T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

# ZAMAN SKALASINDA LYAPUNOV’UN DİREKT METODU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

HALİL TERECİ

Ocak-2019
AMASYA

**ZAMAN SKALASINDA LYAPUNOV'UN DİREKT METODU**

**Halil TERECİ**

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**MATEMATİK ANA BİLİM DALI**

**DANIŞMAN**

**Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ**

**AMASYA ÜNİVERSİTESİ**

**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**Ocak-2019**

## ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

Bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Halil TERECİ

13/12/2018

ZAMAN SKALASINDA LYAPUNOV'UN DİREKT METODU

(Yüksek Lisans Tezi )

Halil TERECİ

AMASYA ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Ocak 2019

ÖZET

Zaman skalası ortaya çıkmasından bugüne matematik dünyasında büyük bir ilgi odağı olmuştur. Ayrıca bu çalışma sahası geniş bir uygulama alanına sahiptir. Bu tez çalışmasında öncelikle zaman skalası kavramı ve zaman skalaları üzerinde delta türev, delta integral ve üstel fonksiyon kavramları analiz edildi. Son bölümde zaman skalası dinamik denklemler için Lyapunov kararlılık teorisi incelenmiştir.

Sayfa Adedi : 52

Anahtar Kelimeler : Zaman Skalası, Lyapunov, Kararlılık Teorisi

Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ

LYAPUNOV’S DIRECT METHOD ON TIME SCALES

(M.Sc.Thesis)

Halil TERECİ

AMASYA UNIVERSITY

GRADUATE SCHOOL OF NATURAL AND APPLIED SCIENCES

January 2019

## ABSTRACT

The time scale has been a focus of interest in the world of mathematics since it was discovered. Moreover, it has a large are a of application. In this thesis, firstly the concept of time scale, delta differential and delta integral on the time scale, and the concept of exponential functions are defined. In the last part, Lyapunov stability theory for dynamic systems on tıme scales are investigated.

PageNumber : 52
KeyWords : The Time Scale, Lyapunov Stability Theory
Supervisor : Asst. Prof. Süleyman ÖĞREKÇİ

# ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez konusunu bana tavsiye eden, çalışmalarım boyunca destekleyen, yönlendiren ve yazımı sırasında bana zaman ayırarak yardımını esirgemeyen tez danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Süleyman ÖĞREKÇİ ‘ye çok teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

# ÇİZELGELER DİZİNİ

**Çizelge** **Sayfa**

# ŞEKİLLER DİZİNİ

**Şekil** **Sayfa**

# SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan simgeler ve kısaltmalar, aşağıda açıklamaları ile birlikte sunulmuştur.

| **Simgeler** | **Açıklama** |
|---|---|
| $\mathbb{T}$ | Zaman Skalası |
| $\mathbb{R}$ | Reel Sayılar Kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | Tam sayılar Kümesi |
| $\mathbb{N}$ | Doğal Sayılar Kümesi |
| $\sum$ | Toplam Sembolü |
| $\mathrm{Crd}\ (\mathrm{T}, \mathrm{M})$ | T kümesinden M kümesine rd-sürekli fonksiyonların kümesi |
| $\mathcal{R}\ (\mathrm{K}, \mathrm{M})$ | K kümesinden M kümesine regresif fonksiyonların kümesi |
| $\in$ | Elemanıdır. |
| $\circ$ | Bileşke |
| $f^{\Delta}$ | Delta türev |
| $\int_{u}^{o} f\Delta$ | u noktasından o noktasına Delta integral |

# 1. GİRİŞ

Zaman skalası kuramı ilk olarak Stefan Hilger'in 1988'deki doktora tezindeki sürekli ve ayrık ortamlardaki olayların analizini birleştirmek için ortaya atılmıştır. Bu yeni teori uygulamalı bilimlerde birçok alanda kendini göstermektedir. Bu alanlardan birisi zaman skalasında dinamik denklemlerdir.

Fark denklemleri teorisi yaklaşık sekiz asırlık çalışmalar sonunda sistematik bir hale gelmişken, diferansiyel denklemler teorisi dört asırdır çalışılmaktadır. Diferansiyel denklemler teorisinin daha kısa süredir çalışılmasının sebebi, doğa olaylarının kesiksiz olduğunun var sayılmasıdır.

Diferansiyel denklemler teorisi; fizik, kimya, biyoloji, astronomi, ekonomi ve diğer bilimlere ait matematiksel ifade yöntemi olarak kullanılır. Ancak zaman sürekli olarak ilerlese de, olaylarının kendi içinde süreklilik ve süreksizlik hallerinin aynı anda varlığı bir gerçektir. Dolayısıyla, her matematiksel olayı diferansiyel denklemlerle ve fark denklemlerle ifade etmek mümkün değildir.

Yukarıda değinildiği gibi, doğada meydana gelen olayların her zaman sürekli veya kesikli olduğunu söyleyemeyiz. Dolayısıyla, zaman skalası bize olayların denklemlerini oluşturmamızda büyük bir kolaylık sağlamaktadır. Zaman skalası teorisi sayesinde, sürekli olan veya sürekli olmayan doğa olaylarının formülize edilebilmesi sağlanmaktadır.

Zaman skalası üzerinde tanımlanan bu denklemlere dinamik denklemler denir. Zaman skalasının özel durumlarında dinamik denklemler, fark denklemi ya da diferansiyel denklem haline dönüşür. Böylece fark denklemleri ve diferansiyel denklemler için farklı sonuçlar vermek yerine, ikisini de birleştiren bir denklem yazılabilir. Zaman skalasını özetlemek istersek, ayrık analiz ve sürekli analizi birleştirir [1].

# 2.TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1. Zaman Skalası

Zaman skalası reel sayıların boş olmayan keyfi bir alt kümesidir. Böylece

$$\mathbb{R},\ \ \mathbb{Z},\ \ \mathbb{N},\ \ \mathbb{N}_0,$$

yani reel sayılar, tam sayılar, doğal sayılar ve pozitif doğal sayılar zaman skalasına örnektir.

$$[0,1] \cup [2,3],\ \ [0,1] \cup \mathbb{N}\ \text{ ve Cantor kümesi}$$

yine birer zaman skalasına örnek iken

$$\mathbb{Q},\ \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q},\ \mathbb{C},\ (0,1)$$

yani rasyonel sayılar, irrasyonel sayılar, karmaşık sayılar ve (0,1) açık aralığı bir zaman skalası değildir. Bu tezimizde zaman skalasını $\mathbb{T}$ sembolüyle belirteceğiz ve $\mathbb{T}$ zaman skalasının standart topoloji olarak reel sayılardan devraldığı topolojiye sahip olduğunu varsayacağız. Zaman skalası ayrık ve sürekli analizi birleştiren bir teori oluşturmak için Stefan Hilger tarafından doktora tezinde başlatılmıştır [2].

Bu kısımda zaman skalası ve onların diferensiyellenebilir fonksiyonlarını tanıtacagız ve $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını sunacağız. Yine de genel teori bir çok $\mathbb{T}$ zaman skalası için uygulanır. Bunlardan bazıları örnek olarak verilecektir. Şimdi işe zaman skalası üzerinde hesap yaparken kullanacağımız ileri ve geri sıçrama operatörlerini tanımlayarak başlayalım.

2.1.Tanım

$\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. $t \in \mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü,

$$\sigma: \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ \ \sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T} : s > t\}$$

iken, geri sıçrama operatörü,

$$\rho: \mathbb{T} \to \mathbb{T},\ \ \rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T} : s < t\}$$

şeklindedir.

Bu tanımla ilgili bazı özelliklerimiz var.

(i) Eğer $\mathbb{T}$ bir t maksimumuna sahipse $\sigma(t) = t$ olduğunda $\inf\emptyset = \sup \mathbb{T}$ olur.

(ii) Eğer $\mathbb{T}$ bir t minimumuna sahipse $\rho(t) = t$ olduğunda $\sup\emptyset = \inf \mathbb{T}$ olur.

(iii) Eğer $\sigma(t) > t$ ise bu durumda t noktası sağ saçılımlı,

(iv) Eğer $\rho(t) < t$ ise bu durumda t noktası da sol saçılımlı deriz.

