı olan E alt modülüne M de **büyüktür** denir ve $E \trianglelefteq M$ ile gösterilir. M nin tüm basit alt modüllerinin toplamı M nin **desteği** olarak tanımlanır ve $Des(M)$ ile gösterilir. M nin tüm büyük alt modüllerinin arakesiti $Des(M)$ e eşittir. D. X. Zhou ve X. R. Zhang 2011'de yayınlamış oldukları "Small-essential submodules and Morita Duality" adlı makalede bir M modülünün basit olan tüm küçük alt modüllerinin toplamı $\boldsymbol{Des_s(M)}$ ile gösterilmiştir. E. Kaynar, H. Çalışıcı ve E. Türkmen ise, 2020'de yayınlamış oldukları "ss-supplemented modules" adlı makalede $Des_s(M) = Des(M) \cap Rad(M)$ olduğunu göstermişlerdir. Buradan hareketle $Des_s(M)$, M nin küçük alt modülü ve $Des_s\big(Des_s(M)\big) = 0$ dır.

$U \leq M$ olmak üzere V, $M = U + V$ şartını sağlayan minimal alt modül ise, V ye U nun M de **tümleyeni** denir. V alt modülünün U nun M de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır. Her alt modülü tümleyene sahip olan modüle **tümlenmiş modül** denir. Her yarıbasit modül ve artin modül açıkça tümlenmiştir [15]. $Rad(V)$, V alt modülünün tüm küçük alt modüllerinin toplamı olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ iken $U \cap V \leq Rad(V)$ dir. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ şartını sağlayan $V \leq M$ alt modülüne U nun M de **Radikal tümleyeni** veya kısaca **Rad-tümleyeni** denir. M nin her alt modülü Rad-tümleyene sahip ise, M ye **Radikal tümlenmiş** veya kısaca **Rad-tümlenmiş modül** denir [16]. Buna göre her tümlenmiş modül Rad-tümlenmiştir.

Rad-tümleyen alt modüllerin tanımı ve herhangi X modülü için $Des_s(X) = Des(X) \cap Rad(X) \subseteq Rad(X)$ eşitliğinden hareketle E. Kaynar, H. Çalışıcı ve E. Türkmen 2020'de yayınlamış oldukları “ss-supplemented modules” adlı makalede ss-tümleyen ve ss-tümlenmiş modül kavramlarını tanımlamışlardır. M modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarıbasit ise, V ye U nun **ss-tümleyeni** denir. M nin her alt modülü ss-tümleyene sahip ise, M modülüne **ss-tümlenmiş modül** denir.

Ss-tümlenmiş modüller sınıfının, yarıbasit ve tümlenmiş modüller sınıflarının arasında olduğu açıktır. Genel olarak, artin modüller ss-tümlenmiş olmak zorunda değildir. Aynı makalede ss-tümlenmiş modüllerin temel özellikleri verilerek, modülleri ss-tümlenmiş olan halkalar karakterize edilmiştir. C. Lomp 1999 yılında yayınladığı “On semilocal modules and rings” makalesinde zayıf tümlenmiş modülleri ve yarıyerel modülleri çalışmıştır. Buna göre M modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ $(U \cap V \leq Rad(M))$ ise, V ye U nun **zayıf tümleyeni** (zayıf Rad-tümleyeni) denir. M nin her alt modülü zayıf tümleyene sahip ise, M modülüne **zayıf tümlenmiş modül** denir. Tümlenmiş modüller zayıf tümlenmiştir. Literatürde mevcut olan bu kavramların doğal bir sonucu olarak bu tezde zayıf ss-tümleyen kavramı tanımlanmıştır. Bu tezde, $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ şartını sağlayan $V \leq M$ ye U nun M de **zayıf ss-tümleyeni** denir. M nin her alt modülü zayıf ss-tümleyene sahip ise, M ye **ss-yarıyerel modül** denir. Bu tezde, ss-yarıyerel modüllerin temel özellikleri verilerek ss-yarıyerel modüller sınıfının bölüm modülleri, direkt toplamlar ve tümleyen alt modüller altında kapalı olduğu ispatlanmıştır. Özellikle, R bir halka olmak üzere (i) ${}_R R$ ss-yarıyereldir, (ii) her sol R modül ss-yarıyereldir ve (iii) R yarıyerel ve $Rad(R) \subseteq Des({}_R R)$ dir ifadeleri birbirine denktir.

2. GENEL BİLGİLER

2.1. Halkalar

2.1.1. Tanım Aşağıdaki özellikleri sağlayan $(R,+,.)$ cebirsel yapısına **halka** denir.
(i) $(R,+)$ abel gruptur,
(ii) $\forall\, a,b,c \in R$ için $(ab)c = a(bc)$ dir,
(iii) $\forall\, a,b,c \in R$ için $a(b+c) = ab+ac$ ve $(a+b)c = ac+bc$ dir [5] .

2.1.2. Tanım $(R,+,.)$ halka olsun. R halkasının $+$ işlemine göre birimine R nin **sıfırı** denir ve 0_R ile gösterilir. Her $a \in R$ için $ae = ea = a$ olacak şekilde bir $e \in R$ varsa, bu elemana R halkasının **birim elemanı** ya da **birimi** denir. $e = 1_R$ yazılışı ile gösterilir. Birim elemanlı bir halkaya **birimli halka** adı verilir.
Bu çalışmada tüm halkalar birimli halka olarak alınacak ve R ile $(R,+,.)$ halkası kastedilecektir.
"**.**" işlemine göre değişmeli olan $(R,+,.)$ halkasına **değişmeli halka** denir. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ değişmeli halkalardır [5].

2.1.3. Tanım R halka ve $\emptyset \neq I \subseteq R$ olsun. I, $(R,+)$ abel grubunun alt grubu ve keyfi $a,b \in I$ için $ab \in I$ ise, I alt grubuna R nin **alt halkası** denir. Ayrıca $\forall r \in R$ ve $\forall a \in I$ için $ar \in I$ $(ra \in I)$ ise , I ya R nin **sağ (sol) ideali** denir. Burada I, R nin hem sağ ideali hem de sol ideali oluyor ise, I ya R nin **ideali** denir.

0 ve R ideallerine R halkasının **aşikar idealleri** denir. R halkasının kendisi dışındaki tüm ideallerine **öz ideal** denir [5].

2.1.4. Tanım R halka ve $0_R \neq r \in R$ olsun. $rs = 0_R$ olacak şekilde bir $0_R \neq s \in R$ elemanı bulunuyorsa, r elemanına R halkasının **sıfır bölen elemanı** denir. Sıfır bölensiz birimli ve değişmeli R halkasına **tamlık bölgesi** denir [5].

2.1.5. Tanım R halka olsun. $a \in R$ elemanı için $ab = ba = 1_R$ olacak şekilde $b \in R$ elemanı mevcutsa, b ye $a \in R$ elemanının **tersi** denir. Burada a ya R halkasının **terslenebilir elemanı** denir [5].

2.1.6. Tanım R birimli halka olsun. R nin sıfırdan farklı her elemanı çarpmaya göre terslenebilirse R ye **bölme halkası** denir [5].
Değişmeli bölme halkası cisimdir.

2.2. Modüller

2.2.1. Tanım R halkası ve $(M,+)$ abel grubu için $(r,m) \longmapsto f(r,m) = rm$ ile tanımlı $f : R \times M \longrightarrow M$ fonksiyonu verilmiş olsun. Her $r, s \in R$ ve her $m, n \in M$ için;
(i) $r(m+n) = rm + rn$,
(ii) $(r+s)m = rm + sm$,
(iii) $(rs)m = r(sm)$
koşulları sağlanıyorsa, M ye **sol R-modül** denir ve $_RM$ ile gösterilir. R birimi 1_R olan bir halka olmak üzere $m \in M$ keyfi elemanı için $1_R m = m$ eşitliği sağlanıyorsa, M modülüne **üniter sol R-modül** denir. Bu tanıma benzer olarak sağ R-modül tanımı da yapılabilir [5].

G abel grup olmak üzere, G bir üniter sol (sağ) $\mathbb{Z}$-modüldür. Dolayısıyla $_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$-modüldür. Her R halkası kendi üzerinde üniter sol R-modüldür ve $_RR$ ile gösterilir. Burada $R = \mathbb{Z}_n$ alınırsa, $\mathbb{Z}_n$ sol $\mathbb{Z}_n$-modüldür. Her vektör uzayı, bir üniter sol modüldür. Bu çalışmada tüm modüller üniter sol R-modül olarak alınacaktır ve kısaca R-modül yazılışı kullanılacaktır.

2.2.2. Tanım R halka, M bir R-modül ve $\emptyset \neq N \subseteq M$ alt küme olsun. Eğer N, $(M,+)$ abel grubunun alt grubu ve her $m \in N$, her $r \in R$ için $rm \in N$ oluyorsa, N alt kümesine M modülünün bir **alt modülü** denir ve $N \leq M$ yazılışı ile gösterilir. Bu tanıma göre 0 ve M, M modülünün aşikar alt modülleridir. M modülünün kendisinden farklı alt modüllerine **öz alt modül** denir. N, M nin öz alt modülü ise, $N < M$ ile gösterilir. R halkasının I öz sol ideali aynı zamanda $_RR$ nin öz alt modülüdür. M modülünün keyfi sayıdaki alt modüllerinin kesişimi M nin alt modülüdür. M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $Rm = \{rm \mid r \in R\} \leq M$ alt modüldür [5].

2.2.3. Tanım M bir R-modül ve $X \subseteq M$ alt küme olsun. M modülünün X alt kümesini kapsayan bütün alt modüllerinin arakesitine M modülünün X **alt kümesi tarafından üretilen alt modülü** denir ve $\langle X \rangle$ ile gösterilir. X kümesine $\langle X \rangle$ alt modülünün **üreteç kümesi** denir. Eğer X sonlu küme ise, $\langle X \rangle$ alt modülüne **sonlu üretilmiş alt modül**,

$X = \{m\}$ şeklinde tek elemana sahipse, $\langle X \rangle = \langle m \rangle$ alt modülüne **devirli alt modül** denir. Eğer $M = \langle X \rangle$ olacak şekilde M nin sonlu bir X alt kümesi varsa, M ye s**onlu üretilmiş modül** ve özel olarak $M = \langle m \rangle$ olacak şekilde $m \in M$ elemanı varsa, M ye $\boldsymbol{m}$ **tarafından üretilen devirli modül** denir. Burada $\langle\, m\, \rangle = Rm = \{\, rm \mid r \in R\, \}$ şeklindedir. Ayrıca $\{\, N_i \mid i \in I\, \}$, M nin alt modüllerinin ailesi ise, $X = \bigcup_{i \in I} N_i$ kümesinin ürettiği alt modüle N_i **modüllerinin toplamı** denir. $\langle\, X\, \rangle = \langle \bigcup_{i \in I} N_i \rangle = \sum_{i \in I} N_i$ şeklinde gösterilir [5].

2.2.4. Tanım M bir R-modül ve $N \leq M$ olsun. M/N bölüm grubu, $r \in R$ ve $m + N \in M/N$elemanları için, $r(m+N) = rm + N$ ile tanımlı $\bullet : R \times M/N \longrightarrow M/N$ dış işlemine göre bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle M modülünün N alt modülüne göre **bölüm modülü** denir [5].

2.2.5. Teorem M sonlu üretilmiş modül olsun**.** M nin her bölüm modülü de sonlu üretilmiştir [5].

İspat M sonlu üretilmiş R-modül ve $L \leq M$ olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan, her $v \in M$ ve her $1 \leq i \leq n$ için $v_i \in M$ ve $r_i \in R$ olmak üzere $M = < \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} >$ ve $v = r_1 v_1 + r_2 v_2 + \cdots + r_n v_n$ dir. Her $v + L \in M/L$ elemanı için

$$v + L = (r_1 v_1 + \cdots + r_n v_n) + L = r_1(v_1 + L) + \cdots + r_n(v_n + L)$$

olduğundan $M/L =< \{v_1 + L, v_2 + L, \ldots, v_n + L\} >$ bulunur. Dolayısıyla M/L sonlu üretilmiştir.

2.2.6. Tanım M bir R-modül ve $\{N_i\}_{i \in I}$, M nin alt modüllerinin ailesi olsun.

(i) $M = \sum_{i \in I} N_i$,

(ii) $\forall i \in I$ için $N_i \cap \sum_{i \neq j} N_j = 0$

şartlarını sağlayan M modülüne $\{N_i\}_{i \in I}$ alt modüller ailesinin **iç direkt toplamı** ya da **direkt toplamı** denir. $M = \bigoplus_{i \in I} N_i$ ile gösterilir. Her bir N_i alt modülüne M modülünün **direkt toplam terimi** denir.

M modülünün N_1 ve N_2 alt modüllerini aldığımızda $M = N_1 \oplus N_2$ olması için gerek ve yeter koşulun $M = N_1 + N_2$ ve $N_1 \cap N_2 = 0$ olduğu açıktır.

$M = M \oplus 0$ şeklinde yazılabildiğinden $M = M + 0$ ve $M = M \cap 0 = 0$ olup M ve 0, M modülünün direkt toplam terimleridir. Burada M ve 0 alt modüllerine M modülünün **aşikar direkt toplam terimleri** denir [12].

2.2.7. Tanım R halka ve I boştan farklı bir indis kümesi olmak üzere, $\{N_i\}_{i\in I}$ R-modüllerin bir ailesi olsun. $\{\alpha \mid \alpha: I \to \bigcup_{i\in I} N_i,\ \forall\, i \in I\ için\ \alpha(i) \in N_i\}$ dönüşümlerin kümesine $\{\boldsymbol{N_i}\}_{\boldsymbol{i\in I}}$ **modüller ailesinin çarpımı** denir ve bu küme $\prod_{i\in I} N_i$ ile gösterilir. Her $i \in I$ için $\alpha(i) = \alpha_i$ ve $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I}$ ile gösterelim. Burada α_i ye α **dönüşümünün $\boldsymbol{i}$. bileşeni** denir. Eğer I indis kümesi sayılabilir ise, $\alpha = (\alpha_i)_{i\in I} = (\ \dots, \alpha_i, \dots)$ şeklindedir.

$\alpha, \beta \in \prod_{i\in I} N_i$ olmak üzere

(i) $\alpha = \beta \iff$ her $i \in I$ için $\alpha_i = \beta_i$

(ii) $\alpha + \beta = (\alpha_i + \beta_i)_{i\in I}$

(iii) $-\alpha = (-\alpha_i)_{i\in I}$

(iv) $r \in R$ olmak üzere $r\alpha = (r\alpha_i)_{i\in I}$ ile tanımlı cebirsel işlemlerine göre $\prod_{i\in I} N_i$ bir R-modül yapısına sahiptir. Bu modüle $\{N_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt çarpımı** denir. $\bigoplus_{i\in I}^{w} N_i = \{\ (\alpha_i)_{i\in I} \mid sonlu\ sayıda\ i \in I\ için\ \alpha_i \neq 0\ \}$ kümesi $\prod_{i\in I} N_i$ modülünün bir alt modülüdür. $\bigoplus_{i\in I}^{w} N_i$ alt modülüne $\{N_i\}_{i\in I}$ modüller ailesinin **dış direkt toplamı** denir. I indis kümesi sonlu ise, $\prod_{i\in I} N_i = \bigoplus_{i\in I}^{w} N_i$ dir [1].