(v) Eğer zaman skalasının bir noktası hem sağ saçılımlı hemde sol saçılımlı ise izole nokta olarak adlandırılır.

(vi) Eğer $\mathrm{t} < \mathit{sup}\, \mathbb{T}$ ve $\sigma(\mathrm{t}) = \mathrm{t}$ ise t ' ye sağ yoğun denir.

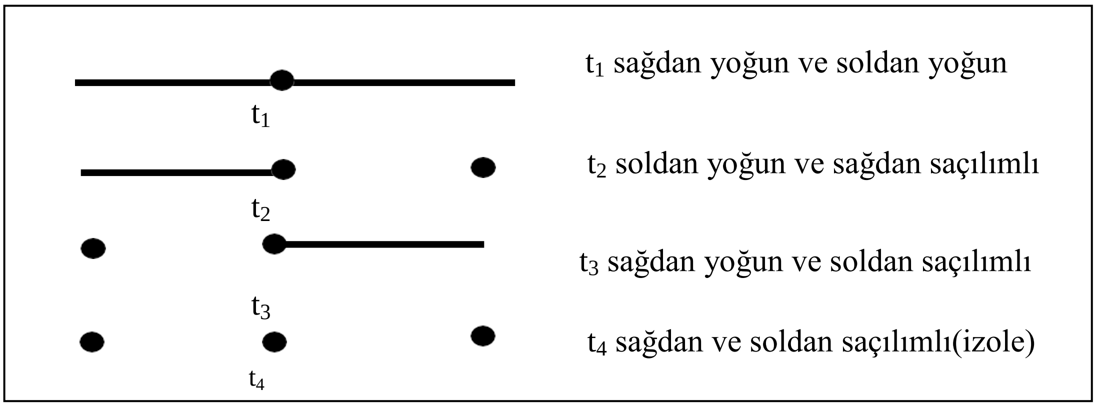
(vii) Eğer $\mathrm{t} > \mathit{inf}\, \mathbb{T}$ ve $\rho(\mathrm{t}) = \mathrm{t}$ ise t ' ye sol yoğun denir.

(viii) Eğer zaman skalasının bir noktası hem sağ yoğun hem sol yoğun ise yoğun olarak adlandırılır [2].

2.1. Çizelge Noktaların Sınıflandırılması

| | |
|---|---|
| $a$ sağ saçılımlı | $\sigma(a) > a$ |
| $a$ sağ yoğun | $\sigma(a) = a$ |
| $a$ sol saçılımlı | $\rho(a) < a$ |
| $a$ sol yoğun | $\rho(a) = a$ |
| $a$ izole | $\rho(a) < a < \sigma(a)$ |
| $a$ yoğun | $\rho(a) = a = \sigma(a)$ |

2.1. Şekil Noktaların Şematik Sınıflandırılması




Son olarak, $\mu\colon\ \mathbb{T} \to [0, \infty)$ aralığında $\mu(\mathrm{t}) \coloneqq \sigma(\mathrm{t}) - \mathrm{t}$ ile tanımlanan $\mu(\mathrm{t})$ fonksiyonu granül (tanecik) fonksiyonu olarak adlandırılır. Sınıflandırmak için çizelge 2.1 'e ve $\mathbb{T}$ ' nin noktalarının şematik sınıflandırılması için şekil 2.1'e bakınız. $\mathrm{t} \in \mathbb{T}$ iken yukarıdaki tanımda $\sigma(\mathrm{t})$ ve $\rho(\mathrm{t})$ 'nin her ikisininde $\mathbb{T}$ 'de olduğuna dikkat edelim. Bunun nedeni $\mathbb{T}$ 'nin $\mathbb{R}$'nin kapalı bir alt kümesi olduğunu varsaymamızdandır. Aşağıda $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesini tanımlayalım ve hangi durumlarda $\mathbb{T}$ zaman skalasını sağladığına bakalım. $\mathbb{T}$ sol saçılımlı bir m maksimum noktasına sahipse o zaman $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T} - \{m\}$ dir. Aksi halde $\mathbb{T}^{\kappa} = \mathbb{T}$ olur [2].

Özetle;

$$\mathbb{T}^{\kappa} = \begin{cases} \mathbb{T} \setminus (\rho(\sup \mathbb{T}), \sup \mathbb{T}\,] & , \text{eğer } \sup \mathbb{T} < \infty \\ \mathbb{T} & , \text{eğer } \sup \mathbb{T} = \infty \end{cases}$$

Son olarak, eğer $f\colon \mathrm{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ise $f^{\sigma}\colon \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ ve her $t \in \mathbb{T}$ için $f^{\sigma}(t) = f(\sigma(t))$ fonksiyonu tanımlayacağız.

*Örnek*

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ örneklerini kısaca inceleyelim.

(i) $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$$\sigma(a) = \inf\{s \in \mathbb{R} : s > a\} = \inf(a, \infty) = a$$

ve benzer şekilde

$$\rho(a) = \sup\{s \in \mathbb{R} : s < a\} = \sup(-\infty, a) = a$$

olur. Dolayısıyla her $a \in \mathbb{R}$ için yoğundur.

Granül fonksiyonu $\mu$ ise her $w \in \mathbb{R}$ için $\mu(w) = \sigma(w) - w = w - w = 0$ bulunur.

(ii) $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise herhangi bit $a \in \mathbb{Z}$ için

$$\sigma(a) = \inf\{f \in \mathbb{Z} : f > a\} = \inf(a+1, a+2, a-3, \dots) = a+1$$

ve benzer şekilde

$$\rho(a) = \sup\{f \in \mathbb{Z} : f < a\} = \sup(\dots, a-3, a-2, a-1) = a-1$$

olur.

Dolayısıyla her $a \in \mathbb{Z}$ için izole noktadır.

Granül fonksiyonu $\mu$ ise her $a \in \mathbb{Z}$ için $\mu(a) = \sigma(a) - a = a + 1 - a = 1$ bulunur. Granül fonksiyonu olan $\mu$, bu durumda her $a \in \mathbb{Z}$ için $\mu(a) = 1$ olacaktır. Her iki durumda da granül fonksiyonu sabit fonksiyondur.

Aşağıda görüleceği üzere granül fonksiyonu zaman skalasındaki analizlerde merkezi bir rol oynamaktadır. Genel durum için bir çok formülün $\mu(a)$ faktörünü içeren bir terimi olacaktır. Bu terim $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ 'de $\mu(a) = 1$ olur. Bununla birlikte $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ olması durumunda bu terim $\mu(a) = 0$ olduğundan kaybolmaktadır. Çeşitli durumlarda bu gerçek sürekli ve ayrık durumlar arasındaki farkın sebebidir.

Çizelge 2.2 de zaman skalasına örnekler verilmiştir. Burada farklı zaman skalası alındığında, buna karşılık $\mu(t)$ granül fonksiyonu, $\sigma(\mathrm{t})$ ileri fark operatörü ve $\rho(t)$ geri fark operatörü hesaplanmıştır. Çizelge 2.2 de zaman skalasını farklı kümeler aldığımızda ileri fark, geri fark ve granül fonksiyonlarının nasıl değiştiğini daha iyi anlayabiliriz.

2.2. Çizelge Zaman skalasına örnekler

| $\mathbb{T}$ | $\mu(t)$ | $\sigma(t)$ | $\rho(t)$ |
|---|---|---|---|
| $\mathbb{R}$ | 0 | t | t |
| $\mathbb{Z}$ | 1 | t+1 | t-1 |
| $h\mathbb{Z}$ | h | t+h | t-h |
| $q^{\mathbb{Z}}$ | (q-1)t | qt | t⁄q |
| $2^{\mathbb{N}}$ | T | 2t | t⁄2 |
| $\mathbb{N}_0^2$ | $2\sqrt{t}+1$ | $(\sqrt{t}+1)^2$ | $(\sqrt{t}-1)^2$ |

*Örnek*

$\mathbb{T}=\{\mathrm{a}^{-1}: \mathrm{a} \in \mathrm{N}\} \cup \{0\}$ kümesi için

$\sigma(\mathrm{a}) = \inf\{\mathrm{c} \in \mathbb{T} : \mathrm{c} > \mathrm{a}^{-1}\} = \inf\left\{\frac{1}{\mathrm{a}-1}, \dots\dots, 1\right\} = \frac{1}{\mathrm{a}-1}$

$\rho(\mathrm{a}) = \sup\{\mathrm{s} \in \mathbb{T} : \mathrm{s} < a^{-1}\} = \sup\{0, \dots., (\mathrm{a}+2)^{-1}, (\mathrm{a}+1)^{-1}\} = (\mathrm{a}+1)^{-1}$

ve granül fonksiyon

$$\mu(\mathrm{a}) = \mathrm{a}(\mathrm{a}-1)^{-1} - \mathrm{a} = \frac{\mathrm{a}^2}{1-\mathrm{a}}$$

elde edilir.

*Örnek*

$\mathbb{T}=\left\{\frac{\mathrm{a}}{2} : \mathrm{a} \in \mathrm{N}_0\right\}$ kümesi için

$\sigma(\mathrm{t}) = \inf\left\{\mathrm{s} \in \mathbb{T} : \mathrm{s} > \frac{\mathrm{a}}{2}\right\}$

$= \inf\left\{\frac{\mathrm{a}+1}{2}, \frac{\mathrm{a}+2}{2}, \dots\right\} = \frac{\mathrm{a}+1}{2}\left(\frac{1}{\mathrm{a}} = \mathrm{t}\right) = \mathrm{t} + \frac{1}{2}$

$$\rho(t) = \sup\left\{s \in \mathbb{T} : s < \frac{a}{2}\right\} = \sup\left\{0, \dots, \frac{a}{2} - 1, \frac{a}{2} - \frac{1}{2}\right\} = \frac{a-1}{2}\left(\frac{1}{a} = t\right) = t - \frac{1}{2}$$

dir. Granül fonksiyon,

$$\mu(t) = t + \frac{1}{2}$$

bulunur.

*Örnek*

$\mathbb{T} = \{\sqrt{n} : n \in N_0\}$ kümesi için,

$\sigma(t) = \inf\{s \in \mathbb{T} : s > \sqrt{n}\} = \inf\{\sqrt{n+1}, \sqrt{n+2}, \dots\} = \sqrt{n+1}\,(\sqrt{n} = t) = \sqrt{t^2+1}$

$\rho(t) = \sup\{s \in \mathbb{T} : s < \sqrt{n}\} = \sup\{\dots, \sqrt{n-2}, \sqrt{n-1}\} = \sqrt{n-1}(\sqrt{n}=t)=\sqrt{t^2-1}$

ve granül fonksiyon

$$\mu(t) = \sqrt{t^2+1} - t$$

bulunur.

*Örnek*

$b \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\sigma(\rho(b)) = b$, $\rho(\sigma(b)) = b$ durumlarına örnekler verelim.

(i) $\mathbb{T} = \{2^n : n \in Z\} \cup \{0\}$ örneği için,

$$\sigma(t) = 2t \text{ ve } \rho(t) = \frac{t}{2}$$

ise

$$\rho(\sigma(0)) = \rho(0) = 0, \quad \sigma(\rho(0)) = \rho(0) = 0$$

bulunur.

(ii) $\mathbb{T} = \{\sqrt[3]{n} : n \in Z\} \cup \{0\}$ örneği için,

$$\sigma(t) = \sqrt[3]{t^3+1}, \text{ve } \rho(t) = \sqrt[3]{t^3-1}$$

ise

$$(\rho(\sigma(t)) = \rho\left(\sqrt[3]{t^3+1}\right) = t, \sigma(\rho(t)) = \sigma\left(\sqrt[3]{t^3-1}\right) = t$$

bulunur.

(iii) $\mathbb{T} = [0,2] \cup \{3,4,5\}$ örneği için,

a) $\rho(\sigma(3)) = \rho(4) = 4, \quad \sigma(\rho(3)) = \sigma(2) = 3$

b) $\rho(\sigma(2)) = \rho(3) = 2, \quad \sigma(\rho(2)) = \sigma(2) = 3$

buradan eğer, nokta soldan ve sağdan aynı karekterli ise $\sigma(\rho(t)) = \rho(\sigma(t))$ soldan ve sağdan farklı karekterli ise $\sigma(\rho(t)) = \rho(\sigma(t))$ bulunur.

*Örnek*

$\mathbb{T} = \{t_1, t_2, \dots, t_n\}$ olsun.

$$\sum_{t\in\mathbb{T}} \mu(t) = \sum_{j=1}^{n} \mu(t_j) = \sum_{j=1}^{n} (\sigma(t_j) - t_j) = \sum_{j=1}^{n} (t_{j+1} - t_j)$$

$$=(t_2 - t_1)+(t_3 - t_2) + \cdots + (t_j - t_{j-1}) + (t_{j+1} - t_j) = t_{j+1} - t_1$$

2.1. Teorem (Tümevarım ilkesi )

$t_0 \in T$ olsun ve kabul edelim ki

$$\{S(t): t \in [t_{0,\infty})\}$$

ailesi aşağıdaki maddeleri sağlayan ifadelerin bir ailesi olsun,

(i) $S(t_0)$ ifedesi doğrudur.

(ii) $t \in [t_{0,\infty})$ noktası sağ-saçılımlı ve $S(t)$ ifadesi doğru ise $S(\sigma(t))$ ifadesi de doğrudur.

(iii) $t \in [t_{0,\infty})$ noktası sağ-yoğun ve $S(t)$ ifadesi doğru ise, o zaman t noktasının bir U komşuluğu vardır ki ,$\forall s \in U \cap (t, \infty)$ için S(s) ifadesi doğrudur.

(iv) $t \in [t_{0,\infty})$ noktası sol-yoğun ve $\forall s \in [t_0, t)$ için S(s) ifadesi doğru ise, S(t) ifadesi de doğrudur.

(v) Bu durumda S(t) ifadesi $t \in [t_{0,\infty})$ için doğrudur.

# 3. DELTA TÜREV VE TÜREVLENEBİLİRLİK

## 3.1. Türevlenebilirlik

3.1. Tanım

f: $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyon verilsin ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Verilen bir $\varepsilon>0$ sayısı için t'nin bir U komsuluğu (yani bazı $\delta>0$ için $U=(t-\delta,t+\delta)\cap \mathbb{T}$) olacak şekilde) komşuluğu var ve her

$s \in U$ için;

$$|[f(\sigma(t))-f(s)]- f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

eşitsizliğini sağlayan $f^{\Delta}(t)$'ye f'nin t'deki delta (veya Hilger) türevi olarak adlandırırız.

*Örnek*

Eğer f: $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)=a$ ise $f^{\Delta}(t)\equiv 0$ olur. Burada $a \in R$ sabittir. Gerçekten her $\varepsilon>0$ ve $s \in \mathbb{T}$ için,

$$|f(\sigma(t))-f(s)-0.(\sigma(t)-s)|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olması sebebiyle doğrudur. Yani sabitin türevi 0 dır.

*Örnek*

Eğer f: $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $t \in \mathbb{T}$ için $f(t)=t$ ise $f^{\Delta}(t)\equiv 1$ olur. Gerçekten her $\epsilon>0$ ve her $s \in \mathbb{T}^{K}$ için;

$$f(\sigma(t))-f(s)-1.(\sigma(t)-s)|=|\sigma(t)-s-(\sigma(t)-s)|=0\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

olması sebebiyle doğrudur.

*Örnek*

f: $\mathbb{T}\rightarrow \mathbb{R}$, $f(t)= t^2$ olarak tanımlanan fonksiyonun $\forall t \in \mathbb{T}$ için delta türevini bulalım.