M bir R-modül olmak üzere, yukarıda dış direkt toplam tanımında her bir $i \in I$ için $N_i = M$ alınırsa $\bigoplus_{i\in I} N_i$ direkt toplamına, M nin **kopyalarının toplamı** denir ve $M^{(I)}$ ile gösterilir [12].

2.2.8. Tanım F bir R-modül olsun. I indis kümesi olmak üzere $F = R^{(I)}$ ise, F ye **serbest modül** ve $I = \{1, 2, \dots, n\}$ şeklinde sonlu elemanlı ise, $F = R^{(n)}$ modülüne **sonlu üretilmiş serbest modül** denir [6].

2.2.9. Teorem (Modüler Kural) M modül, K, N ve U da M nin alt modülleri ve $U \leq N$ olsun. Bu takdirde, $(U + K) \cap N = U + (K \cap N)$ dir [1].

İspat Keyfi $m \in (U + K) \cap N$ için $m \in (U + K)$ ve $m \in N$ olduğundan $m = u + k$ olacak şekilde $u \in U$ ve $k \in K$ vardır. $U \leq N$ verildiğinden $u \in N$ olur. Bu durumda $k = m - u$ dur. $N \leq M$ olduğundan $m \in N$, $u \in N$ iken $k \in N$ olup $k \in K \cap N$ bulunur. Dolayısıyla $m \in U + (K \cap N)$ olur. Tersine; $U + (K \cap N) \leq (U + K) \cap N$ olduğu açıktır. Buradan istenen elde edilir.

2.2.10. Tanım R tamlık bölgesi ve M bir R-modül olsun. R nin sıfırdan farklı en az bir

$r \in R$ elemanı için $rm = 0$ koşulunu sağlayan $m \in M$ elemanına, M nin **burulma elemanı** denir. M nin tüm burulma elemanlarının kümesi

$$T(M) = \{m \in M | \exists\, r \in R \setminus \{0\} \text{ için } rm = 0\}$$

ile ifade edilir.

$0_R \neq r \in R$ için $r0_M = 0_M$ olduğundan $0_M \in T(M) \neq \emptyset$ dir. $m_1, m_2 \in T(M)$ keyfi elemanları için $r_1 m_1 = 0$ ve $r_2 m_2 = 0$ olacak şekilde $r_1, r_2 \in R \setminus \{0\}$ elemanları vardır.
R tamlık bölgesi olduğundan $r_1 r_2 \neq 0$ olup $r_1 r_2 (m_1 - m_2) = r_2 (r_1 m_1) - r_1 (r_2 m_2) = 0$ eşitliği gereği $m_1 - m_2 \in T(M)$ dir. $m \in T(M)$ ve $s \in R$ keyfi elemanlar olsun. $0 \neq r \in R$ için $rm = 0$ olup $r(sm) = s(rm) = 0$ dır. Dolayısıyla $sm \in T(M)$ olup $T(M) \leq M$ alt modüldür.

Burada R nin tamlık bölgesi olma şartı kaldırılırsa $T(M)$, M R-modülünün alt modülü olmak zorunda değildir.
Eğer $T(M) = M$ ise, M R-modülüne **burulma modül**; $T(M) = 0$ ise, M R-modülüne **burulmasız modül** denir [12].

2.3. Homomorfizmalar

2.3.1. Tanım R halka olmak üzere M ve N R-modülleri verilsin. Aşağıdaki koşulları sağlayan $f: M \longrightarrow N$ fonksiyonuna **sol *R*-modül homomorfizması** denir.
(i) Her $a, b \in M$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ dir,
(ii) Her $a \in M$ ve her $r \in R$ için $f(ra) = rf(a)$ dir.

Burada herhangi bir sol R-modül homomorfizması kısaca homomorfizma olarak adlandırılacaktır. $f: M \longrightarrow N$ homomorfizma olsun. Eğer f bire bir ise, f homomorfizmasına bir **monomorfizma**, f örten ise, f homomorfizmasına bir **epimorfizma** ve f hem birebir hem de örten ise, f homomorfizmasına bir **izomorfizma** denir. M ve N modülleri arasında bir izomorfizma varsa, M ile N modüllerine **izomorf modüller** denir ve bu $M \cong N$ ile gösterilir. M modülünden N modülüne tanımlanan tüm homomorfizmaların kümesi $Hom(M, N) = \{f | f : M \longrightarrow N \text{ modül homomorfizması}\}$ ile gösterilir.
$f : M \longrightarrow M$ homomorfizmasına **endomorfizma** adı verilir. M modülünün tüm endomorfizmalarının kümesi $End(M)$ ile gösterilir [5].

2.3.2. Tanım M modül ve $N \leq M$ olsun. Her $n \in N$ için $i(n) = n$ ile tanımlı $i: N \longrightarrow M$ dönüşümü monomorfizma olup i monomorfizmasına **içerme monomorfizması** denir.
$\pi: M \longrightarrow M/N, \pi(m) = m + N$ ile tanımlı dönüşümü epimorfizmadır.
Bu π epimorfizmasına **doğal (kanonik) homomorfizma** denir [5].

2.3.3. Tanım $f: M \longrightarrow N$ homomorfizma olmak üzere, $\{ m \in M \mid f(m) = 0\}$ kümesine f homomorfizmasının **çekirdeği** denir ve $Çek(f)$ ile gösterilir [5].

$\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $Çek(\pi) = N$ olduğu açıktır.

2.3.4. Tanım $f: M \longrightarrow N$ homomorfizma olmak üzere, $\{ f(m) \mid m \in M \}$ kümesine, ***M* modülünün *f* altındaki homomorfik görüntüsü** denir ve $Gör(f)$ yazılışı ile gösterilir. $Gör(f) \leq N$ alt modüldür [5].

2.3.5. Teorem M ve N modül olmak üzere $f: M \longrightarrow N$ homomorfizması verilsin.
Bu takdirde,

(i) $K \leq M$ ise, $f(K) \leq N$ dir.
(ii) $L \leq N$ ise, $f^{-1}(L) \leq M$ dir. Özellikle, $f^{-1}(0_N) = Çek(f) \leq M$ dir.
(iii) $K \leq M$ ise, $f^{-1}\big(f(K)\big) = K + Çek(f)$ dir.
(iv) $K \leq M$ ve $L \leq N$ ise, $f^{-1}(f(K) + L) = K + f^{-1}(L)$ ve $f(f^{-1}(L) \cap K)$=$L \cap f(K)$ dır [1].

2.3.6. Tanım M modül olmak üzere $g(m) = m$ ile tanımlı $g: M \longrightarrow M$ fonksiyonu R-modül izomorfizmasıdır. Bu izomorfizmaya **birim (idantik) homomorfizma** adı verilir. M den M ye birim homomorfizması I_M yazılışı ile gösterilir [5].

2.3.7. Teorem $f : M \longrightarrow N$ ve $g : N \longrightarrow K$ birer homomorfizma olsun. $g\,f : M \longrightarrow K$ bileşke fonksiyonu homomorfizmadır [6].

2.3.8. Tanım M modülünün aşikar direkt toplam terimlerinden başka direkt toplam terimi yoksa, M modülüne **parçalanamaz modül**, M nin aşikar direkt toplam terimleri dışında direkt toplam terimi mevcut ise, M modülüne **parçalanabilir modül** denir [5].

2.3.9. Teorem (Homomorfizma Teoremi) $f: M \to N$ homomorfizma olsun. Bu takdirde, $M/_{Çek(f)} \cong Gör(f)$ dir. f epimorfizma ise, $M/_{Çek(f)} \cong N$ dir [12].

2.3.10. Teorem (1. İzomorfizma Teoremi) M modülünün H ve K alt modülleri için $(H+K)\,/\,K \le M/K$ alt modülü olup $(H+K)\,/\,K \cong H\,/\,(H \cap K)$ dır [12].

2.3.11. Teorem M modül ve $N \le L \le M$ olsun. Bu takdirde, $M/L \cong (M/N)/(L/N)$ dir [1].

2.3.12. Tanım M modül ve $N < M$ öz alt modül olsun. M nin N alt modülünü kapsayan N den başka öz alt modülü yoksa, N öz alt modülüne M modülünün **maksimal alt modülü** denir. Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $< p >= p\mathbb{Z} <\ _{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ maksimal alt modüldür [6].

2.3.13. Tanım M modül olsun. M nin her öz alt modülü en az bir maksimal alt modül tarafından kapsanıyorsa, M ye **eş atom modül** denir [18].

2.3.14. Teorem M sonlu üretilmiş modül ise, eş atomdur [6].

İspat $M = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ ve $N < M$ öz alt modül olsun. N yi içeren M nin öz alt modülleri kümesini Δ ile gösterelim. Bu takdirde, N öz alt modül olduğundan $N \in \Delta \neq \emptyset$ dır. Δ kümesi kapsama bağıntısına göre sıralı kümedir. Γ, Δ kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. C ile Γ kümesinin elemanlarının birleşimini gösterirsek $N \le C$ ve Γ tam sıralı olduğundan $C \le M$ dir. Üstelik C, M nin öz alt modülüdür. Eğer C, M nin öz alt modülü olmasa, M sonlu üretilmiş olduğundan sonlu bir $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ üreteç kümesine sahip olup Γ tam sıralı olduğundan Γ nın tüm x_i leri kapsayan bir elemanı vardır. Bu elemana K diyelim. Buradan $M \subseteq K$ olur. Dolayısıyla $M \in \Gamma$ bulunur. Bu ise, Γ nın seçimi ile çelişir. Dolayısıyla C bir öz alt modül olup $C \in \Delta$ dir ve C, Γ nın bir üst sınırıdır. Zorn Lemmasına göre Δ kümesinin bir maksimal elemanı vardır.

2.3.15. Önerme R halka olmak üzere M bir R-modül ve $U < M$ öz alt modül olsun. U alt modülünün M de maksimal olması için gerek ve yeter koşul her $m \in M \setminus U$ için $U + Rm = M$ olmasıdır [6].

İspat. ($\Longrightarrow$) Keyfi $m \in M \setminus U$ için $U \subsetneq U + Rm$ ve U nun maksimalliğinden, $U + Rm = M$ dir.

($\Longleftarrow$) V, M nin $U \subsetneq V$ şartını sağlayan bir alt modülü olsun. Burada $V = M$ olduğunu gösterirsek istenen elde edilir. $U \neq V$ olduğundan $m \in V \setminus U$ elemanı vardır. Bu takdirde, $m \in M \setminus U$ olup hipotez gereği $U + Rm = M$ dir. Aynı zamanda $m \in V$ olduğundan $Rm \leq V$ dir ve buradan $M = U + Rm \leq V$ olup $V = M$ dir.

2.3.16. Teorem R birimli halka M ve K modüller olmak üzere $f: M \longrightarrow K$ bir epimorfizma olsun. Bu durumda K modülünün alt modülleriyle M modülünün $Çek\ (f)$ yi kapsayan alt modülleri arasında bire bir eşleme vardır. Bu eşleme K nın U alt modülüne M nin $f^{-1}(U)$ alt modülünü karşılık getirerek yapılabilir [5].

2.3.17. *Sonuç* (i) M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, M/N bölüm modülünün her alt modülü; K, M nin N alt modülünü kapsayan bir alt modülü olmak üzere K/N biçimindedir.
(ii) M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde, $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülünün maksimal alt modül olması için gerek ve yeter koşul K/N alt modülünün M/N bölüm modülünün maksimal alt modülü olmasıdır [5].

İspat (i) $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $N \leq K \leq M$ ise, $\pi(K) = K/N \leq M/N$ dır.
Tersine; $A \leq M/N$ ise $\pi^{-1}(A) = \{m \in M | m + N \in A\} = K$ için $N = \pi^{-1}(0) \leq K \leq M$ ve $\pi(K) = K/N = A$ olduğundan M nin N yi içeren K alt modülü belirlenir.

(ii) $N \leq K$ olacak şekildeki bir K alt modülü maksimal alt modül ise, M/K basittir. Teorem 2.3.11 gereği $M/K \cong (M/N)/(K/N)$ basittir. Dolayısıyla K/N alt modülü M/N nin maksimal alt modülüdür.
Tersi benzer şekilde yapılabilir.

2.3.18. Tanım M ve K modüller ve I boştan farklı bir indis kümesi olsun. Eğer $f: M^{(I)} \to K$ epimorfizması mevcut ise, K ya $\boldsymbol{M}$**-üretilmiş modül** denir. Eğer I indis kümesi sonlu elemanlı ise, K ya **sonlu** $\boldsymbol{M}$**-üretilmiş modül** denir [15].

2.3.19. Teorem R halka olsun. Bu takdirde, her sol R-modül R-üretilmiştir. Dolayısıyla her R-modül bir serbest modülün bölüm modülüdür [12].

İspat M bir R-modül olsun. M kümesini indis kümesi olarak alalım ve her $(r_m)_{m\in M} \in R^{(M)}$ için $f((r_m)_{m\in M}) = \sum_{m\in M} r_m m$ ile tanımlı $f: R^{(M)} \longrightarrow M$ dönüşümünü tanımlayalım.

f dönüşümünün bir R-modül homomorfizması olduğu gösterilebilir. Şimdi f nin epimorfizma olduğunu gösterelim. Her $m \in M$ için bir $(r_m)_{m\in M} \in R^{(M)}$ elemanını m. bileşeni 1_R ve diğer bileşenleri de 0_R olarak alalım. Bu takdirde, $f((r_m)_{m\in M}) = 1_R m = m$ olup f bir epimorfizma yapısına sahiptir. Sonuç olarak M, $F = R^{(M)}$ serbest modülünün bölüm modülü olup M modülü R-üretilmiştir.

2.3.20. Önerme M modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin alt modüllerinin bir ailesi olsun. Bu takdirde, her $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ için $f((m_i)_{i\in I}) = m_{i_1} + m_{i_2} + m_{i_3} + \cdots + m_{i_n}$ ile tanımlı $f: \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i \longrightarrow \sum_{i\in I} M_i$ epimorfizması vardır. (Burada $1 \leq i \leq n$ olmak üzere m_{i_j} ler $(m_i)_{i\in I} \in \bigoplus_{i\in I}^{w} M_i$ elemanının sıfırdan farklı tüm bileşenleridir) [5].

2.4. Küçük Alt Modüller

2.4.1. Tanım R halka, M bir R-modül ve $N < M$ öz alt modül olsun. $K \leq M$ olmak üzere $M = N + K$ olduğunda $K = M$ ise, N ye M nin **küçük alt modülü** denir ve $N \ll M$ ile gösterilir [15].
$M \neq 0$ olmak üzere $0 \ll M$ olduğu açıktır.

2.4.2. Tanım M sıfırdan farklı bir R-modül olsun. M modülünün her öz alt modülü M modülünde küçük ise, M modülüne **oyuk modül** denir. Oyuk modüllerin bölüm modülleri de oyuktur [6, 15].