$\forall \in>0$, $\forall \in(t-\varepsilon,t+\varepsilon)$, $\sigma(t)\neq 0$ için

$$|f(\sigma(t))-f(s)- f^{\Delta}(t).[(\sigma(t)-s)]| = |(\sigma^2(t)-s^2)- f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-s)|\leq \varepsilon\, |\sigma(t)-s|$$

$$=|\sigma(t)-s|.|(\sigma(t)-s)- f^{\Delta}(t)|\leq \varepsilon\, |\sigma(t)-s|$$

$$=|(\sigma(t)\text{-}s)\text{-}\ f^{\Delta}(t)|\leq \varepsilon$$

dir. ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan mutlak değer özelliğinden $f^{\Delta}(t)=\sigma(t)+t$ olarak bulunur.

3.1. Teorem

Kabul edelim ki; $f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. O zaman aşağıdakiler geçerlidir:

(i) f fonksiyonu bir t noktasında türevi var ise f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

(ii) f fonksiyonu bir t noktasında sürekli ve t noktası sağ saçılımı ise f fonksiyonu t noktasında türevlenebilirdir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

sağlanır.

(iii) t sağ yoğun olmak üzere f fonksiyonunun t noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{z\rightarrow y} \frac{f(y) - f(z)}{y - z}$$

limitinin var olmasıdır. Bu durumda

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s\rightarrow t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

dir.

(iv) Eğer f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ise

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$$

elde edilir.

*İspat*

(i) f fonksiyonu t noktasından türevlenebilir ve $\varepsilon \epsilon\ (0,1)$ olsun.

$$\varepsilon^{*} = \varepsilon\left[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)\right]^{-1},\ \varepsilon^{*} \epsilon\ (0.1)$$

olarak tanımlansın.

$$\left|f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon^{*}|\sigma(t) - s|$$

olacak şekilde t noktasının bir U komşuluğu vardır. Böylece her $s \in U \cap (t - \varepsilon^{*}, t + \varepsilon^{*}\ )$ için

$$|f(t) - f(s)| = \left| \begin{array}{l} \{f(\sigma(t)) - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\} - \\ \{f(\sigma(t)) - f(t) - \mu(t)f^{\Delta}(t)\} + (t - s)f^{\Delta}(t) \end{array} \right|$$

$$\leq \varepsilon^*|\sigma(t) - s| + \varepsilon^*\mu(t) + |t - s|f^{\Delta}(t)$$

$$\leq \varepsilon^*|\mu(t) + |t - s| + \mu(t) + |f^{\Delta}(t)||$$

$$\leq \varepsilon^*\left[1 + \left|f^{\Delta}(t)\right| + 2\mu(t)\right]$$

$$= \varepsilon$$

elde edilir . Bu f fonksiyonun t noktasında sürekli olduğu sonucunu verir.

(ii) f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t noktasında sağdan saçılımlı olsun. Süreklilik tanımından

$$\lim_{s\to t} \frac{f(\sigma(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} = \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\sigma(t) - t} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

yazılır . $\varepsilon > 0$ *için* t nin öyle bir U komşuluğu bulunabilir, öyle ki

$$\left|\frac{f(\sigma(t) - f(s)}{\sigma(t) - s} = -\frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right| \leq \varepsilon$$

olur. Her $s \in U$ için

$$\left|[f(\sigma(t) - f(s)] - \frac{f(\sigma(t) - f(t)}{\mu(t)}[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

elde edilir. Böylece;

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}$$

elde edilir.

(iii) f fonksiyonu t noktasında türevlenebilir ve t noktasında sağdan yoğun olsun.

Bu taktirde $\varepsilon > 0$ *için için t nin öyle bir U komşuluğu bulunabilir, öyle ki her s* $\in$ *U için,*

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - f(s) - f^{\Delta}(t)[\sigma(t) - s]\right| \leq \varepsilon|\sigma(t) - s|$$

yazılabilir. $\sigma(t) = t$ olduğundan ,

$$\left|[f(t) - f(s)] - f^{\Delta}(t)[t - s]\right| \leq \varepsilon|t - s|, \qquad \forall s \in U$$

$$\left|\frac{f(t) - f(s)}{t - s} - f^{\Delta}(t)\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Böylece aranan $s \in U, s \neq t$ için

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

olur.

(iv) Eğer $\sigma(t) = t$ ise bu takdirde $\mu(t) = 0$ ve

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

yazılır.

Diğer taraftan eğer $\sigma(t) > t$ *ise* ; (ii) nin yardımıyla

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = f(t) + \mu(t) f^{\Delta}(t)$$

elde edilir [2].

*Örnek*

$\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ durumlarını inceleyelim.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise teorem 3.2 (iii) den dolayı $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f'(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s}$$

limiti sonlu olmak üzere mevcut ise

$$f^{\Delta}(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} = f'(t)$$

olur.

(ii) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise teorem 3.2 (iii) den dolayı $f: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ delta türevlenebilir ve

$$f^{\Delta}(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} = \frac{f(t+1) - f(t)}{1} = f(t+1) - f(t) = \Delta f$$

elde edilir.

*Örnek*

$h > 0$ ve $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk : k \in \mathbb{Z}\}$ olsun.

Bu durumda $t \in \mathbb{T}$ olmak üzere $\sigma(t) = \inf\{ s \in \mathbb{T} : s > t \}$ ve $\inf \{t + nh : n \in N \} = t + h$ olur.

Benzer biçimde $\rho(t) = t - h$ şeklindedir. Her $t \in \mathbb{T}$ noktası izole noktadır ve her $t \in \mathbb{T}$ için $\mu(t) = \sigma(t) - t = t + h - t = h$ dır. Böylece $\mu$ sabit olur.

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu ve her $t\epsilon\mathbb{T}$ için

$$f^{\Delta}(t)=\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}=\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

dir. Buradan

$$f^{\Delta\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(\sigma(t))-f^{\Delta}(t)}{\mu(t)}$$

$$=\frac{f^{\Delta}(t+h)-f^{\Delta}(t)}{h}$$

$$=\frac{\frac{f(t+2h)-f(t+h)-f(t+h)+f(t)}{h}}{h}$$

$$=\frac{f(t+2h)-f(t+h)-f(t+h)+f(t)}{h^2}$$

$$=\frac{f(t+2h)-2f(t+h)+f(t)}{h^2}$$

elde edilir. $f^{\Delta^n}(t)$ türevi benzer şekilde elde edilir.

Benzer şekilde; her $n\epsilon N_0$ için $\sigma^n(t)=t+nh$ ve $\rho^n(t)=t-nh$ olur. Şimdi $\Delta_h=\frac{1}{h}(\sigma-I)$ operatörü tanımlansın. Burada I , birim operatörüdür.

$\Delta_h$ operatörünün n-inci kuvvetini elde etmek için, binom teoreminin operatör versiyonu kullanılırsa

$$\Delta_h^n=\frac{1}{h^n}(\sigma-1)^n=\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\sigma^k(-I)^{n-k}$$

elde edilir. Elde edilen operatöre uygulanırsa

$$f^{\Delta^n}(t)=h^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}(-1)^{n-k}f(t+kh)$$

elde edilir [2].

3.2. Teorem

Kabul edelim ki;

f,g : $\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $t \in \mathbb{T}^K$ noktasında türeve sahip olsunlar. O zaman, aşağıdakiler geçerlidir:

(i) $f + g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ toplamı t noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t) + g^{\Delta}(t)$$

dır.

(ii) $\forall\Theta$ sabiti için $\Theta f : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu t de türevlenebilir ve

$$(\Theta f)^{\Delta}(t) = \Theta . f^{\Delta}(t)$$

dır.

(iii) $f.g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ çarpımı t noktasında türevlenebilir ve

$$(fg)^{\Delta}(t) = f^{\Delta}(t)g(t) + f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)$$

dır.

(iv) Eğer $f(t) . f(\sigma(t)) \neq 0$ ise, f/g de türevlenebilir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t) = \frac{f^{\Delta}(t).g(t) - f(t).g^{\Delta}(t)}{g(t).g(\sigma(t))}$$

dır [3].

*İspat*

f ve g fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^k$ noktasında delta türevlenebilir olduğunu kabul edelim.

(i) $\varepsilon > 0$ *olsun. Böylece burda t noktasının* $U_1$ ve $U_2$ komşulukları için ,

$$\left|f(\sigma(t)) - f(r) - f^{\Delta}(t)(\sigma(t) - r\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - r|, \qquad r \in U_1$$

$$\left|g(\sigma(t)) - g(r) - g^{\Delta}(t)(\sigma(t) - r\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t) - r| \qquad r \in U_2$$

yazılabilir. $U = U_1 \cap U_2$ olsun. $\forall r \in U$ için

$$\left|(f+g)\big(\sigma(t)\big)-(f+g)(r)-[f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)](\sigma(t)-r)\right|$$

$$=\left|(f\big(\sigma(t)\big)-f(r)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)+g\big(\sigma(t)\big)-g(r)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right|$$

$$\leq \left|(f\big(\sigma(t)\big)-f(r)-f^{\Delta}(t).(\sigma(t)-r\right|+\left|g\big(\sigma(t)\big)-g(r)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t)-r|+\frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t)-r|$$

$$=\varepsilon|\sigma(t)-r|$$

elde edilir.

$\varepsilon \in (0,1)$olsun.

$$\varepsilon^{*}=\varepsilon\left[1+|f(t)|+\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+g^{\Delta}(t)|\right]^{-1}$$

tanımlansın. Böylece $\varepsilon^{*} \in (0,1)$ ve burada t noktasının $U_1$ve $U_2$ komşulukları için

$$\left|f(\sigma(t)-f(r)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r\right|\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|, \qquad r\in U_1$$

$$\left|g(\sigma(t)-g(r)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right|\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|, \qquad r\in U_2$$

yazılabilir. Teorem 3.1 (i) den dolayı $\forall r\in U_3$ için $|f(t)-f(r)|\leq \varepsilon^{*}$

şeklindedir. U=$U_1\cap U_2\cap U_3$ olsun. $r\in U$ için

$$\left|(fg)\big(\sigma(t)\big)-(fg)(r)-\left[f^{\Delta}(t)g\big(\sigma(t)\big)+f(t)g^{\Delta}(t)\right](\sigma(t)-r)\right|$$

$$\left|\left[f\big(\sigma(t)\big)-f(r)-f^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right]g\big(\sigma(t)\big)+\left[g\big(\sigma(t)\big)-g(r)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right]f(t)\right.$$

$$+\left[g\big(\sigma(t)\big)-g(r)-g^{\Delta}(t)(\sigma(t)-r)\right][f(r)-f(t)]+\sigma(t)-r)g^{\Delta}(t)[f(r)-f(t)]$$

$$\leq \varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|\left|g\big(\sigma(t)\big)\right|+\varepsilon^{*}|\sigma(t)-s||f(t)|+\varepsilon^{*}\varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|+\varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|\left|g^{\Delta}(t)\right|$$

$$=\varepsilon^{*}|\sigma(t)-r|\left[|g(\sigma(t))|+|f(t)|+\varepsilon^{*}+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$$

$=\varepsilon^*|\sigma(t)-r|\left[1+|(f(t)|+|g(\sigma(t))|+\left|g^{\Delta}(t)\right|\right]$

$=\varepsilon|\sigma(t)-r|.$

dir.

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\left(f\frac{1}{g}\right)^{\Delta}(t)$$

$$=f(t)(\frac{1}{g})^{\Delta}(t)+f^{\Delta}\frac{1}{g(\sigma(t))}$$

$$=-f(t)=\frac{g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\sigma(t)\big)}+f^{\Delta}(t)\frac{1}{g\big(\sigma(t)\big)}$$

$$=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g\big(\sigma(t)\big)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

3.3. Teorem

$\Theta$ bir sabit ve $k\in\mathbb{N}$ olsun.

(i) $f(t)=(t-\Theta)^k$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$f^{\Delta}(t)=\sum_{v=0}^{k-1}(\sigma(t)-\Theta)^{v}(t-\Theta)^{k-1-v}$$

(ii) $g(t)=\frac{1}{(t-\Theta)^k}$

şeklinde tanımlı bir fonksiyon için,

$$g^{\Delta}(t)=-\sum_{v=0}^{k-1}\frac{1}{(\sigma(t)-\Theta)^{k-v}(t-\Theta)^{v+1}},\quad(\sigma(t)-\Theta)(t-\Theta)\neq 0$$

eşitlikleri doğrudur.

3.2. Tanım

$f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer $f^{\Delta}$ fonksiyonu $\mathbb{T}^{k^2} = (\mathbb{T}^{k})^{k}$ kümesindede türevlenebilir ise f fonksiyonunun ikinci türevi $f^{\Delta\Delta} = (f^{\Delta})^{\Delta}: \mathbb{T}^{k^2} \to R$ şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde n. mertebeden türev $f^{\Delta^n} : \mathbb{T}^{k^2} \to \mathbb{R}$ biçiminde tanımlanır. Gösterim olarak, $\sigma^2(t) = \big(\sigma(t)\big)$ ve $\rho^2(t) = \rho(\rho(t))$ yazılabilir. Sonuç olarak $\forall\, n \in \mathbb{N}_0$ için $\sigma^n(t) = t + nh$ ve $\rho^n(t) = t - nh$ olur. Ayrıca $\rho^0(t) = \sigma^0$ (t)=t dir [2].

*Örnek*

Genel olarak f ve g fonksiyonu iki kez türevlenebilir fakat fg fonksiyonu iki kere türevlenemez.

$$(fg)^{\Delta} = f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta}$$

yazılabilir. İkinci türev alınırsa

$$((fg)^{\Delta})^{\Delta} = (f^{\Delta}g + f^{\sigma}g^{\Delta})^{\Delta} = f^{\Delta\Delta}g + f^{\Delta^{\sigma}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\Delta}}g^{\Delta} + f^{\sigma^{\rho}}g^{\Delta\Delta}$$

$$= f^{\Delta\Delta}g + (f^{\Delta\sigma} + f^{\sigma\Delta})g^{\Delta} + f^{\sigma\sigma}g^{\Delta\Delta}$$

elde edilir. Burada $f^{\Delta^{\sigma}} = f^{\Delta\sigma}$ şeklindedir.

3.4. Teorem (Leibniz Formülü)

$S_k^{(n)}$ k tane σ ve n-k tane Δ içeren, n uzunlugunaki mümkün olan tüm dizilerden oluşan bir küme olsun. Eğer her $\Lambda \in S_k^{(n)}$ için $f^{\Lambda}$ mevcut ise, $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$(fg)^{\Delta^n} = \sum_{k=0}^{n} \left[ \sum_{\Lambda \in_k^{(n)}} f^{\Lambda} \right] g^{\Delta^k}$$

eşitliğine Leibniz formülü denir [3].

Aşağıda 3.1 çizelgesinde zaman skalasına ait değişik örnekler verilmiştir. Zaman skalasını farklı aldığımızda, bu zaman skalasına karşılık gelen granül fonksiyon, ileri ve geri sıçrama operatörleri hesaplanmıştır.

3.1. Çizelge

| | $\mathbb{T}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Z}$ |
|---|---|---|---|
| İLERİ SIÇRAMA | $\sigma(\Theta)$ | $\Theta$ | $\Theta+1$ |
| GERİ SIÇRAMA | $\rho(\Theta)$ | $\Theta$ | $\Theta-1$ |
| GRANÜL | $\mu(\Theta)$ | 0 | 1 |
| TÜREV | $f^{\Delta}(\Theta)$ | $f'(\Theta)$ | $\Delta f(\Theta)$ |

# 4. DELTA İNTEGRAL

## 4.1 rd-Süreklilik ve Özellikleri

4.1. Tanım

Bir f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sağ yoğun noktalarındaki sağdan limiti var (sonlu) ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti var (sonlu) ise f fonksiyonuna düzenlidir denir [2].

4.2. Tanım

Bir f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sağ yoğun noktalarında sürekli ve sol yoğun noktalarındaki soldan limiti var ise f fonksiyonuna rd-sürekli denir.

f : $\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ şeklindeki rd-sürekli fonksiyonların kümesi $C_{rd}$ ($\mathbb{T}$ , $\mathbb{R}$) ile gösterilir [2].