2.4.3. Önerme (Küçük Alt Modülün Özellikleri)
(i) M modül ve $K < L \leq M$ olsun. Eğer $L \ll M$ ise, $K \ll M$ dir.
(ii) M modül ve $A < B \leq M$ olsun. Eğer $A \ll B$ ise, A ve A nın alt modülleri B alt modülünü kapsayan M modülünün alt modüllerinde küçüktür.
(iii) M modül, $K_1, K_2, \ldots, K_n$, $M_1, M_2, \ldots, M_n$, M modülünün alt modülleri ve her $i = 1,2,\ldots,n$ için $K_i \ll M_i$ olsun. Bu takdirde, $K_1 + K_2 + \cdots + K_n \ll M_1 + M_2 + \cdots + M_n$ dir.

(iv) $M,\ K$ birer R-modül ve $f: M \longrightarrow K$ bir homomorfizma olsun. $U \ll M$ ise, $f(U) \ll K$ dır.
(v) M modül, $L \leq M$, $K \leq L$ ve L , M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $K \ll L$ olması için gerek ve yeter koşul $K \ll M$ olmasıdır.
(vi) $U \leq M$ alt modülü M de hem küçük hem de direkt toplam terimi ise, $U = 0$ dır.
(vii) M/V sonlu üretilmiş ve $V \ll M$ ise, M modülü sonlu üretilmiştir [14].

Önerme 2.4.3 (vi) gereği $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ için $n\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ olacak şekilde $m\mathbb{Z} < \mathbb{Z}$ öz ideali mevcut olduğundan ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ nin sıfırından başka küçük alt modülü yoktur.

$\mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülünü alalım. $\{\bar{0}\} \longrightarrow \{\bar{0}, \bar{4}\} \longrightarrow \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\} \longrightarrow \mathbb{Z}_8$ olduğundan $\mathbb{Z}_8$ in tüm öz alt modülleri küçüktür.

2.5. Basit ve Yarıbasit Modüller

2.5.1. Tanım R halka ve M sıfırdan farklı R-modül olsun. M modülünün aşikar alt modüllerinden başka alt modülü yoksa, M ye **basit modül** denir [8].
Örneğin $p \in \mathbb{P}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p$ $\mathbb{Z}$-modülü basittir. K cisim olmak üzere ${}_K K$ nın alt modülleri sadece 0 ve K olduğundan ${}_K K$ basittir.

M basit modül ve $f: M \longrightarrow N$ izomorfizma olsun. Teorem 2.3.5 gereği N basittir.

2.5.2. Önerme R halka olmak üzere M basit R-modül olsun. 0, M modülünün maksimal alt modülüdür ve sıfırdan farklı her $m \in M$ elemanı için $Rm = M$ olup M devirlidir [6].
İspat M basit modül olduğundan 0 alt modülünü kapsayan M nin kendisinden başka alt modülü yoktur. Buradan maksimal alt modül tanımı gereği 0, M nin maksimal alt modülüdür. Keyfi $0 \neq m \in M$ elemanı için Rm, M nin bir alt modülüdür ve $m \in Rm$ dir. Böylece $0 \neq Rm$ ve M basit olduğundan $Rm = M$ olup M devirlidir.

2.5.3. Teorem R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) R bölme halkasıdır;
(ii) ${}_R R$ basit modüldür;
(iii) R_R basit sağ R-modüldür.

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $0 \neq I \subseteq R$ sol idealini alalım. $0 \neq a \in I$ elemanı vardır ve I sol ideal olduğundan $a \in R$ ve R bölme halkası olduğundan $a^{-1}a = 1_R \in I = R$ elde edilir.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) $0 \neq a \in R$ alalım. $0 \neq Ra \subseteq R$ sol ideal ve ${}_RR$ basit modül olduğundan $Ra = I = R$ olup $Ra = R$ dir. $1_R \in R = Ra$ için $1_R = ba$ olacak şekilde $b \in R$ vardır. $0 \neq Rb = R$, $1_R = cb$ olacak şekilde $c \in R$ vardır. Buradan

$$c = c1_R = c(ba) = (cb)a = 1_R a = a$$

olup buradan $ba = 1_R = ab$ olduğu görülür. O halde R nin sıfırdan farklı her elemanının tersi mevcut olup R bölme halkasıdır.

(i) $\Longleftrightarrow$ (iii) Benzer şekilde yapılır.

2.5.4. Teorem M modül ve $N \leq M$ olsun. M nin N alt modülünün maksimal olması için gerek ve yeter koşul M/ N bölüm modülünün basit olmasıdır [14].

İspat ($\Longrightarrow$) N, M nin bir maksimal alt modülü ve $K \,/\, N \leq M \,/\, N$ olsun. Burada $N \leq K$ dır. N, M nin maksimal alt modülü olduğundan $N = K$ veya $M = K$ dır. O halde $M \,/\, N$ nin alt modülleri $N \,/\, N$ veya $M \,/\, N$ dir. O halde $M \,/\, N$ bölüm modülü basittir.

($\Longleftarrow$) M/N basit olsun. $N < K \leq M$ olacak şekilde K alt modülünü alalım. Buradan $N \,/\, N < K \,/\, N \leq M \,/\, N$ olur. $M \,/\, N$ basit olduğundan $K \,/\, N = M \,/\, N$ olup $K = M$ veya $K = N$ dir. O halde N, M nin maksimal alt modülüdür.

2.5.5. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün her alt modülü M de bir direkt toplam terimi ise, M ye **yarıbasit modül** denir [8].

M modülünün tüm basit alt modüllerinin toplamına M nin **desteği** denir ve $\boldsymbol{Des(M)}$ ile gösterilir. M nin basit alt modülü yoksa, $Des(M) = 0$ dır [15].

Tanım 2.5.1 ve Tanım 2.5.5 e dikkat edilirse, 0 alt modülü yarıbasittir fakat basit değildir.

2.5.6. Yardımcı Teorem M sıfırdan farklı herhangi bir yarıbasit modül ise, basit bir alt modül içerir [8].

İspat m, M nin sıfırdan farklı sabit bir elemanı olsun. Zorn Lemmasından $m \notin N$ olacak şekilde M nin bir maksimal N alt modülü vardır. Hipotez gereği N, M nin direkt toplam terimidir ve $M = N \oplus K$ olacak şekilde K alt modülü mevcuttur. Teorem 2.5.4 gereği

$M\ /\ N$ basittir. Dolayısıyla K basit modüldür.

2.5.7. Yardımcı Teorem $M = Des(M)$ olsun. Bu takdirde,

(i) M yarıbasittir.

(ii) M nin her alt modülü basit alt modüllerin direkt toplamıdır [1].

İspat $M = Des(M)$ olduğundan $M = \sum_{i \in K} M_i$ basit modüllerin toplamı şeklinde yazılabilir.

(i) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. $\Gamma = \{L \subseteq K \mid U + (\sum_{l \in L} M_l) = U \oplus (\bigoplus_{l \in L} M_l)\}$ kümesini " $\subseteq$ " alt küme olma bağıntısıyla alarak bir kısmi sıralı küme elde ederiz. $\emptyset \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dur. Zorn Lemmasını uygulamak için herhangi bir $\Lambda \subseteq \Gamma$ zincirini alalım. $L_0 = \bigcup_{L \in \Lambda} L \in \Gamma$ olduğunu gösterelim. $u + m_{i_1} + \cdots + m_{i_n} = 0$ olacak şekilde $i_1, i_2, \ldots, i_n \in L_0$; $u \in U$, $m_{i_t} \in M_{i_t}$ $(t = 1,2, \ldots, n)$ bulunursa, Λ zincir olduğundan $i_1, i_2, \ldots, i_n$ indislerini içeren bir $L \in \Gamma$ vardır. O halde $u = m_{i_1} = \cdots = m_{i_n} = 0$ dır. Dolayısıyla $L_0 \in \Gamma$ dır. L_0 ın Λ nın üst sınırı olduğu açıktır. Zorn Lemmasından Γ nın bir J maksimal elemanı bulunur. $N = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$ olsun. Keyfi $k \in K$ alalım. J nin maksimal olmasından dolayı $N + M_k = N \oplus M_k$ olamaz. Dolayısıyla $N \cap M_k \neq 0$ dır. M_k basit olduğundan $N \cap M_k = M_k$, yani $M_k \subseteq N$ dir. Böylece $M = \sum_{k \in K} M_k = N$ dir.

(ii) U, M nin herhangi bir alt modülü olsun. (i) den dolayı $M = U \oplus (\bigoplus_{j \in J} M_j)$ olacak şekilde $J \subseteq K$ alt kümesi bulunur. (i) yi $\bigoplus_{j \in J} M_j$ alt modülüne (U nun yerine) uygulayarak $M = (\bigoplus_{i \in I} M_i) \oplus (\bigoplus_{j \in I} M_j)$ elde ederiz. O halde $U \cong M\ /\ (\bigoplus_{j \in I} M_j) \cong \bigoplus_{i \in I} M_i$ dir.

2.5.8. Teorem Bir M sol R-modülü için aşağıdaki özellikler denktir:

(i) Her $U \leq M$ için $U = Des(U)$ dur;

(ii) $M = Des(M)$ dir;

(iii) M basit alt modüllerinin direkt toplamına eşittir;

(iv) M yarıbasit modüldür [1].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) Açıktır.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Yardımcı Teorem 2.5.7 (i) nin ispatında $U = 0$ alınarak $M = \bigoplus_{j \in I} M_j$ elde edilir.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Yardımcı Teorem 2.5.7 (i) den istenen elde edilir.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Keyfi bir $U \leq M$ alt modülü için $Des(U) \leq U$ olduğu açıktır. (iv) den dolayı $M = Des(U) \oplus N$ olacak şekilde bir $N \leq M$ alt modülü bulunur. Modüler kuraldan;

$$U = (Des(U) + N) \cap U = Des(U) + (N \cap U)$$

elde ederiz. İki durum olabilir:

1.durum. $N \cap U = 0$ dır. O halde $U = Des(U)$ dur.

2.durum. $N \cap U \neq 0$ dır. Bu durumda $0 \neq n \in N \cap U$ elemanını alalım. $Rn \leq N \cap U$ devirli alt modülünün n yi içermeyen tüm alt modülleri kümesini Γ ile gösterelim:

$\Gamma = \{V \leq Rn \,|\, n \notin V\}$. $\leq$ alt modül olma bağıntısıyla, Γ kısmi sıralı kümeye dönüşür. $0 \in \Gamma$ olduğundan $\Gamma \neq \emptyset$ dır. Zorn Lemmasını uygulamak için Γ da bir $\{V_t\}_{t\in T}$ zinciri alalım. O halde $V_0 = \bigcup_{t\in T} V_t \leq Rn$ dir ve $n \notin V_0$ olduğundan $V_0 \in \Gamma$ dır. Zorn Lemmasından Γ da bir W maksimal elemanı bulunur. Aslında W, Rn nin de maksimal alt modülüdür. Çünkü, $W \leq W^* \leq Rn$ olacak şekilde bir W^* alt modülü aldığımızda, W nın Γ da maksimal olmasından dolayı $W^* \notin \Gamma$ dır. Böylece $n \in W^*$ gerçekleşir. O halde $W^* = Rn$ elde edilir.

Şimdi (iv) den dolayı W, M de dolayısıyla Rn de direkt toplam terimidir.

Yani, $Rn = W \oplus X$ olacak şekilde bir $X \leq Rn \leq N \cap U$ alt modülü vardır. W, Rn de maksimal alt modül olduğundan Teorem 2.5.4 gereği $Rn / W \neq 0$ bölüm modülü basittir. O halde buna izomorf olan $X \neq 0$ alt modülü de basittir. Dolayısıyla

$$X \subseteq Des(U) \cap (N \cap U) = 0$$

çelişkisi elde edilir. Böylece sadece 1. durum olabilir.

Bu teoreme dikkat edilirse, yarıbasit modüller basit modüllerin direkt toplamı olduğundan, bir basit modülün aynı zamanda yarıbasit olduğu görülür.

Tanımdan $Des(M)$, basit alt modüllerin toplamı olarak yarıbasittir. N, M nin yarıbasit alt modülü olsun. Bu takdirde N, $i: N \longrightarrow M$ içerme dönüşümünün görüntüsü olarak $Des(M)$ de içerilir. Yani $Des(M)$, M nin en büyük yarıbasit alt modülüdür [6].

2.5.9. *Sonuç* (i) Yarıbasit modüllerin her alt modülü yarıbasittir.

(ii) Yarıbasit modülün her homomorfik görüntüsü yarıbasit modüldür.

(iii) Yarıbasit modüllerin herhangi sayıdaki toplamı yarıbasittir.

İspat (i) $A \leq M$ herhangi bir alt modül olsun. $N \leq A$ ise, $N \leq M$ olup M yarıbasit olduğundan $M = N \oplus K$ olacak şekilde $K \leq M$ alt modülü vardır. Modüler kuraldan;

$$A = A \cap M = A \cap (N \oplus K) = N \oplus A \cap K$$

olup A yarıbasittir.

(ii) M yarıbasit modül ve $f: M \longrightarrow N$ epimorfizma olsun. Teorem 2.5.8 gereği $M = \sum_{i \in I} A_i$ basit alt modüllerin toplamı şeklinde yazılır. Her $i \in I$ için A_i basit modüller olduğundan $f(A_i)$ basit ya da $f(A_i) = 0$ dır. $N = f(M) = \sum_{i \in I} f(A_i)$ olduğundan N bir takım basit alt modüllerin toplamıdır. Dolayısıyla Teorem 2.5.8 gereği N yarıbasittir.

(iii) M yarıbasit modüllerin toplamı olsun. Dolayısıyla $M = Des(M)$ olup her yarıbasit modül basit modüllerin toplamı olduğundan M basit modüllerin toplamıdır. Böylece M yarıbasittir.

2.5.10. Tanım M modül ve K, M nin bir alt modülü olsun. K modülünün M nin sıfırdan farklı her alt modülü ile kesişimi sıfırdan farklı ise, K ya M nin **büyük alt modülü** denir ve $K \trianglelefteq M$ ile gösterilir [15].

2.5.11. Tanım M modül ve $A \leq M$ olsun. M nin A^{ι} alt modülü, $A \cap A^{\iota} = 0$ koşulunu sağlayan maksimal ise, A^{ι} ye A nın **kesişime göre tümleyeni** denir [1].

2.5.12. Teorem Herhangi bir M modülü için

$$\bigcap_{A \trianglelefteq M} A = Des(M) = \sum_{\substack{N \text{ yarı basit} \\ f \in Hom(N,M)}} Gör(f)$$

dir [6].

İspat Eşitlikteki ifadeleri sırasıyla M nin alt modülleri olan U_1, U_2, U_3 ile temsil edelim.
$U_2 \leq U_1$ olduğunu gösterelim. B, M nin herhangi bir basit alt modülü ve A, M nin herhangi büyük alt modülü olduğundan $A \cap B \neq 0$ olup $A \cap B = B$ ve $B \leq A$ olur. Bu ise, U_2 nin herhangi büyük alt modülde kapsandığını gösterir. Dolayısıyla $U_2 \leq U_1$ elde edilir.
$U_3 \leq U_2$ olduğunu gösterelim. Sonuç 2.5.9 (i) den U_3 M nin yarıbasit alt modülüdür. O halde basit modüllerin toplamıdır. U_2, M nin tüm basit alt modüllerinin toplamı olduğundan $U_3 \leq U_2$ elde edilir.
$U_1 \leq U_3$ olduğunu gösterelim. C, U_1 in herhangi bir alt modülü ve C^{ι}, C nin M de kesişime göre tümleyeni olsun. Bu takdirde, $C \cap C^{\iota} = 0$ ve $C + C^{\iota} = C \oplus C^{\iota} \trianglelefteq M$ dır. Teorem 2.2.9 dan $U_1 = C \oplus (C^{\iota} \cap U_1)$ dir. Dolayısıyla C, U_1 alt modülünün direkt toplam terimi olup U_1

yarıbasittir. $i: U_1 \longrightarrow M$ içerme fonsiyonu alınırsa, $i \in Hom(U_1, M)$ olup $U_1 \leq U_3$ elde edilir.