4.3. Tanım

Bir f :$\mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu, bir D ⊂ $\mathbb{T}^{\kappa}$ bölgesi için, her t ∈D noktalarında türevlenebilir ve $\mathbb{T}^{\kappa}\backslash D$ bölgesi sağ saçılımlı nokta içermeyen sayılabilir bir küme ise f fonksiyonuna D bölgesinde ön-türevlenebilir denir [2].

4.1. Teorem

f: $\mathbb{T} \to$ R olsun. Bu durumda

(i) f sürekli ise rd-süreklidir.

(ii) f rd-sürekli ise düzenlidir.

(iii) σ operatörü rd-süreklidir.

(iv) f rd-sürekli veya düzenli ise $f^{\sigma}$ da öyledir.

(v) f sürekli olsun. g: $\mathbb{T} \to$ R fonksiyonu rd-sürekli veya ise fog da öyledir[3].

4.2. Teorem

Kapalı aralıkta her düzenli fonksiyon sınırlıdır [2].

*İspat*

Kabul edelim ki $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırsız olsun. Yani her $n \epsilon n$ için $t_n \in [a. b]$ ve $|f(t_{n)}| > n$ olsun. $\{t_n : n \in n\} \subset [a. b]$ olduğundan $\{t_{n_k}\}_{k \in n}$ yakınsak bir alt dizi vardır. Yani en az bir $t_0 \in [a. b]$ vardır ki,

$$\lim_{k\to\infty} t_{n_k} = t_0$$

dır. $\{t_{n_k} : k \in n\} \subset \mathbb{T}$ ve $\mathbb{T}$ kapalı olduğundan $t_0 \in t$ dir. Bu durumda $t_0$ noktası izole olamaz. $t_0$ noktasına yukarıdan yada aşağıdan yaklaşan bir alt dizi vardır. Her iki durumda da düzgünlükten dolayı, $t \to t_0$ iken f(t) nin limiti sonlu olmalıdır ki bu bir çelişkidir [2].

4.3. Teorem (Ortalama değer teoremi )

f ve g fonksiyonları $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyon olsun. Her iki fonksiyon D türevlenebilir bölgesinde ön türevlenebilir olsun. O zaman her $t \epsilon D$ için

$$|f^{\Delta}(t)| \leq g^{\Delta}(t)$$

ise, r≤s olmak üzere $\forall\, r, s \epsilon\, \mathbb{T}$ için

$$|f(s) - f(r)| \leq g(s) - g(r)$$

sağlanır [2].

*İspat*

$r, s \in t$ ve $r \leq s$ olsun. $[r, s)\backslash D = \{t_n : n \in n\}$ ile gösterelim ve $\varepsilon > 0$ *olsun.*

Şimdi tümevarımı kullanarak, $\forall\, t \in [r, s]$için,

$$S(t): |f(t) - f(r)| \leq g(t) - g(r) + \varepsilon\left[\sum_{t_n < t} 2^{-n}\right]$$

olduğunu göstereceğiz. Bunu göstererek ortalama değer teoremini ispatlamış oluruz.

Şimdi 2.1. Teorem ile verilen tümevarım prensibininin dört koşulunu kontrol edelim

(i) Aşikar olarak S(r) ifadesi doğrudur.

(ii) t sağ saçılımlı olsun ve S(t) doğru olsun. Bu durumda

$$|f(\sigma(t)) - f(r)| = |f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t) - f(r)|$$

$$\leq \mu(t)|f^{\Delta}(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \mu(t)g^{\Delta}(t) + g(t) - g(r) + \varepsilon\left[t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

$$= g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left[t - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}\right]$$

$$< g(\sigma(t)) - g(r) + \varepsilon\left[t - r + \sum_{t_n<\sigma(t)} 2^{-n}\right]$$

olup $S(\sigma(t))$ doğrudur [2].

(i) t=s sağ yoğun noktada S(t) doğru olsun ($\sigma(t) = t$). İki durum da göz önüne alalım. Yani $t \in D$ ve $t \notin D$ için.

İlk önce $t \in D$ olsun. Bu durumda f ve g, t de diferensiyellenebilirdirler. Bundan dolayı bir U komşuluğu vardır, öyle ki; her $r \in U$ için,

$$|f(t) - f(r) - f^{\Delta}(t)(t - r)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - r|$$

ve

$$|g(t) - g(r) - g^{\Delta}(t)(t - r)| \leq \frac{\varepsilon}{2}|t - r|$$

dır . Böylece,

$$|f(t) - f(r)| \leq \left[|f(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right]|t - r|$$

ve

$$g(r) - g(t) - g^{\Delta}(t)(r - t) \geq -\frac{\varepsilon}{2}|t - r|$$

dır. Bu durumda her $r \in U \cap (t, \infty)$ için

$$|f(r) - f(r)| \leq |f(r) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \left[f^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right]|t - r| + |f(t) - f(r)| \leq \left[g^{\Delta}(t) + \frac{\varepsilon}{2}\right]|t - r| + g(t) - g(r)\varepsilon\left[t - r\sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

$$= g^{\Delta}(t)(r - t) + \frac{\varepsilon}{2}(r - t) + g(f) - g(r) + \varepsilon(t - r) + \varepsilon\sum_{t_n<t} 2^{-n}$$

$$\leq g(r) - g(t) + \frac{\varepsilon}{2}|r - t| + \frac{\varepsilon}{2}(r - t) + g(t) - g(r) + g(t - r) + \varepsilon\sum_{t_n<t} 2^{-n}$$

$$= g(t) - g(r) + \varepsilon\left[t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

olup S(t) ifadesi her $r \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

Şimdi ikinci durum olarak $t \notin D$ olsun. Bu durumda bazı $m \in n$ için $t = t_n$ olur.

f ve g ön − diferensiyellenebilir olduklarından bir U komşuluğu vardır ,

öyle ki ; $\forall\ r \in U$ için ,

$$|f(r) - f(t)| \leq \frac{g}{2} 2^{-m}$$

ve

$$|g(r) - g(t)| \leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

dir. Bundan dolayı,

$$g(r) - g(t) \geq -\frac{\varepsilon}{2} 2^{-m}$$

olur. Bunları kullanarak,

$$|f(r) - f(r)| \leq |f(r) - f(t)| + |f(t) - f(r)|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} + g(t) - g(r) + \varepsilon\left[t - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} + g(r) + \frac{\varepsilon}{2} 2^{-n} - g(r) + \varepsilon\left[r - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

$$= \varepsilon 2^{-m} + g(r) - g(r) + \varepsilon\left[r - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

$$= g(r) - g(r) + \varepsilon\left[r - r + \sum_{t_n<t} 2^{-n}\right]$$

elde edilir ki S(r), her $r \in U \cap (t, \infty)$ için doğrudur.

(i) t sol yoğun olsun ve her $r < t$ *için* $S(r)$ doğru olsun. Bu durumda

$$\lim_{r \to f} |f(r) - f(r)| \leq \lim_{r \to f}\left\{g(t) - g(r) + \varepsilon\left[r - r + \sum_{t_{n<r}} 2^{-n}\right]\right\}$$

$$\leq \lim_{r \to f} \left\{ g(r) - g(r) + \varepsilon \left[ r - r + \sum_{t_{n<r}} 2^{-n} \right] \right\}$$

olup S(t) doğrudur [2].

4.4. Teorem

f düzenli olsun. Bu takdirde her $t \in D$ için D türevlenebilir bölgesiyle ön-türevlenebilir ve $F^{\Delta}(t) = f(t)$ olacak biçimde bir F fonksiyonu vardır [2].

4.4. Tanım

$f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu düzenli olsun. O zaman, Teorem 4.2. deki gibi olan her F fonksiyonuna f nin ön-antitürevi denir. Bu durumda, c keyfi bir sabit ve F; f nin ön-antitürevi olmak üzere,

$$\int f(\eta)\Delta\eta = F(\eta) + c$$

şeklinde tanımlanan ifadeye düzenli f fonksiyonunun belirsiz integrali denir. Cauchy integrali ise,

$$\int_y^s f(\eta)\Delta\eta = F(s) - F(y) \quad \forall y, s \in \mathbb{T}$$

ile tanımlıdır [2].