2.5.13. Önerme $\{M_i\}_{i\in I}$, R-modüllerin ailesi olsun. Bu takdirde,

$Des(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} Des(M_i)$ dir [15].

İspat Her $i \in I$ için $Des(M_i)$ yarıbasit olduğundan $Des(M_i)$, M_i nin basit alt modüllerinin direkt toplamıdır. Dolayısıyla $\oplus_{i\in I} Des(M_i)$, $\oplus_{i\in I} M_i$ nin yarıbasit alt modülüdür. $Des(\oplus_{i\in I} M_i)$ de $\oplus_{i\in I} M_i$ nin en büyük yarıbasit alt modülü olduğundan $\oplus_{i\in I} Des(M_i) \subseteq Des(\oplus_{i\in I} M_i)$ dir. Tersine; $\oplus_{i\in I} M_i$ nin basit alt modülüne X diyelim. Önerme 2.5.2 gereğince $X = Rx$ olacak şekilde $x \in X$ vardır. x in sıfırdan farklı bir bileşeni $x_j \in M_j$ olsun. $\varphi(rx) = rx_j$ ile tanımlı $\varphi: Rx \longrightarrow Rx_j$ dönüşümünü alalım. $rx = r'x$ koşulunu sağlayan $r, r' \in R$ için $rx_j = r'x_j$ olduğundan φ iyi tanımlıdır. Her $rx,\ r'x \in Rx$ ve her $s \in R$ için

$$\varphi(rx + r'x) = (r + r')x_j = rx_j + r'x_j = \varphi(rx) + \varphi(r'x)$$

$$\varphi\big(s(rx)\big) = \varphi\big((sr)x\ \big) = (sr)x_j = s\big(rx_j\big) = s\varphi(rx)$$

eşitlikleri sağlandığından φ, R-modül homomorfizmasıdır. Her $rx_j \in Rx_j$ için $\varphi\big(0, 0, \dots 0, rx_j, 0, \dots\big) = rx_j$ olacak şekilde en az bir $(0, 0, \dots 0, rx_j, 0, \dots) \in Rx$ var olduğundan φ bir R-modül epimorfizmasıdır. Buradan $\varphi(Rx) = Rx_j$ yazılır. Basit bir modülün homomorfik görüntüsü basit olduğundan Rx_j de basittir. $Des\big(M_j\big)$, M_j nin tüm basit alt modüllerini toplamı olduğundan $Rx_j \subseteq Des(M_j)$ dir. $X = Rx \subseteq \oplus_{i\in I} Des(M_i)$ kapsamasından $Des(\oplus_{i\in I} M_i) \subseteq \oplus_{i\in I} Des(M_i)$ olup $Des(\oplus_{i\in I} M_i) = \oplus_{i\in I} Des(M_i)$ eşitliği elde edilir.

Şimdi sol yarıbasit halka kavramını verebiliriz.

2.5.14. Teorem Bir R halkası için aşağıdaki durumlar denktir:

(i) Her sol R-modül yarıbasittir;

(ii) Her sonlu üretilmiş sol R-modül yarıbasittir;

(iii) Her devirli sol R-modül yarıbasittir;

(iv) ${}_RR$ yarıbasittir [8].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Açıktır.

(iv) $\Longrightarrow$ (i) M keyfi bir R-modül $m \in M$ olsun. Her $r \in R$ için $f(r) = rm$ ile tanımlı $f: R \longrightarrow Rm$ dönüşümü epimorfizmadır ve Homomorfizma teoremi gereği $R\ /\ Çek(f) \cong Rm$ dir. Sonuç 2.5.9 (iii) gereği Rm yarıbasit R-modül olup Sonuç 2.5.9 (iii) gereği $M = \sum_{m \in M} Rm$ olduğundan M yarıbasittir.

Bu teoremde verilen denk koşullardan herhangi birini sağlayan R halkasına **sol yarıbasit halka** denir [8].

2.6. Bir Modülün Radikali

2.6.1. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. M modülünün tüm maksimal alt modüllerinin arakesitine M modülünün **radikali** denir ve $Rad(M)$ ile gösterilir. M modülünün maksimal alt modülü yoksa, $Rad(M) = M$ ile tanımlıdır. Bu takdirde, M modülüne **radikal modül** denir [3].

M nin tüm radikal alt modüllerinin toplamı $P(M)$ ile gösterilir. $P(M) = \sum_{\substack{N \leq M \\ N = Rad(N)}} N$ dir. Eğer $P(M) = 0$ ise, M modülüne **indirgenmiş modül** denir [19].

$\mathbb{Q}$ sol $\mathbb{Z}$-modülü maksimal alt modüle sahip olmadığından $Rad(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ dur. $\cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ olduğundan $Rad({}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}) = \cap_{p \in P} p\mathbb{Z} = 0$ dır. Diğer taraftan $Rad(\mathbb{Z}_8) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ dır.

2.6.2. Yardımcı Teorem R halka ve M bir R-modül olsun. $m \in M$ olmak üzere Rm devirli modülünün M nin küçük alt modülü olmaması için gerek ve yeter koşul $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünün olmasıdır [6].

İspat $(\Longleftarrow)$ $m \notin U$ olacak şekilde $U < M$ maksimal alt modülünü alalım. U maksimal olduğundan Önerme 2.3.15 ten $U + Rm = M$ olup Rm, M modülünde küçük olamaz.

$(\Longrightarrow)$ Rm, M de küçük olmasın. $\mathrm{X} = \{A | A \lneqq M, Rm + A = M\}$ kümesini tanımlayalım. Varsayımdan $A \in \mathrm{X}$ olup $\mathrm{X} \neq \emptyset$ dir. X, kapsama bağıntısına göre sıralı bir kümedir. W, X kümesinin tam sıralı bir alt kümesi olsun. Bu takdirde, $A_0 = \cup_{A \in W} A$, W tam sıralı kümesinin bir üst sınırı olup $m \notin A_0$ dır. $m \in A_0$ olsa $m \in A$ olacak şekilde bir $A \in W$ vardır ve $Rm \leq A$ dır. Bu ise, $A = Rm + A = M$ çelişkisini doğurur. O halde $A_0 < M$ öz alt modüldür. $A \in W$ için $A \leq A_0$ olduğundan $Rm + A_0 = M$ dir. Sonuç olarak $A_0 \in \mathrm{X}$ tir.

Buradan W, X kümesinde bir üst sınıra sahip olup Zorn Lemması gereği X kümesi bir U maksimal elemanını içerir. Şimdi U nun M de maksimal alt modül olduğunu gösterelim. $U \lneqq K \leq M$ olsun. Bu takdirde, U, X te maksimal olduğundan $K \notin$ X tir. $M = Rm + U \leq Rm + K \leq M$ olduğundan $Rm + K = M$ ve $K \notin$ X olduğundan $K = M$ eşitliği elde edilir. Böylece U maksimal alt modüldür.

2.6.3. *Sonuç* R halka, M bir R-modül ve $m \in M$ olsun. $Rm \ll M$ olması için gerek ve yeter koşul $m \in Rad(M)$ olmasıdır [15].

2.6.4. Teorem M modül olsun. M eş atom ise, $Rad(M) \ll M$ dir [15].
İspat $Rad(M) + V = M$ şartını sağlayan bir V alt modülü için $V \neq M$ olduğunu kabul edelim. Hipotezden V, M nin bir N maksimal alt modülü tarafından kapsanır. Buradan da $V \leq N$ ve $Rad(M) \leq N$ olduğundan $M = Rad(M) + V \leq N$ olur. Buradan $M = N$ çelişkisi elde edilir. O halde $V = M$ olup $Rad(M) \ll M$ dir.

2.6.5. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül ise, $Rad(M) \ll M$ dir [15].
İspat M sonlu üretilmiş modül olduğundan Teorem 2.3.14 gereği M nin her öz alt modülü bir maksimal alt modülde kapsanır. Dolayısıyla Teorem 2.6.4 gereği $Rad(M) \ll M$ dir.

2.6.6. Teorem R halka ve M bir R-modül olsun. Bu takdirde,

$$Rad(M) = \sum_{L \ll M} L \text{ dır [15].}$$

İspat Keyfi $a \in Rad(M)$ elemanı verilsin. Sonuç 2.6.3 ten $Ra \ll M$ olup $a \in Ra \leq \sum_{L \ll M} L$ dir. Buradan $Rad(M) \subseteq \sum_{L \ll M} L$ elde edilir.
Tersine; $a \in \sum_{L \ll M} L$ keyfi elemanı verilsin. N, M nin maksimal alt modülü olmak üzere $a \notin N$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $M = Ra + N$ dir. $a \in \sum_{L \ll M} L$ olduğundan $a = l_1 + l_2 + \cdots + l_n$ olacak şekilde $l \in L_i \ll M$ $(i = 1,2, \ldots n)$ olan $L_i \leq M$ alt modülleri vardır. Buradan $Ra \subseteq Rl_1 + Rl_2 + \cdots + Rl_n \leq L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ bulunur. Ayrıca Önerme 2.4.3 (i) ve (iii) den $L_1 + L_2 + \cdots + L_n$ ve Ra , M nin küçük alt modülleridir. $M = Ra + N$ ve $Ra \ll M$ olduğundan $M = N$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $\sum_{L \ll M} L \subseteq Rad(M)$ olup $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ eşitliği vardır.

2.6.7. Önerme Herhangi bir M modülü için $Rad(P(M)) = P(M)$ dir [19].

2.6.8. Lemma M modül olsun. I bir indis kümesi olmak üzere her $i \in I$ için N_i modülleri M nin $N \leq M$ alt modülünü kapsayan alt modüller olsun. Bu takdirde,

$\bigcap_{i \in I}(N_i/N) = (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ dir.

İspat Herhangi bir $m + N \in \bigcap_{i \in I}(N_i/N)$ elemanı ve her $i \in I$ için $m + N \in N_i/N$ olup $m \in N_i$ dir. Buradan $m \in \bigcap_{i \in I} N_i$ olur ki $m + N \in (\bigcap_{i \in I} N_i)/N$ elde edilir. Ters kapsama benzer işlemler yapılarak eşitlik gösterilebilir.

2.6.9. Teorem (Radikalin Özellikleri)

(i) M ve N birer modül ve $f \in Hom(M, N)$ olsun. Bu takdirde, $f(Rad(M)) \leq Rad(N)$ dir. Eğer $Çek(f) \leq Rad(M)$ ise, $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ dir.

(ii) $Rad(M/Rad(M)) = 0$ dır.

(iii) $U \leq V \leq M$ ise, $Rad(U) \leq Rad(V)$ dir.

(iv) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $Rad(M) = \bigoplus_{i \in I} Rad(M_i)$ dir.

(v) $N \leq M$ ise, $(N + Rad(M))/N \leq Rad(M/N)$ ve $N \leq Rad(M)$ ise, $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ dir.

(vi) M nin radikal modül olması için gerek ve yeter koşul M nin her sonlu üretilmiş alt modülünün M de küçük olmasıdır.

(vii) $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$ ise, $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/Rad(M_i))$ dir [6,15].

İspat (i) $Rad(M) = \sum_{L \ll M} L$ olduğundan $f\big(Rad(M)\big) = \sum_{L \ll M} f(L)$ dir. Önerme 2.4.3 (iv) den $f(L) \ll N$ olur. Sonuç olarak $f\big(Rad(M)\big) \leq Rad(N)$ elde edilir. $m \in Rad(M)$ ise, Sonuç 2.6.3 ten $Rm << M$ olup Önerme 2.4.3 (iv) den $f(Rm) = Rf(m) << f(M)$ dir. Dolayısıyla $f(m) \in Rad(f(M))$ olup $f(Rad(M)) \leq Rad(f(M))$ olur. Şimdi herhangi bir $f(m) \in Rad(f(M))$ alalım. Sonuç 2.6.3 ten $Rf(m) << f(M)$ dir. Kabul edelim ki $m \notin Rad(M)$ olsun. Bu takdirde, Yardımcı Teorem 2.6.2 den $Rm + K = M$ olacak şekilde M nin K maksimal alt modülü vardır. Buradan $Rf(m) + f(K) = f(M)$ olup $Rf(m) \ll f(M)$ olduğundan $f(K) = f(M)$ eşitliği bulunur. Teorem 2.3.5 (iii) den $M = K + Çek(f)$ olup $Çek(f) \leq Rad(M) \leq K$ olduğundan $M = K$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla $m \in Rad(M)$ olmalıdır. O halde $f(m) \in f(Rad(M))$ olur. Sonuç olarak $f\big(Rad(M)\big) = Rad(f(M))$ bulunur.

(ii) Sonuç 2.3.17 (ii) den M nin maksimal alt modülleriyle $M/Rad(M)$ bölüm modülünün maksimal alt modülleri arasında birebir eşleme vardır. Bu takdirde, X, M nin tüm maksimal alt modüllerinin kümesi olmak üzere $M/Rad(M) = \bigcap_{U \in X}(U/Rad(M))$ olup Lemma 2.6.8

den $M/Rad(M) = \bigcap_{U\in X}(U/Rad(M)) = (\bigcap_{U\in X} U)/Rad(M) = Rad(M)/Rad(M) = 0$ elde edilir.

(iii) $i: U \longrightarrow V$ içerme dönüşümünü alalım. (i) gereğince $i\big(Rad(U)\big) = Rad(U) \leq Rad(V)$ dir.

(iv) (iii) gereğince $M_i \leq M \Longrightarrow Rad(M_i) \leq Rad(M)$ dir. Buradan

$$\sum_{i\in I} Rad(M_i) = \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i) \leq Rad(M)$$

olur.

Tersine; $m = \sum_{i\in I} m_i \in Rad(M)$ elemanını alalım. $\pi_i(m) = m_i$ ile tanımlı $\pi_i: M \longrightarrow M_i$ i.kanonik projeksiyon olmak üzere (i) gereğince $\pi_i(m) = m_i \in Rad(M_i)$ dir. Böylece $m \in \bigoplus_{i\in I} Rad(M_i)$ olur. Sonuç olarak $\bigoplus_{i\in I} Rad(M_i) = Rad(M)$ eşitliği yazılır.

(v) $\pi: M \to M/N$ doğal homomorfizması için (i) gereğince

$$\pi(Rad(M)) = (Rad(M) + N)/N \leq Rad(M/N)$$

dir. $Çek(\pi) = N \leq Rad(M)$ ise, Lemma 2.6.8 gereği $Rad(M/N) = Rad(M)/N$ eşitliği elde edilir.