*Örnek*

$\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ve b sabit olmak üzere $b \neq 1$ olsun.

$$\left(\frac{b^t}{b-1}\right)^{\Delta} = \Delta\left(\frac{b^t}{b-1}\right) = \frac{b^{t+1} - b^t}{b-1} = b^t$$

olduğundan

$$\int b^t \Delta t = \frac{b^t}{b-1} + c$$

elde edilir. Burada c keyfi bir sabittir.

4.5. Teorem

Her rd-sürekli fonksiyonun bir anti-türevi vardır. Özel olarak, bir $t_0 \in \mathbb{T}$ ve her $b \in \mathbb{T}$ için

$$F(b) = \int_{t_0}^{b} f(\tau)\Delta\tau$$

ile tanımlı F(b) fonksiyonu, f(b) fonksiyonunun anti-türevidir [2].

*İspat*

f rd-sürekli olsun teorem 4.1. (ii) den dolayı f düzenlidir. 4.4 teoreminden dolayı ön-antitürevi vardır. $F(t_0) \neq t_0$ olsun ve her $t \in D$ için $F^{\Delta}(t)f(t)$ olsun. Yani F fonksiyonu D de ön-diferensiyellenebilir olsun. Her $t \in \mathbb{T}^k$ için $F^{\Delta}(t)=f(t)$ olduğunu gösterelim. ($\mathbb{T}^k \backslash D \subset \mathbb{T}^k$ dır.)

Bu durumda t sağ-yoğundur. Çünki $\mathbb{T}^k \backslash D$ de sağ saçılımlı nokta yoktur. F rd-sürekli olduğundan, t de süreklidir. $\varepsilon > 0$ *olsun* ve bu durumda bir U komşuluğu vardır öyle ki, her $s \in U$ için,

$$|f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Şimdi $\tau \epsilon t$ için

$$h(\tau) = F(\tau) - f(t)(\tau - t_0)$$

tanımlayalım. Bu durumda h; D de ön-diferenseyellebilirdir. Bu durumda, $\tau \epsilon D$ için

$$h^{\Delta}(\tau) = F^{\Delta}(\tau) - f(t) = f(\tau) - f(t)$$

olup, her $s \in D \cap U$ için,

$$\left|h^{\Delta}(s)\right| = |f(s) - f(t)| \leq \varepsilon$$

olur. Bu yüzden

$$\mathrm{Sup}_{s \in D \cap U}\left|h^{\Delta}(s)\right| \leq \varepsilon$$

olur. Her $r \in U$ için,

$|F(t) - F(r) - f(t)(t - r)|$

$= |h(t) + f(t)(t - t_0) - [h(r) - f(t)(r - t_0)] - f(t)(t - r)|$

$= |h(t) - h(r)|$

$= \left\{\mathrm{Sup}_{s \in D \cap U}\left|h^{\Delta}(s)\right|\right\}|t - r|$

$\leq \varepsilon|t - r|$

olup F; t de diferensiyellenebilirdir ve $F^{\Delta}(t) = f(t)$ dir [2].

4.6. Teorem

$f \in C_{rd}$ ve $t \in \mathbb{T}$ ise;

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = \mu(t)f(t)$$

elde edilir [3].

*İspat*

4.5. Teoreminden dolayı f nin bir F antitürevi vardır ve,

$$\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta\tau = F(\sigma(t)) - F(t)$$
$$= \mu(t)F^{\Delta}(t)$$
$$= \mu(t)f(t)$$

olur [2].

4.7. Teorem

Eğer $f^{\Delta}(t) \geq 0$ ise, f fonksiyonu azalan değildir.

4.8. Teorem

a,b,c $\in \mathbb{T}$, a$\in \mathbb{R}$ ve f,g$\in C_{rd}$ olsun.

Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

(i) $\int_a^b (f(t) + g(t))\Delta t = \int_a^b f(t)\Delta t + \int_a^b g(t)\Delta t$

(ii) $\int_a^b a.f(t)\Delta t = a.\int_a^b f(t)\Delta t$

(iii) $\int_a^b f(t)\Delta t = -\int_b^a f(t)\Delta t$

(iv) $\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^e f(t)\Delta t + \int_e^b f(t)\Delta t$

(v) $\int_a^a f(t)\Delta t = 0$

(vi) $f(t) \geq 0$ise $\int_a^b f(t)\Delta t \geq 0$ dır.

(vii) $\int_c^d f(\sigma(t))g^{\Delta}(t) = (f.g)(d) - (fg)(c) - \int_c^d f^{\Delta}(t)g(t)\Delta t$ [3].

4.9. Teorem

$a, b \in \mathbb{T}$ ve $f \in C_{rd}$ olsun.

(i) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ise

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \int_a^b f(t)dt$$

dir. Burada sağdaki integral Riemann integralidir.

(ii) Eğer $[a, b]$ sadece izole noktaları içeriyorsa, bu taktirde

$$\int_j^p f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t\in[j,p[} \mu(t)f(t) & j < p \\ 0 & j = p \\ \sum_{t\in[p,j[} \mu(t)f(t) & j > p \end{cases}$$

(ii) Eğer $\mathbb{T} = h\mathbb{Z} = \{hk: k \in \mathbb{Z}\}, h > 0$ ise, böylece

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{k=\frac{a}{h}}^{\frac{a}{h}-I} f(kh)h & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{k=a/h}^{\frac{a}{h}-I} f(kh)h & a > b \end{cases}$$

(iv) Eğer $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ ise böylece

$$\int_a^b f(t)\Delta t = \begin{cases} \sum_{t=a}^{b-I} f(t) & a < b \\ 0 & a = b \\ -\sum_{t=a}^{b-I} f(t) & a < b \end{cases}$$

elde edilir [2].

4.5. Tanım

f fonksiyonu $[a,\infty)$ aralığında rd sürekli ve $a\epsilon\mathbb{T}, \sup\mathbb{T}=\infty$ ise genelleştirilmiş integrali

$$\int_a^{\infty} f(t)\Delta t := \lim_{n\to\infty}\int_a^{b} f(t)\Delta t$$

ile tanımlanır. Eğer limit varsa genelleştirilmiş integral yakınsaktır. Limit yoksa genelleştirilmiş integral ıraksaktır [3].

4.10. Teorem (Zincir kuralı)

$g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli ve $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ , $\mathbb{T}$ da diferensiyellenebilir foksiyon olsun. Ayrıca $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli diferensiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$(fog)^{\Delta}(t) = f^{'}(g(c)).g^{\Delta}(t)$$

olacak şekilde $[t,\sigma(t)]$ reel aralığında bir c noktası vardır [4].

4.11. Teorem ( Ara değer teoremi ).

$f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli, t,s $\in\mathbb{T}$ ve $t>s$ olmak üzere,

$$f(s)f(t)<0$$

sağlanıyorsa, bir $\Theta\in[s,t)$ için $f(\Theta)=0$ veya $f(\Theta)f(\sigma(\Theta))<0$ olur [4].

Aşağıda 4.1 çizelgesinde zaman skalasına ait değişik örnekler verilmiştir. Zaman skalasını farklı aldığımızda, bu zaman skalasına karşılık gelen integral durumları özetlenmiştir.