(vi) $M = Rad(M)$ ise, her $m \in M$ için Sonuç 2.6.3 gereği $Rm \ll M$ olur. Buradan Önerme 2.4.3 (iii) den M nin sonlu üretilmiş her öz alt modülü M de küçük olur.

Tersi, Sonuç 2.6.3 den açıktır.

(vii) $m_i \in M_i$ olacak şekilde $(m_1, m_2, \dots) = \sum m_i \in M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ için

$$f((\sum m_i) + Rad(M)) = \sum(m_i + Rad(M_i)) \in \bigoplus_{i\in I} (M_i/Rad(M_i))$$

ile tanımlı $f: M/Rad(M) \longrightarrow \bigoplus_{i\in I} (M_i/Rad(M_i))$ dönüşümünün izomorfizma olduğunu gösterelim. Öncelikle f iyi tanımlıdır. $m_i, m_i' \in M_i$ olacak şekilde

$$(\sum m_i) + Rad(M) = (\sum m_i') + Rad(M)$$

olsun. Bu takdirde, $\sum(m_i - m_i') \in Rad(M)$ dir. (iv) den $m_i - m_i' \in Rad(M_i)$ olur.

Böylece $m_i + Rad(M_i) = m_i' + Rad(M_i)$ olup $\sum m_i + Rad(M_i) = \sum m_i' + Rad(M_i)$ bulunur. Şimdi f nin monomorfizma olduğunu gösterelim.

$$f((\sum m_i) + Rad(M)) = \sum\big(m_i + Rad(M_i)\big) = 0$$

olsun. Bu takdirde, her $i \in I$ için $m_i \in Rad(M_i) \leq Rad(M)$ olur. O halde

$(\sum m_i) + Rad(M) = Rad(M)$ olur. Böylece $Çek(f) = 0$ bulunur. f nin epimorfizma olması açıktır. Sonuç olarak f izomorfizma elde edilir.

2.6.10. Uyarı $P(M) \leq X \leq M$ olmak üzere $Rad(X/P(M)) = X/P(M)$ olsun. Teorem 2.6.9 (v) gereği Buradan $Rad(X/P(M)) = RadX/P(M) = X/P(M)$ olup $X = Rad(X) \leq P(M)$ dir. O halde $X = P(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $M/P(M)$ radikal alt modül içermez.

2.6.11. Önerme R halka ve I, R nin bir sol ideali olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $I \ll {}_RR$ dir;

(ii) $I \leq Rad({}_RR)$ dir;

(iii) Her $a \in I$ için $1_R - a$ sol terslenebilirdir;

(iv) Her $a \in I$ için $1_R - a$ terslenebilirdir;

(v) Her $a \in I$ için $1_R - a$ sağ terslenebilirdir;

(vi) $I \leq Rad(R_R)$ dir [15].

2.6.12. *Sonuç* Herhangi bir R halkası için $Rad({}_RR) = Rad(R_R)$ dir [15].

İspat Önerme 2.6.11 de $I = Rad({}_RR)$ alınırsa, $Rad({}_RR) \leq Rad(R_R)$ olur. Önermedeki denklikler sağ R-modül için yapılırsa, $Rad(R_R) \leq Rad({}_RR)$ olur. Böylece

$Rad({}_RR) = Rad(R_R)$ elde edilir.

Sonuç 2.6.12 den $Rad(R) \coloneqq Rad({}_RR) = Rad(R_R)$ ile tanımlanır ve R nin **Jacobson Radikali** denir.

2.6.13. Önerme M bir R-modül olsun. Bu takdirde, $Rad(R)Des(M) = 0$ dır. Özellikle,

$M = {}_RR$ için $Rad(R)Des({}_RR) = 0$ dır.

İspat Herhangi bir $m \in Des(M)$ elemanı için $f_m(r) = rm$ ile tanımlı $f_m: R \longrightarrow Des(M)$ dönüşümü homomorfizmadır. Teorem 2.6.9 (i) gereği $f_m(Rad(R)) \leq Rad(Des(M)) = 0$ olduğundan $Rad(R) \leq Çek(f_m)$ dir. Dolayısıyla herhangi $r \in Rad(R)$ elemanı için $r \in Çek(f_m)$ olup $f_m(r) = rm = 0$ bulunur. Böylece $Rad(R)Des(M) = 0$ dır.

2.6.14. Önerme M modül ve $N \leq M$ olsun. Bu takdirde,

(i) M eş atom ise, M/N eş atomdur.

(ii) N ve M/N eş atom ise, M eş atomdur [18].

İspat (i) K, M nin öz alt modülü olsun. M eş atom olduğundan K yı kapsayan bir U maksimal alt modülü vardır. Sonuç 2.3.17 (i) gereği M/N nin alt modülleri K/N biçimindedir. O halde K/N alt modülünü kapsayan en az bir U/N maksimal alt modülü vardır. Dolayısıyla M/N eş atomdur.

(ii) K, M nin bir öz alt modülü olsun. Bu takdirde, $\pi(K) = (K+N)/N$ olup $\pi: M \longrightarrow M/N$ doğal homomorfizması için $(K+N)/N = M/N$ise $K+N=M$ dır. N eş atom modül olduğundan $N \cap K$ öz alt modülü için $N \cap K \leq X \leq N$ olacak şekilde X maksimal alt modülü vardır. Buradan

$$M/(K+X) = (K+N)/(K+X) = (K+N+X)/(K+X) = N/\big(N \cap (K+X)\big)$$
$$\cong N/((N \cap K)+X) = N/X$$

olur. Teorem 2.5.4 gereği N/X basit modül olduğundan $K+X$ modülü M nin K yı kapsayan maksimal alt modüldür. $(K+N)/N$ modülü M/N nin öz alt modülü ise, M/N eş atom olduğundan $(K+N)/N \leq (U+N)/N$ olacak şekilde M nin K yı kapsayan bir U maksimal alt modülü vardır. Dolayısıyla M eş atomdur.

2.7. Noether ve Artin Modüller

2.7.1. Tanım M modül olsun. M modülünün alt modüllerinin her

$$M_1 \leq M_2 \leq \cdots \leq M_r \leq \cdots$$

artan zinciri verildiğinde her $r \geq s$ için $M_r = M_s$ olacak şekilde bir s pozitif tam sayısı varsa, M modülüne **noether modül** denir. R halkası sol R-modül olarak noether ise, R halkasına **sol noether halka** denir [5].

${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ Noether modüldür. Fakat ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Q}$ noether modül değildir. Çünkü

$$\left(\frac{1}{3}\right) \subset \left(\frac{1}{9}\right) \subset \left(\frac{1}{27}\right) \subset \cdots \subset \left(\frac{1}{3^n}\right) \subset \cdots$$

bir sonsuz zincir oluşturur. $\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu olduğundan noetherdir.

2.7.2. Tanım M modül olsun. M modülünün alt modüllerinin her

$$M_1 \geq M_2 \geq \cdots \geq M_r \geq \cdots$$

azalan zinciri verildiğinde her $r \geq s$ için $M_r = M_s$ olacak şekilde bir s pozitif tam sayısı varsa, M modülüne **artin modül** denir. R halkası sol R-modül olarak artin ise, R halkasına **sol artin halka** denir [5].

$\mathbb{Z}_m$ $\mathbb{Z}$-modülü sonlu olduğundan artindir. ${}_{\mathbb{Z}}\mathbb{Z}$ artin modül değildir. Çünkü

$$(3) \supset (9) \supset (27) \supset \cdots \supset (3^n) \supset \cdots$$

bir sonsuz azalan zincirdir.

R bölme halkası ise, idealleri 0 (sıfır) ve kendisi olduğundan hem sol (sağ) noether hem de sol (sağ) artin halkadır.

2.7.3. Teorem M modül olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) M noetherdir;

(ii) M modülünün alt modüllerinin boştan farklı her kümesi bir maksimal elemana sahiptir;

(iii) M nin her alt modülü sonlu üretilmiştir [15].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (iii) U, M nin keyfi bir alt modülü olsun. U alt modülünün sonlu üretilmiş olmadığını varsayalım. Bu takdirde $U \neq < v_1 >$ olacak şekilde bir $v_1 \in U$ ve $U \neq < v_1, v_2 >$ olacak şekilde bir $v_2 \in U \backslash < v_1 >$ elemanları vardır. Bu şekilde devam edilirse, $v_{k+1} \in U \backslash < v_1, v_2, \dots, v_k >$ elde edilir. Böylece M nin alt modüllerinin

$$< v_1 > \subset < v_1, v_2 > \subset \cdots \subset < v_1, v_2, \dots, v_k > \subset \cdots$$

artan sonsuz zinciri elde edilir. Bu ise, M nin Noether olması ile çelişir. O halde U sonlu üretilmiştir.

(iii) $\Longrightarrow$ (ii) Γ, M modülünün alt modüllerinin boştan farklı keyfi bir ailesi ve $M_0 \in \Gamma$ olsun. M_0, Γ nın maksimal elemanı değilse, $M_0 \subset M_1$ olacak şekilde $M_1 \in \Gamma$ elemanı vardır. M_1, Γ nın maksimal elemanı değilse, $M_1 \subset M_2$ olacak şekilde $M_2 \in \Gamma$ elemanı vardır. Burada Γ ailesinin maksimali yoksa,

$$M_0 \subset M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_s \subset \cdots$$

sonsuz zinciri yazılır. $K = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} M_i$ olsun. K, M modülünün alt modülüdür ve hipotez gereği $K = < k_1, k_2, \dots, k_s >$ olacak şekilde $k_1, k_2, \dots, k_s \in M$ vardır. Dolayısıyla burada $k_1, k_2, \dots, k_s$ elemanlarını içeren M nin bir K_j alt modülünü bulabiliriz. Buradan $K_j = K_{j+1} = \cdots$ bulunur. O halde Γ nın maksimal elemanı vardır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) M nin alt modüllerinin keyfi bir $M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_s \subset \cdots$ artan zincirini alalım. Bu durumda $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ modüller ailesinin bir M_j maksimali vardır. Böylece

$$M_1 \subset M_2 \subset \cdots \subset M_j = M_{j+1} = \cdots$$

elde edilir. Dolayısıyla M noetherdir.

2.7.4. Teorem M modül olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

i) M artindir;

ii) M nin alt modüllerinin boştan farklı her kümesi minimal elemana sahiptir [2].

İspat (i) $\Longrightarrow$ (ii) A, M nin alt modüllerinin boştan farklı bir kümesi olsun. $A \neq \emptyset$ olduğundan $M_1 \in A$ olacak şekilde $M_1 \leq M$ vardır. $|A| = 1$ ise, M_1 istenendir. $|A| \geq 2$ olsun. $M_1, M_2 \in A$ karşılaştırılabilirse, $M_2 \subseteq M_1$ yazılabilir. Bu yöntemle

$$\ldots \subseteq M_n \subseteq \cdots \subseteq M_2 \subseteq M_1$$

zinciri elde edilir. M artin olduğundan en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki; her $k \in \mathbb{N}$ için $M_{n_0} = M_{n_0+k}$ olup M_{n_0}, A nın minimal elemanıdır.

(ii) $\Longrightarrow$ (i) M nin $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots$ olacak şekilde herhangi bir azalan zincirini göz önüne alalım. (ii) den $\{M_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ ailesinin bir M_j minimal elemanı vardır. O halde $M_j = M_{j+1}$ olup M artindir.

2.7.5. Önerme Herhangi bir R halkası üzerindeki yarıbasit M modülü için aşağıdakiler denktir:

(i) M basit alt modüllerinin sonlu bir ailesinin direkt toplamıdır;

(ii) M noetherdir;

(iii) M artindir;

(iv) M sonlu üretilmiştir [10,12].

2.7.6. *Sonuç* Bir sol yarıbasit halka hem sol noetherdir hem de sol artindir [8].

İspat R sol yarıbasit halka olsun. Bu takdirde, ${}_RR$ yarıbasit olup ${}_RR$ sonlu üretilmiş olduğundan Önerme 2.7.5 gereği ${}_RR$ artin ve noetherdir.

2.8. Projektif ve İnjektif Modüller

2.8.1. Tanım (i) M ve N birer modül olsun. Verilen her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N modülüne ***M*-projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Yani, yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her f, g homomorfizmaları için $f = gh$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse, N modülüne M-projektiftir denir.

(ii) N modül olsun. Her $g: M \rightarrow K$ epimorfizması ve her $f: N \rightarrow K$ homomorfizması için aşağıdaki diyagram değişmeli ise, N modülüne **projektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[dl, dashed, "h"'] \arrow[d, "f"] & \\ M \arrow[r, "g"'] & K \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

Yani yukarıdaki diyagramda g epimorfizma olmak üzere her f, g homomorfizmaları için $f = gh$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması bulunabilirse, N modülüne projektiftir denir.

N, N-projektif ise, N ye **kendi kendine projektiftir** denir.

N modülü M-projektif ise, N modülü M nin her U alt modülü için de U-projektiftir [15].

2.8.2. Önerme P sıfırdan farklı projektif R-modül olsun. Bu takdirde, $Rad(P) = Rad(R)P$ ve $Des(P) = Des({}_R R)P$ dir [15].

2.8.3. Tanım (i) $M,\ N,\ K$ modüller olsun. Her $g: K \longrightarrow N$ monomorfizması ve her

$f: K \longrightarrow M$ homomorfizması için $f = h \circ g$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması varsa, M modülüne ***N*-injektiftir** denir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "g"] \arrow[d, "f"'] & N \arrow[dl, dashed, "h"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

(ii) M, N, K modüller olsun. Her $g: K \longrightarrow N$ monomorfizması ve her $f: K \longrightarrow M$ homomorfizması için $f = hg$ olacak şekilde bir $h: N \longrightarrow M$ homomorfizması varsa, M modülüne **injektif modül** denir [6].

2.8.4. Yardımcı Teorem M injektif modül ise, M modülünün her direkt toplam terimi injektiftir [1].

2.8.5. Teorem (Gömülme Teoremi) R herhangi bir birimli halka olsun. Her R-modül bir injektif R-modül içine gömülebilirdir [6].

2.8.6. Teorem M modül olsun. M nin injektif olması için gerek ve yeter koşul M nin kendisini kapsayan her modülde direkt toplam terimi olmasıdır [12].

İspat ($\Longrightarrow$) M injektif modül ve $M \leq U$ olsun. Bu takdirde, i içerme fonksiyonu ve I_M birim dönüşüm olmak üzere aşağıdaki diyagram değişmelidir.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & M \arrow[r, "i"] \arrow[d, "I_M"'] & U \arrow[dl, dashed, "g"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$m \in U$ keyfi bir eleman olsun. Bu takdirde, $g(m) \in M$ olup $gi = I_M$ olduğundan $g(m) = g\big(g(m)\big)$ olur. Buradan $m - g(m) \in Çek(g)$ olur. Bu durumda

$$m = g(m) + \big(m - g(m)\big) \in M + Çek(g)$$

olup $U \leq M + Çek(g) \leq U$ dan $U = M + Çek(g)$ elde edilir. $m \in M \cap Çek(g)$ keyfi elemanını alalım. $gi = I_M$ olduğundan $m = g(m) = 0$ olup $m = 0$ bulunur. Dolayısıyla $U = M \oplus Çek(g)$ dir.

($\Longleftarrow$) Teorem 2.8.5 gereğince M modülü injektif bir U R-modülü içine gömülebilirdir (M, bir injektif modülün alt modülüdür). Hipotezden ve Yardımcı Teorem 2.8.4 den M, injektiftir.

2.9. Kategori ve Funktor

2.9.1. Tanım Bir $\mathcal{K}$ **kategorisi**

(i) $Ob(\mathcal{K})$ **nesneler** sınıfından;

(ii) Her sıralı (A, B) nesneler çifti için, $Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ **morfizmalar** kümesinden (farklı (A, B) ve (C, D) çiftleri için $Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \cap Mor_{\mathcal{K}}(C, D) = \emptyset$ olmak üzere);

(iii) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$ olmak üzere (g, f) çiftine bunların **bileşkesi** denilen $gf \in Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ morfizmasını karşılık getiren $Mor_{\mathcal{K}}(B, C) \times Mor_{\mathcal{K}}(A, B) \to Mor_{\mathcal{K}}(A, C)$ fonksiyonlarından oluşur öyle ki:

(a) Her A, B, C, D nesneleri ve $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$, $h \in Mor_{\mathcal{K}}(C, D)$ morfizmaları için $h(gf) = (hg)f$ eşitliği sağlanır (birleşme kuralı).

(b) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ nesnesinin, her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, A)$ için $f1_A = f$ ve $1_A g = g$ eşitliklerini gerçekleyen bir $1_A \in Mor_{\mathcal{K}}(A, A)$ **birim morfizması** vardır [1].

R birimli bir halka olsun. R-Mod kategorisinin nesneleri tüm sol R-modüller, morfizmaları modül homomorfizmaları yani $Mor_{R-Mod}(M, N) = Hom_R(M, N)$ ve bileşkeleri, homomorfizmaların alışılmış bileşkeleridir.

2.9.2. Tanım $\mathcal{K}$ ve $\mathcal{M}$ kategoriler olsun. Bir (**kovariant**) $F: \mathcal{K} \to \mathcal{M}$ **funktoru**, $\mathcal{K}$ nın her A nesnesine $\mathcal{M}$ nin $F(A)$ nesnesini, $\mathcal{K}$ daki her $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$ morfizmasına $\mathcal{M}$ de bir $F(f) \in Mor_{\mathcal{M}}(F(A), F(B))$ morfizmasını karşılık getiren ve aşağıdaki koşulları gerçekleyen bir kuraldır:

(i) $f \in Mor_{\mathcal{K}}(A, B)$, $g \in Mor_{\mathcal{K}}(B, C)$ ise, $F(gf) = F(g)F(f)$ dir.

(ii) Her $A \in Ob(\mathcal{K})$ için $F(1_A) = 1_{F(A)}$ dır [1].

2.9.3. Tanım $F: R$-Mod$\to R$-Mod bir funktor olsun. Her $A \in Ob(R$-Mod$)$ için $G(A) \leq F(A)$ ve her $f: A \to B$ homomorfizması için $G(f) = F(f)|_{G(A)}$ koşullarını sağlayan G funktoruna F funktorunun **alt funktoru** denir. Her $A \in Ob(R$-Mod$)$ için $I(A) = A$ ve her

$f \in Hom_R(M,N)$ için $I(f) = f$ ile tanımlı $I: R$-Mod→ R-Mod funktoruna **birim funktor** denir. Her M sol R-modülü için $\tau(M) \leq M$ ve M' bir sol R-modül olmak üzere her $f: M \to M'$ R-modül homomorfizması için $\tau(f) = f|_{\tau(M)}: \tau(M) \to \tau(M')$ koşulunu gerçekleyen birim funktorun $\tau: R$-Mod→ R-Mod alt funktoruna R-Mod kategorisinin **öncül radikali** denir.

R-Mod kategorisinde τ öncül radikal ise, her sol M R-modülü için $\tau(M) \leq M$ ve $\forall\, f \in$End(M) için $f(\tau(M)) \leq \tau(M)$ dir [13].

2.9.4. Yardımcı Teorem $\sigma[M]$ de bir τ öncül radikali, herhangi $K \subset L$ alt modülü ve $\{N_\lambda\}_\Lambda$ alt modülleri için aşağıdaki ifadeler gerçeklenir,

(i) $\tau(K) = K$ ise, $K \subseteq \tau(L)$ dir.

(ii) $\tau(L\,/\,K) = 0$ ise, $\tau(L) \subseteq K$ dır.

(iii) $\tau(\bigoplus_\Lambda N_\lambda) = \bigoplus_\Lambda \tau(N_\lambda)$ dır.

(iv) $\tau(\prod_\Lambda N_\lambda) \subseteq \prod_\Lambda \tau(N_\lambda)$ dır [3].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. Yerel ve Yarıyerel Modüller

3.1.1. Tanım M modül olsun. M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı yine M nin bir öz alt modülü ise, M ye **yerel modül** denir. $_RR$ yerel ise, R halkasına **yerel halka** denir [15].

3.1.2. Teorem Sıfırdan farklı M R-modülünün yerel olması için gerek ve yeter koşul M nin sonlu üretilmiş (devirli) ve bir tek maksimal alt modüle sahip olmasıdır. Bu durumda M modülünün maksimal alt modülü $Rad(M)$ olup $Rad(M) \ll M$ dir [15].

İspat M yerel bir modül ve M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K ise, $K \neq M$ dir. Bu takdirde, en az bir $m \in M$ vardır ki $m \notin K$ olup $Rm \nleq K$ dır. K nın tanımı gereği $Rm = M$ olup M devirlidir. Ayrıca K alt modülünün bir tek maksimal alt modül olduğu açıktır. Tersine, M devirli ve M bir tek K maksimal alt modülüne sahip olsun. M sonlu üretilmiş olduğundan M modülünün her öz alt modülü K tarafından kapsanır. Dolayısıyla M nin tüm öz alt modüllerinin toplamı K olup M yerel modüldür. Bir modülün radikali tanımı gereği $Rad(M) = K$ olup M devirli olduğundan Sonuç 2.6.5 ten $Rad(M) \ll M$ olduğu açıktır.

3.1.3. *Sonuç* M modülünün yerel olması için gerek ve yeter koşul M modülünün oyuk ve $Rad(M) \neq M$ olmasıdır.

3.1.4. Tanım R halka ve M bir R-modül olsun. $M/Rad(M)$ yarıbasit ise, M modülüne **yarıyerel modü**l denir. R halkası sol (sağ) R-modül olarak yarıyerel ise, R halkasına **yarıyerel halka** denir [4].

3.1.5. Teorem (i) Yarıyerel modülün bölüm modülü yarıyereldir.

(ii) $\{M_i \mid i \in I\}$ yarıyerel modüllerin ailesi ise, $M = \oplus_{i\in I} M_i$ yarıyereldir.

İspat (i) M yarıyerel modül ve $f: M \longrightarrow N$ epimorfizma olsun. Bu takdirde,
her $m + Rad(M) \in M/Rad(M)$ için $\bar{f}\big(m + Rad(M)\big) = f(m) + Rad(N)$ ile tanımlı $\bar{f}: M/Rad(M) \longrightarrow N/Rad(N)$ dönüşümü epimorfizmadır. M yarıyerel olduğundan $M/Rad(M)$ yarıbasit olup Sonuç 2.5.9 (ii) gereği $N/Rad(N)$ yarıbasittir. Böylece N yarıbasittir.

(ii) Her $i \in I$ için $M_i/Rad(M_i)$ yarıbasittir. Teorem 2.6.9 (vii) ve Sonuç 2.5.9 (iii) gereği $M/Rad(M) \cong \bigoplus_{i \in I} (M_i/Rad(M_i))$ yarıbasit olup M yarıyereldir.

3.1.6. Teorem R yarıyerel halka ve M herhangi bir sol R-modül olsun. Bu takdirde,

(i) M yarıyereldir.
(ii) $Rad(M) = Rad(R)M$ dir [6].
İspat (i) M R-üretilmiş olduğundan I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere $f: R^{(I)} \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. R yarıyerel olduğundan Teorem 3.1.5 (ii) gereği $R^{(I)}$ sol yarıyerel R-modüldür. Dolayısıyla Teorem 3.1.5 (i) gereği M yarıyereldir.

(ii) Teorem 2.6.9 (ii) den $Rad(R)M \leq Rad(M)$ olduğu görülür. R yarıyerel olduğundan $R/Rad(R)$ yarıbasit halkadır. Dolayısıyla $M/Rad(R)M$ bir sol $R/Rad(R)$-modül olup Teorem 2.5.14 (i) gereği $M/Rad(R)M$ yarıbasittir. Buradan $Rad(M/Rad(R)M) = 0$ olup $Rad(R)M \subseteq Rad(M)$ olduğundan Teorem 2.6.9 (v) gereği $0 = Rad(M/Rad(R)M) = Rad(M)/Rad(R)M$ dir. Böylece $Rad(M) = Rad(R)M$ eşitliği elde edilir.

3.2. Tümlenmiş, Zayıf Tümlenmiş ve Rad-Tümlenmiş Modüller

3.2.1. Tanım M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ olacak şekilde bir V alt modülü var ve V bu şarta göre minimal ise, yani $U + K = M$ koşulunu gerçekleyen her $K \leq V$ için $K = V$ ise, V ye M de U nun **tümleyeni** ve U ya M de **tümleyene sahiptir** denir [15].

M modül ve $U \ll M$ olsun. Bu takdirde, küçük alt modül tanımından görüleceği üzere M, U alt modülünün tümleyenidir. Dolayısıyla modülün kendisi sıfırının tek tümleyenidir.

3.2.2. Önerme M modül ve $U, V \leq M$ olsun. V alt modülünün U nun M de tümleyeni olması için gerek ve yeter koşul $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olmasıdır [15].
İspat $(\Longrightarrow)$ V, U nun M de bir tümleyeni olsun. Bu takdirde, $M = U + V$ dir. Bir $N \leq V$ için $V = U \cap V + N$ olsun. Bu durumda $M = U + V = U + U \cap V + N = U + N$ olup V, U nun tümleyeni olduğundan $N = V$ elde edilir. Dolayısıyla $U \cap V \ll V$ dir.
$(\Longleftarrow)$ $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olsun. Bir $N \leq V$ için $M = U + N$ ise, Modüler kuraldan; $V = U \cap V + N$ olup $U \cap V \ll V$ olduğundan $N = V$ elde edilir.

M modül ve $U \leq M$ alt modülü M nin direkt toplam terimi olsun. Bu takdirde, $M = U + V$ ve $U \cap V = 0$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü vardır. $U \cap V = 0 \ll U$ ve $U \cap V = 0 \ll V$ olduğundan Önerme 3.2.2 gereği U ile V, M modülünün tümleyen alt modülleridir.

3.2.3. Teorem (Tümleyen Alt Modülün Özellikleri) U ile V, M R-modülünün alt modülleri olmak üzere V, U nun tümleyeni olsun. Bu takdirde,
(i) M sonlu üretilmiş ise, V de sonlu üretilmiştir.
(ii) U, M nin maksimal alt modülü ise, V yerel ve $Rad(V) = U \cap V$ dir.
(iii) $K \ll M$ olduğunda $K \cap V \ll V$ olup $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir.
(iv) $L \leq U$ olmak üzere $(V + L)/L$, M / L de U / L bölüm modülünün tümleyenidir [15].
İspat i) M sonlu üretilmiş olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. Teorem 2.2.5 ten M / U sonlu üretilmiştir. O halde $M / U = (U + V)/U \cong V / (U \cap V)$ sonlu üretilmiştir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.4.3 (vii) den V sonlu üretilmiştir.

(ii) U, M nin maksimal alt modülü ise M / U basittir. O halde
$$M / U = (U + V)/U \cong V / (U \cap V)$$
basit olup devirlidir. $U \cap V \ll V$ olduğundan Önerme 2.4.3 (vii) den V devirlidir. $V / U \cap V$ basit olduğundan Teorem 2.5.4 ten $U \cap V, V$ nin maksimal alt modülüdür. $Rad(V) \leq U \cap V$ olduğu açıktır. Ayrıca $U \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.6.6 dan $U \cap V \leq Rad(V)$ dir. Dolayısıyla $Rad(V) = U \cap V$ olup $U \cap V, V$ nin tek maksimal alt modülüdür.

(iii) $K \ll M$ ve $X \leq V$ için $(K \cap V) + X = V$ olsun. $M = U + V$ den $M = U + (K \cap V) + X$ olup $K \cap V \leq K \ll M$ iken $K \cap V \ll M$ dir. Buradan $M = U + X$ elde edilir. V nin minimalliğinden $X = V$ olur. Yani $K \cap V \ll V$ dir. $K \ll M$ ve $K \cap V \ll V$ olduğundan Teorem 2.6.6 dan $Rad(M) \cap V \subseteq Rad(V)$ dir.
Ters kapsamayı göstermek için $m \in Rad(V)$ keyfi elemanını alalım. Buradan Sonuç 2.6.3 gereğince $Rad(V) \ll V$ dir. $Rm \ll M$ ve böylece $m \in Rad(M)$ olur. $m \in V \cap Rad(M)$ dir. Dolayısıyla $Rad(V) \subseteq V \cap Rad(M)$ elde edilir. Sonuç olarak $Rad(V) = V \cap Rad(M)$ dir.

(iv) $L \leq U$ iken $M = U + V$ olduğundan $M / L = [U / L] + [(V + L)/L]$ eşitliği yazılabilir. Modüler kural gereğince $U \cap (V + L) = (U \cap V) + L$ dir. Dolayısıyla buradan $[U / L] \cap [(V + L)/L] = [U \cap (V + L)]/L = [(U \cap V) + L] / L$ elde edilir. $U \cap V \ll V$

olduğundan $[(U \cap V) + L] / L \ll (V + L)/L$ olup M / L de U / L nin tümleyeninin $(V + L)/L$ olduğu görülür.

3.2.4. Tanım M modül olsun. M nin her alt modülü tümleyene sahip ise, M ye **tümlenmiş modül** denir [15].

3.2.5. Tanım M modül ve $U, V \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ ise, V alt modülüne U nun M modülünde **zayıf tümleyeni** denir. Önerme 2.4.3 (i) gereği her tümleyen alt modül bir zayıf tümleyendir [3].

3.2.6. Tanım M modülünün her alt modülü zayıf tümleyene sahip ise, M modülüne **zayıf tümlenmiş modül** denir [3].

3.2.7. Teorem Yarıbasit modüller ve artin modüller tümlenmiştir.
İspat M yarıbasit modül ve $U \leq M$ keyfi bir alt modül olsun. M yarıbasit olduğundan $M = U \oplus V$ olacak şekilde $V \leq M$ mevcuttur. $U \cap V = 0 \ll V$ olduğundan V, U nun tümleyenidir. Dolayısıyla M tümlenmiştir.
M artin modül ve $U \leq M$ olsun. $U + M = M$ olduğu açıktır. $M_1 = M$ olsun. M_1, $U + M = M$ koşulunu sağlayan minimal alt modül değil ise, $U + M_2 = M$ olacak şekilde $M_2 \subseteq M_1$ alt modülü vardır ve bu yöntem ile devam edilirse, her $n \in \mathbb{N}$ için $M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \cdots$ ve $U + M_n = M$ olacak şekilde $M_n \leq M$ alt modülleri vardır. M artin olduğundan $M_k = M_{k+1} = \cdots = M_{k+t} = \cdots$ olacak şekilde $k \in \mathbb{Z}^+$ olup M_k, U nun tümleyenidir.

3.2.8. Teorem M modül olsun. M tümlenmiş ise, M modülünün her bölüm modülü tümlenmiştir [15].
İspat M tümlenmiş ve $K \leq L \leq M$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $L + V = M$ ve $L \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ alt modülü vardır. Teorem 3.2.3 (iv) gereği $(V + K) / K$, L / K nın M/K da tümleyeni olup M / K tümlenmiştir.

3.2.9. Teorem M tümlenmiş modül ise, M yarıyereldir [15].
İspat M tümlenmiş olduğundan Teorem 3.2.8 gereği $M/Rad(M)$ tümlenmiştir. Teorem 2.6.9 (ii) gereği $Rad(M/Rad(M)) = 0$ olduğundan her alt modülü bir direkt toplam terimi olup yarıbasittir. Dolayısıyla M yarıyereldir.

3.2.10. Tanım M modül ve $U \leq M$ olsun. $M = U + V$ ve $U \cap V \leq Rad(V)$ olacak şekilde M nin bir V alt modülü varsa, V ye U nun **Rad-tümleyeni** ve U ya M de **Rad-tümleyene sahiptir** denir [16].

3.2.11. Önerme Her modül, radikalininin Rad-tümleyenidir [13].
İspat M keyfi bir modül olsun. Bu takdirde, M= M + Rad(M) ve
$M \cap Rad(M) = Rad(M) \leq Rad(M)$ olup M modülü $Rad(M)$ nin Rad-tümleyenidir.

3.2.12. Önerme M bir modül olsun. M modülünün her tümleyen alt modülü Rad-tümleyendir. Tersine, M modülündeki küçük radikale sahip Rad-tümleyenler tümleyendir [13].
İspat V, M modülünde keyfi bir tümleyen olsun. Bu takdirde, M nin bir U alt modülü için $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ dir. $Rad(V)$, V alt modülünün tüm küçük alt modüllerinin toplamı ve $U \cap V \ll V$ olduğu için $U \cap V \leq Rad(V)$ olup V, U alt modülünün Rad-tümleyenidir. $V \leq M$ U nun Rad-tümleyeni ve $Rad(V) \ll V$ olduğunu kabul edelim. Böylece Önerme 2.4.3 (i) den $U \cap V \ll V$ dir. Dolayısıyla $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olup istenen elde edilir.

3.2.13. Teorem M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) M modülünün her alt modülü Rad-tümleyendir;
(ii) M modülünün her alt modülü tümleyendir;
(iii) M yarıbasittir [13].

3.2.14. Tanım M modül olsun. M modülünün her alt modülü Rad-tümleyene sahip ise, M modülüne **Rad-tümlenmiş modül** denir. M modülünün her alt modülü bol Rad-tümleyene sahip ise, M ye **bol Rad-tümlenmiş modül** denir [16].

Önerme 3.2.12 den her tümleyen alt modül Rad-tümleyen olduğundan her tümlenmiş modül Rad-tümlenmiş modüldür ve noether Rad-tümlenmiş modüller tümlenmiştir. Genellikle Rad-tümlenmiş modüller tümlenmiş değildir.

3.2.15. Önerme R bir halka olsun.
(i) M Rad-tümlenmiş R-modül ve $Rad(M) = 0$ ise, M yarı basittir.

(ii) M Rad-tümlenmiş R-modül ise, M nin her bölüm modülü Rad-tümlenmiştir.

(iii) $N \leq M$ Rad-tümlenmiş ve $U \leq M$ olmak üzere $N+U$, M de Rad-tümleyene sahip ise, U, M de Rad-tümleyene sahiptir.

(iv) Rad-tümlenmiş R-modüllerin her sonlu toplamı Rad-tümlenmiştir.

(v) M Rad-tümlenmiş R-modül ise, M yarıyereldir [14].

3.3. SS-Tümlenmiş Modüller

3.3.1. Tanım M modül ve $U, V \leq M$ olmak üzere $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ ve $U \cap V$ yarıbasit ise, V ye U nun **ss-tümleyeni** denir [7].

3.3.2. Tanım M modül olsun. M nin her alt modülü ss-tümleyene sahipse, M modülüne **ss-tümlenmiş modül** denir [7].

3.3.3. Tanım M modül olsun. M modülünün basit ve küçük alt modüllerinin toplamı $Des_s(M) = \sum\{U \ll M \mid U, M\ nin\ \ basit\ alt\ modülü\}$ şeklinde tanımlanır [17].

3.3.4. Lemma M modül olsun. Bu takdirde, $Des_s(M) = Rad(M) \cap Des(M)$ dir [7].

İspat $Des_s(M) \subseteq Rad(M)$ ve $Des_s(M) \subseteq Des(M)$ kapsamalarının varlığı açıktır. Böylece $Des_s(M) \subseteq Rad(M) \cap Des(M)$ dir. Şimdi $a \in Rad(M) \cap Des(M)$ keyfi elemanını alalım. Bu takdirde, Ra yarıbasittir. O halde $n \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere Teorem 2.5.8 den

$$Ra = S_1 \oplus S_2 \oplus \dots . \oplus S_n$$

olacak şekilde $1 \leq i \leq n$ olan M nin S_i basit alt modülleri vardır. $Ra \ll M$ olduğundan Önerme 2.4.3 (i) den $1 \leq i \leq n$ olmak üzere $S_i \ll M$ dir. Böylece $a \in Ra \subseteq Des_s(M)$ bulunur.

3.3.5. Önerme M ss-tümlenmiş modül ve $V \ll M$ olsun. Bu takdirde, $V \subseteq Des_s(M)$ dir [7].

İspat $V \ll M$ olduğundan V nin M den başka ss-tümleyeni yoktur. Dolayısıyla $V = V \cap M$ yarıbasit olup $V \subseteq Des(M)$ bulunur.

3.3.6. *Sonuç* M ss-tümlenmiş modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [7].

İspat M ss-tümlenmiş ve $Rad(M) \ll M$ olduğundan M, $Rad(M)$ nin ss-tümleyenidir. Dolayısıyla, $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$ ve

$M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarıbasit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ elde edilir.

3.3.7. Yardımcı Teorem M tümlenmiş modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde, M ss-tümlenmiştir [7].
İspat $U \leq M$ olsun. M tümlenmiş olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \ll V$ olacak şekilde $V \leq M$ vardır. $U \cap V \ll V$ olduğundan $U \cap V \subseteq Rad(V) \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ olup $U \cap V$ yarıbasittir. Sonuç olarak V, U nun M de ss-tümleyenidir.

3.3.8. Teorem M modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) M ss-tümlenmiştir;
(ii) M tümlenmiştir ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir;
(iii) M tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir [7].
İspat (i)⟹(ii) $Rad(M) \ll M$ ve M ss-tümlenmiş olsun. M tümlenmiş ve M, $Rad(M)$ nin de tümleyenidir. $M = M + Rad(M)$, $M \cap Rad(M) = Rad(M) \ll M$ ve M ss-tümlenmiş olduğundan her alt modülü ss-tümleyene sahiptir. $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ ss-tümleyene sahiptir.

(ii)⟹(iii) M tümlenmiş ve $Rad(M)$ ss-tümleyene sahip olsun. $Rad(M)$ nin ss-tümleyeni M olduğundan $M \cap Rad(M) = Rad(M)$ yarıbasit olup $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olur.

(iii)⟹(i) Yardımcı Teorem 3.3.7 den istenen elde edilir.

3.3.9. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül olsun. M modülünün ss-tümlenmiş olması için gerek ve yeter koşul M nin tümlenmiş ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır [5].
İspat M sonlu üretilmiş olduğundan Sonuç 2.6.5 gereği $Rad(M) \ll M$ olup Teorem 3.3.8 den ispat görülür.

3.3.10. Teorem Birimli R halkası için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) ${}_RR$ ss-tümlenmiştir;
(ii) R yarıyerel ve $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ dir;
(iii) Her sol R-modül ss-tümlenmiştir [7].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. SS-Yarıyerel Modüller

4.1.1. Tanım M bir modül $U, V \leq M$ olsun. Eğer V, U nun zayıf tümleyeni ve $U \cap V$ yarıbasit ise, V ye U nun bir **zayıf ss-tümleyeni** denir.

4.1.2. Lemma M bir modül $U, V \leq M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ dir;
(ii) V, U nun zayıf ss-tümleyenidir;
(iii) $M = U + V$, $U \cap V \subseteq Rad(M)$ ve $U \cap V$ yarıbasittir.
İspat (i)⟹(ii) $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ olsun. Lemma 3.3.4 ile $Des_s(M) = Rad(M) \cap Des(M)$ olduğundan $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ olup $U \cap V$ yarıbasittir. Diğer taraftan, $U \cap V \subseteq Rad(M)$ olup $U \cap V \ll M$ dir. Böylece V, U alt modülünün zayıf tümleyenidir.

(ii)⟹(iii) V, U nun M de zayıf tümleyeni ve $U \cap V$ yarıbasit olsun. Bu takdirde, $\mathrm{M} = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ olup $U \cap V \subseteq Rad(M)$ dir.

(iii)⟹(i) $M = U + V$, $U \cap V \subseteq Rad(M)$ ve $U \cap V$ yarıbasit olsun. $U \cap V \subseteq Rad(M)$ ve $U \cap V \subseteq Des(M)$ olup $U \cap V \subseteq Rad(M) \cap Des(M) = Des_s(M)$ dir.

Şimdi ss-yarıyerel modülün inşasında motivasyon kaynağımız olan teoremi verelim.

4.1.3. Teorem M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) M / N yarıbasittir;
(ii) Her $U \leq M$ için $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq N$ olacak biçimde bir $V \leq M$ vardır;
(iii) M_1 yarıbasit, $N \trianglelefteq M_2$ ve M_2 / N yarıbasit olacak biçimde $M = M_1 \oplus M_2$ parçalanışı vardır [9].
İspat (i)⟹(iii) M / N yarıbasit olsun. $U \cap N = 0$ olacak biçimde keyfi $U \leq M$ nü alalım. M / N yarıbasit olduğundan $(U \oplus N) / N$ alt modülü yarıbasittir ve M / N nin bir direkt toplam terimidir. O halde $(U \oplus N) / N \cong U$ yarıbasit ve $[(U \oplus N)/N] \oplus [V / N] = M / N$ olacak biçimde $V / N \leq M / N$ yarıbasit alt modülü vardır.

$M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq U \cap N = 0$ olduğundan $M = U \oplus V$ dir.

1.İzomorfizma Teoreminden; $N \cong (N \oplus U)/U \trianglelefteq M / U \cong V$ bulunur ve $N \trianglelefteq V$ dir.

(iii)⟹(i)⟹(ii) Açıktır.

(ii)⟹(i) $U/N \leq M/N$ alalım. $U \leq M$ M modülünde $\mathrm{M} = U + V$ ve $U \cap V \subseteq N$ olacak biçimde $V \leq M$ zayıf ss-tümleyenine sahip olsun. Böylece

$$M/N = [U / N] \oplus [V + N / N].$$

Buradan M/N modülünün her alt modülü direkt toplam terimi olup M/N yarıbasittir.

Teorem 4.1.3 te $N = Des_s(M)$ alt modülünü alarak aşağıdaki sonucu elde ederiz.

4.1.4. *Sonuç* M modülü için aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) $M / Des_s(M)$ yarıbasittir;

(ii) M modülünün her alt modülü zayıf ss-tümleyene sahiptir;

(iii) U yarıbasit, $Des_s(M) \trianglelefteq V$ ve $V / Des_s(M)$ yarıbasit olacak biçimde $M = U \oplus V$ parçalanışı vardır.

4.1.5. Tanım Sonuç 4.1.4 teki denk koşulları sağlayan M modülüne **ss-yarıyerel modül** denir.

Her ss-yarıyerel modül yarıyereldir fakat yarıyerel bir modül ss-yarıyerel olmak zorunda değildir. Bunu bir örnekle gösterelim. Örneğimizi vermeden önce aşağıdaki lemmayı inceleyelim.

4.1.6. Lemma M ss-yarıyerel modül ve $Des(M) = 0$ ise, $M = 0$ dır.

İspat $U \leq M$ olsun. M ss-yarıyerel olduğundan $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ olacak biçimde $V \leq M$ vardır. Buradan $U \cap V \subseteq Des_s(M) \subseteq Des(M) = 0$ ve $M = U \oplus V$ dir. Dolayısıyla $M = Des(M) = 0$ dır.

4.1.7. *Örnek* $M = \mathbb{Q}$ $\mathbb{Z}$-modülünü ele alalım. M maksimal alt modüle sahip olmadığından $M = Rad(M)$ olup $M/Rad(M) = 0$ dır ve yarıbasittir. Dolayısıyla M yarıyereldir. M nin ss-yarıyerel olduğunu kabul edelim. $Des(M) = 0$ olduğundan Lemma 4.1.5 gereği $M = 0$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla M modülü ss-yarıyerel değildir.

M modül ve $U \leq M$ olsun. Eğer $M = U + V$ şartını sağlayan her V alt modülü için U nun $V' \leq V$ olan bir V' ss-tümleyeni varsa, U, M de **bol ss-tümleyene sahiptir** denir. Eğer M nin her alt modülü bol ss-tümleyene sahipse, M modülüne **bol ss-tümlenmiş modül** denir [7].

Her bol ss-tümlenmiş modül ss-tümlenmiştir. Sıradaki önerme bu özelliğin ss-yarıyerel modül için de geçerli olduğunu göstermektedir.

4.1.8. Önerme M ss-yarıyerel modül ve $U, V \leq M$ ve $M = U + V$ olsun. Bu takdirde, $V' \leq V$ olacak biçimde U alt modülünün M de V' zayıf ss-tümleyeni vardır.
İspat $U \cap V = A$ olsun. M ss-yarıyerel olduğundan $M = A + B$ ve $A \cap B \subseteq Des_s(M)$ olacak biçimde $B \leq M$ vardır. Modüler kuraldan; $V = V \cap M = V \cap (A + B) = A + V \cap B$ dır. Böylece $M = U + V = U + (A + V \cap B) = U + (V \cap B)$ dir. Diğer taraftan $U \cap (V \cap B) = (U \cap V) \cap B = A \cap B \subseteq Des_s(M)$ olup $V \cap B$, U alt modülünün M de bir zayıf ss-tümleyenidir.

4.1.9. Önerme M yarıyerel modül ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olsun. Bu takdirde, M ss-yarıyereldir.
İspat $Rad(M)$ yarıbasit olduğundan $Des_s(M) = Rad(M) \cap Des(M) = Rad(M)$ ve $M/Des_s(M) = M\ /\ Rad(M)$ yarıbasittir. Böylece M ss-yarıyereldir.

4.1.10. Önerme M ss-yarıyerel modül ve $U \ll M$olsun. Bu takdirde, $U \subseteq Des_s(M)$ dir.
İspat Hipotez gereğince $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ olacak biçimde $V \leq M$ vardır. $U \ll M$ olduğundan $V = M$ olmalıdır. Buradan $U \cap V = U \cap M = U \subseteq Des_s(M)$ bulunur.

4.1.11. *Sonuç* M ss-yarıyerel modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

Sonlu üretilmiş modüller küçük radikale sahip olduğundan aşağıdaki sonuca da ulaşırız.

4.1.12. *Sonuç* M sonlu üretilmiş modül olsun. Bu takdirde, M modülünün ss-yarıyerel olması için gerek ve yeter koşul M nin yarıyerel ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ olmasıdır.

M modülü $Rad(M) \subseteq Des(M)$ koşulunu sağlayan yerel modül olsun. Bu takdirde, M modülüne **güçlü yerel modül** denir [7].

4.1.13. Lemma M oyuk modül olsun. M nin ss-yarıyerel olması için gerek ve yeter koşul M nin güçlü yerel olmasıdır.

İspat $(\Leftarrow)$ $0 \neq M$ oyuk modülü güçlü yerel olsun. Bu takdirde, M yereldir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir. Yerel modüller tümlenmiştir ve Yardımcı Teorem 3.3.7 den M ss-tümlenmiştir. Ss-tümlenmiş modüller ss-yarıyereldir. Dolayısıyla M ss-yarıyereldir.

$(\Rightarrow)$ $0 \neq M$ oyuk modülü ss-yarıyerel ve $U \leq M$ olsun. $U \ll M$ ve M ss-yarıyerel olduğundan Önerme 4.1.10 gereği $U \subseteq Des_s(M) \subseteq Des(M)$, $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

M oyuk modül olduğundan M radikal ya da yereldir.

M radikal olsa, $M = Rad(M) = Des(M) = 0$ çelişkisi elde edilir. O halde M yereldir. Böylece M güçlü yerel modüldür.

M modül olsun. Eğer M nin $Rad(M)$ yi kapsayan M nin her alt modülü M de zayıf tümleyene sahip ise, M modülüne **zayıf radikal tümlenmiş** denir [11].

4.1.14. Teorem M bir modül ve $Rad(M) \ll M$ olsun. Bu takdirde, aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) M ss-yarıyereldir;

(ii) M yarıyerel ve $Rad(M)$ M de zayıf ss-tümleyene sahiptir;

(iii) M yarıyerel ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir;

(iv) M zayıf tümlenmiştir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir;

(v) M zayıf radikal tümlenmiştir ve $Rad(M) \subseteq Des(M)$ dir.

İspat (i)⇒(ii) Açıktır.

(ii) ⇒(iii) Hipotez gereği $Rad(M)$, $M = Rad(M) + V$ ve $Rad(M) \cap V$ yarıbasit olacak biçimde M de V zayıf ss-tümleyenine sahiptir. $Rad(M)$, M de küçük olduğundan $M = Rad(M) + V = V$ dir.Buradan

$$Rad(M) \cap V = Rad(M) \cap M = Rad(M)$$

yarıbasittir.

(iii) ⇒(iv) M yarıyerel modül olsun. Bu takdirde, Tanım 3.1.4 ten $M\ /\ Rad(M)$ yarıbasittir. Teorem 4.1.3 ten $U \leq M$ için $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Rad(M)$ olacak biçimde $V \leq M$ vardır. $Rad(M) \ll M$ olduğundan $U \cap V \ll M$ dir. Dolayısıyla M zayıf tümlenmiştir.

(iv) ⇒(v) Açıktır.

(v) ⇒(i) $U \subseteq M$ olsun. (v) gereğince $U + Rad(M)$, M de V zayıf tümleyenine sahiptir. $M = \big(U + Rad(M)\big) + V = U + V$ ve $U \cap V \ll M$ dir. Böylece $U \cap V \subseteq Rad(M) \subseteq Des(M)$ yarıbasittir. Buradan V, M de U nun zayıf ss-tümleyeni olur. Böylece M ss-yarıyereldir.

Her ss-yarıyerel modül zayıf tümlenmiştir fakat her zayıf tümlenmiş modülün ss-yarıyerel olmadığını bir örnekle gösterelim.

4.1.15. *Örnek* $M = \mathbb{Z}_8$ $\mathbb{Z}$-modülünü ele alalım.
$Rad(M) = \{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}\}$ ve $Des(M) = \{\bar{0}, \bar{4}\}$ dir. Artin modüller zayıf tümlenmiş olduğundan M zayıf tümlenmiştir. Sonuç 4.1.12 gereğince M ss-yarıyerel değildir.

Artin modüller yarıyereldir fakat Örnek 4.1.15 gösteriyor ki artin modüller ss-yarıyerel olmak zorunda değildir.

Yarıyerel halkalar sınıfının, tümlenmiş halkalar sınıfının bir öz genellemesi olduğunu biliyoruz. Şimdi Sonuç 4.1.12 yi kullanarak bir R halkası için ${}_RR$ ss-yarıyerel modül ise, ss-tümlenmiş olduğunu gösterelim.

4.1.16. *Sonuç* R birimli bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:
(i) ${}_RR$ ss-yarıyerel modüldür;
(ii) R yarıyerel ve $Rad(R) \subseteq Des\big({}_RR\big)$ dir;
(iii) ${}_RR$ ss-tümlenmiştir.
İspat (i)⇒(ii) Sonuç 4.1.12 den görülür.

(ii)⇒(iii) Teorem 3.3.10 dan görülür.

(iii)⇒(i) Açıktır.

Ss-yarıyerel modüller; bölüm modülleri, direkt toplamlar ve tümleyen alt modüller altında kapalıdır.

4.1.17. Önerme M ss-yarıyerel modül olsun. Bu takdirde, M nin her bölüm modülü ss-yarıyereldir.

İspat M ss-yarıyerel modül ve bir $L \leq M$ için $M\ /\ L$ bölüm modülünü alalım. Varsayımdan L yi kapsayan $U \leq M$ için $M = U + V$, $U \cap V \ll M$ ve $U \cap V$ yarıbasit olacak şekilde $V \leq M$ vardır. $\pi: M \to M\ /\ L$ doğal homomorfizma olmak üzere, Önerme 2.4.3 (iv) den

$$M/L = [U/L] + [(V + L)\ /\ L]$$

ve

$$[U/L] \cap [(V + L)/L] = \big((U \cap V) + L\big)/L = \pi(U \cap V) \ll \pi(M) = M\ /\ L$$

dir. $U \cap V$ yarıbasit olduğundan Sonuç 2.5.9 (ii) den

$$\pi(U \cap V) = \big((U \cap V) + L\big)/L = [U/L] \cap [(V + L)/L]$$

yarıbasittir. Yani, $(V + L)/L$, $M\ /\ L$ de U/L nin zayıf ss-tümleyenidir. Dolayısıyla M nin her bölüm modülü ss-yarıyereldir.

4.1.18. Lemma $f: A \to B$ modül homomorfizması olsun. Bu takdirde, $f\big(Des_s(A)\big) \subseteq Des_s(B)$ dir. Özel olarak; $A \subseteq B$ ise, $Des_s(A) \subseteq Des_s(B)$ dir.

İspat Önerme 2.4.3 (iv) ve Sonuç 2.5.9 (ii) den görülür.

4.1.19. Önerme $\{M_i\}_{i \in I}$ R-modüller ailesi olsun. Bu takdirde, $Des_s(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} Des_s(M_i)$ dir.

İspat Lemma 4.1.18 gereği Des_s , R-Mod da birim funktorun alt funktorunda tanımlıdır ve R-Mod da öncül radikaldir. Yardımcı Teorem 2.9.4 (iii) kullanılırsa $Des_s(\bigoplus_{i \in I} M_i) = \bigoplus_{i \in I} Des_s(M_i)$ bulunur.

4.1.20. Teorem ss-yarıyerel modüllerin sınıfı herhangi direkt toplamlar ve homomorfik görüntüler altında kapalıdır.

İspat M ss-yarıyerel, $f: M \to N$ bir epimorfizma olsun.

Bütün $m + Des_s(M) \in M / Des_s(M)$ elemanları için $\bar{f}: M / Des_s(M) \to N / Des_s(N)$ epimorfizması yardımıyla $\bar{f}(m + Des_s(M)) = f(m) + Des_s(N)$ olur. Sonuç 2.5.9 (ii) den $N / Des_s(N)$ yarıbasittir ve böylece N ss-yarıyereldir.

$\{M_i\}_{i\in I}$ ss-yarıyerel modüllerin herhangi ailesi ve $M = \bigoplus_{i\in I} M_i$ olsun. Bu takdirde, Önerme 4.1.19 gereğince $M/Des_s(M) = \bigoplus_{i\in I} M_i / Des_s(\bigoplus_{i\in I} M_i) \cong \bigoplus M_i / Des_s(M_i)$ yarıbasittir. Dolayısıyla Sonuç 2.5.9 (iii) den M ss-yarıyereldir.

4.1.21. *Sonuç* M bir modül ve $\{M_i\}_{i\in I}$, M nin ss-yarıyerel modüllerinin herhangi ailesi olsun. Bu takdirde, $\sum_{i\in I} M_i$ ss-yarıyereldir.

İspat Her $i \in I$ için M_i modülleri ss-yarıyerel alt modül olmak üzere $M = \sum_{i\in I} M_i$ olsun. Bu takdirde, $N = \bigoplus_{i\in I} M_i$ modülü Teorem 4.1.20 den ss-yarıyeldir. Şimdi her $(m_i)_{i\in I} \in N$ için $f((m_i)_{i\in I}) = \sum_{i\in I} m_i$ ile tanımlı $f: N \longrightarrow M$ epimorfizmasını düşünelim. Önerme 4.1.17 den M ss-yarıyereldir.

4.1.22. Önerme M ss-yarıyerel modül ve $Rad(A) = A \cap Rad(M)$ olmak üzere $A \leq M$ olsun. Bu takdirde, A ss-yarıyereldir.

İspat $U \subseteq A$ alalım. $M = U + V$ ve $U \cap V \subseteq Des_s(M)$ olacak biçimde $V \leq M$ vardır. Modüler kuraldan; $A = U + A \cap V$ yazılabilir. $U \cap (A \cap V) = A \cap V$ yarıbasit olduğu açıktır. $A \cap V \subseteq Rad(A)$ olduğunu kanıtlayalım.

$a \in A \cap V$ olsun. $a \in A \cap V \subseteq U \cap V \subseteq Des_s(M) = Des(M) \cap Rad(M)$ ve böylece $a \in Rad(M)$ olur. Hipotez gereği $a \in A \cap Rad(M) = Rad(A)$ olduğundan $A \cap V \subseteq Des_s(A)$ bulunur. Dolayısıyla A ss-yarıyereldir.

Teorem 3.2.3 (iii) den ss-yarıyerel modülün her tümleyen alt modülünün (özellikle, ss-tümleyen) ss-yarıyerel olduğu görülür.

4.1.23. Teorem R birimli bir halka olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

(i) ${}_RR$ ss-yarıyerel modüldür;

(ii) Her sol R-modül ss-yarıyereldir;

(iii) R yarıyerel ve $Rad(R) \subseteq Des({}_RR)$ dir.

İspat (i)⇒(ii) M herhangi sol R-modül olsun. Bu takdirde, M R-üretilmiş olduğundan I boş kümeden farklı bir indis kümesi olmak üzere $f: R^{(I)} \longrightarrow M$ epimorfizması vardır. Teorem 4.1.20 ve Sonuç 4.1.21 gereğince, M ss-yarıyereldir.

(ii)⇒(iii) ve (iii)⇒(i) *Sonuç* 4.1.16 dan görülür.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezde, ss-yarıyerel modül tanımı ve ss-yarıyerel modüllerle ilgili teoremler, önermeler ve sonuçlar yer almaktadır. Bu çalışmada tüm modülleri ss-yarıyerel olan halkalar karakterize edilmiştir. Bu çalışmadan faydalanılarak Dedekind bölgesi üzerinde tanımlı bir modülün zayıf ss-tümleyenler yardımıyla yapısı belirlenebilir ve abel gruplara uygulamaları araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Alizade, R. ve Pancar, A. (1999). *Homoloji Cebire Giriş.* Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi, 176.

[2] Anderson, F.W. and Fuller, K. R. (1992). *Rings and Categories of Modules*. Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 363.

[3] Clark, J. , Lomp, C. , Vanaja , N. and Wisbauer, R. (2006). *Lifting Modules. Supplements and Projectivity in Module Theory*. Frontiers in Mathematics, Basel, 394.

[4] Facchini, A. (1998). *Module Theory.* Progress in Mathematics, 167, Birkhauser, Verlag, Basel, 281.

[5] Hungerford, T. W. (1973). *Algebra.* Springer – Verlag, 502.

[6] Kasch, F. (1982). *Modules and Rings.* Academic Press, 372.

[7] Kaynar, E. , Çalışıcı, H. and Türkmen, E. (2020). ss-supplemented modules. *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.,* 69 (1), 473-485.

[8] Lam, T.Y. (1991). *A First Course in Noncommutative Rings.* Springer-Verlag, 397.

[9] Lomp C. (1999). On semilocal modules and rings. *Communs Algebra,* (27), No 4. 1921-1935.

[10] Nişancı Türkmen, B. ve Pancar, A. (2014). *İnjektif Modüllere Giriş.* Pegem Akademi, 217.

[11] Nişancı Türkmen, B. and Türkmen, E. (2017). On a generalization of weakly supplemented modules. *An. Ştiin. Univ. Al. I. Cuza Din Iai. Math. (N. S.),* 63 (2), 441-448.

[12] Sharpe, D.W. and Vamos, P. (1972). *Injective Modules.* Cambridge at the University Press, 190.

[13] Türkmen, E. (2010). Radikal tümlenmiş ve eş sonlu radikal tümlenmiş modüllerin karakterizasyonları. Doktora Tezi, Ondokuz Mayıs Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, 41.

[14] Wang, Y. and Ding, N. (2006). Generalized supplemented modules. Taiwanese J. Math, 10(6) , 1589- 1601.

[15] Wisbauer, R. (1991). *Foundations of Module and Ring Theory*. Gordon and Breach, 606.

[16] Xue, W. (1996). Characterizations of semiperfect and perfect rings. *Publicacions Matematiques,* 40: 115-125.

[17] Zhou D. X. and Zhang X. R. (2011). Small-essential submodules and Morita Duality. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics,* 35: 1051-1062.

[18] Zöschinger, H. (1974). Supplemented modules over Dedekind rings. *Journal ofAlgebra*, 29: 42-56.

[19] Zöschinger, H. (1974). Moduln, die in jeder Erveiterung ein Komplement haben. *Math. scand*, 35: 267-287.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı : Arzu OLĞUN

Uyruğu : Türkiye Cumhuriyeti

Doğum tarihi ve yeri : 02.03.1992- Arıcak

e-posta : arzu.olgun@yahoo.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Lisans	Marmara Üniversitesi	2014

İş Deneyimi/Yıl	**Çalıştığı Yer**	**Görevi**
2016-2020	Amasya İMKB MTAL	Matematik Öğretmeni
2020-	Avcılar Firuzköy ÇPAL	Matematik Öğretmeni