4.1 Çizelge

| | $\mathbb{T}$ | $\mathbb{R}$ | $\mathbb{Z}$ |
|---|---|---|---|
| İntegral | $\int_a^b f(t)\Delta t$ | $\int_a^b f(t)dt$ | $\sum_{t=a}^{b-1} f(t)$ |

# 5. BİRİNCİ MERTEBEDEN LİNEER DİNAMİK DENKLEMLER

## 5.1. Üstel Fonksiyon

5.1.Tanım

$h > 0$ olsun. Buna göre Hilger karmaşık sayılarını, Hilger eksenini, Hilger yedek eksenini ve Hilger sanal çemberini sıralı bir şekilde aşağıdaki gibi tanımlayabiliriz,

$$c_h = \left\{z \in c : \ z \neq -\frac{1}{h}\right\}$$

$$r_h = \left\{z \in c_h : \ z \in r, \ z > -\frac{1}{h}\right\}$$

$$A_h = \left\{z \in c_h : \ z \in r, \ z < -\frac{1}{h}\right\}$$

$$I_h = \left\{z \in c_h : \ \left|z + \frac{1}{h}\right| = \frac{1}{h}\right\}.$$

Burada $h = 0$ olursa $c_0 = c$, $r_0 = r$, $I_0 = ir$, $a_0 = \emptyset$ ile tanımlıdır. Aynı zamanda

$h > 0$ ve $z \in c_h$ olduğunda,

z' nin Hilger reel kısmı; $\mathrm{Re}_h\ (z) = \frac{|zh+1|-1}{h}$,

z' nin Hilger sanal kısmı; $\mathrm{Im}_h\ (z) = \frac{\mathrm{Arg}\,(zh+1)}{h}$

ile tanımlayabiliriz.

5.2. Tanım

$p: \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ için $1 + \mu(t)p(t) \neq 0$ sağlanıyorsa p fonksiyonuna regresiftir denir. Bütün regresif ve rd −sürekli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{R}(\mathbb{T})$ veya $\mathfrak{R}(\mathbb{T}, \mathbb{R})$ile gösterilir.

5.3. Tanım

Bütün regresif ve rd-sürekli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$, her $t \in \mathbb{T}^\kappa$ ve $p, q \in \mathfrak{R}$ için;

$$(p \oplus q)(t) \coloneqq p(t) + q(t) + \mu(t)p(t)q(t)$$

ile tanımlanan toplama $\oplus$ işlemi ''circle plus'' olarak adlandırılır, ve bu işlem altında regresif ve rd-sürekli fonksiyonlar ailesi $\mathfrak{R}$, Abelyen gruptur ve bu gruba regresif grup denir [3].

5.4. Tanım

Yukarıdaki tanımda $\oplus$ işlemi altında $p \in \Re$' nin toplamsal tersi;

$$\ominus\, p := -\frac{p(t)}{1+\mu(t)p(t)}$$

ile tanımlanır ve $\Re$' nin elemanıdır ve ayrıca her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için ve $p, q \in \Re$ için;

$$(p \ominus q)(t) := (p \oplus (\ominus\, q))(t)$$

ile tanımlanan ''circle minus'' çıkarma $\ominus$ işlemi de $\Re$' dedir.

5.5. Tanım

Zaman skalasında $p \in \Re$ olmak üzere her $t, s \in \mathbb{T}$ için;

$$e_p(t,s) = \exp\left[\int_s^t \xi_{\mu(t)}(p(\tau))\Delta\tau\right]$$

ile tanımlanan fonksiyona üstel fonksiyon denir.

5.1. Lemma

Eğer $p \in \Re$ ise her $m, n, t \in \mathbb{T}$ için

$$e_p(t,m)e_p(m,n) = e_p(t,n)$$

yarı grup özelliği sağlanır [3].

*İspat*

$p \in \Re$ ve her $m, n, t \in \mathbb{T}$ olsun. 5.4. Tanım' dan

$$e_p(t,m)e_p(r,n) = \exp\left[\int_m^t \xi_{\mu(t)}(p(\eta))\Delta\eta\right]\exp\left[\int_n^m \xi_{\mu(t)}(p(\eta))\Delta\eta\right]$$

$$= \exp\left[\int_m^t \xi_{\mu(t)}(p(\eta))\Delta\eta + \int_n^m \xi_{\mu(t)}(p(\eta))\Delta\eta\right]$$

$$= \exp\left[\int_{n}^{t} \xi_{\mu(t)}(p(\eta))\Delta\eta\right]$$

$$= e_p(t,n)$$

olarak buluruz.

5.1. Teorem: $m, n \in \Re$ olsun,

(i) $e_0(t,s) \equiv e_m(t,t) \equiv 1$

(ii) $e_m(\sigma(t),s) = \big(1+\mu(t)m(t)\big)e_m(t,s)$

(iii) $e_m(t,s) = \frac{1}{e_m(s,t)} = e_{\ominus m}(s,t)$

(iv) $e_m(t,s)e_m(s,r) = e_m(t,r)$

(v) $e_m(t,s)e_n(t,s) = e_{m\oplus n}(t,s)$

(vi) $\frac{e_m(t,s)}{e_n(t,s)} = e_{m\ominus n}(t,s)$

(vii) $[\frac{1}{e_m(.,s)}]^{\Delta} = -\frac{m(t)}{e_m^{\sigma}(.,s)}$

eşitlikler sağlanır .

5.6. Tanım

$p \in \Re$ ise $y^{\Delta} = p(t)y$ birinci mertebeden lineer dinamik denklemi regresiftir denir.

5.2. Teorem

$y^{\Delta} = p(t)y$ birinci mertebeden lineer dinamik denklemi regresif ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun. O zaman $e_p(.,t_0)$, zaman skalasındaki

$$y^{\Delta} = p(t)y, \qquad y(t_0) = 1$$

başlangıç değer probleminin bir çözümüdür.

5.3. Teorem

$p \in \Re$ ve $t_0 \in \mathbb{T}$ olmak üzere $y^{\Delta} = p(t)y$ regresif denklemi için, $y_0 \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda $y(t) = e_p(t, t_0)y_0$ ile verilen fonksiyon,

$$y^{\Delta} = p(t)y, \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (1)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür. Buradaki $e_p(t, t_0)$ fonksiyonu üstel fonksiyondur. 5.2. tanım' ına ilişkin başlangıç değer problemi ise;

$$y^{\Delta} = p(t)y, \quad y(t_0) = 1 \qquad (2)$$

dir. Bu (2) denkleminin adjointi;

$$x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma}, \quad x(t_0) = 1 \qquad (3)$$

dir.

5.4. Teorem

p, regresif ve rd-sürekli ise (2) denkleminin çözümü tektir.

5.5. Teorem

p, regresif ve rd-sürekli ise $e_p(., t_0)$ ve $e_{\ominus p}(., t_0)$ sırasıyla (2) ve (3) denklemlerinin tek çözümleridir. Açıkça, p, regresif ve rd-sürekli ise 5.3. teorem' den $x_0 e_{\ominus p}(., t_0)$

$$x^{\Delta} = -p(t)x^{\sigma}, \qquad x(t_0) = x_0 \qquad (4)$$

başlangıç değer probleminin tek çözümüdür. Buna ek olarak, f rd-sürekli olmak üzere (4) denklemini integral çarpanı olan $e_p(t, t_0)$ yardımıyla;

$$[xe_p(., t_0)]^{\Delta} = x^{\Delta}e_p(., t_0) + pe_p(., t_0)x^{\sigma} = e_p(., t_0)[x^{\Delta} + px^{\sigma}] = e_p(., t_0)$$

denklemini çözebiliriz. Her iki tarafın $t_0 \to t$ integrali alarak x için bir formüle ulaşırız.

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t)f^{\Delta}(t)$$

eşitliğini kullanarak;

$$y^{\Delta}(t) = p(t)y + f(t), \qquad y(t_0) = y_0 \qquad (5)$$

başlangıç değer problemini çözebiliriz.

5.6. Teorem

p ve f rd-sürekli ve aynı zamanda p regresif olsun.

$$x_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_{\ominus p}(t, \tau) f(\tau) \Delta(t)$$

ve

$$y_0 e_{\ominus p}(t, t_0) + \int_{t_0}^{t} e_p(t, \sigma(\tau)) f(\tau) \Delta(t)$$

fonksiyonlari, sırasıyla (4) ve (5)' i çözer.

5.7. Teorem

Eğer $p, q \in \Re$ ise

$$e^{\Delta}_{p\ominus q}(., t_0) = (p - q) \frac{e_p(., t_0)}{e^{\sigma}_q(., t_0)}$$

olur.

5.8. Teorem

Eğer $p \in \Re$ ve $a, b, c \in \mathbb{T}$ ise

$$[e_p(c, .]^{\Delta} = -p[e_p(c, .]^{\sigma}$$

ve

$$\int_a^b p(t) e_p(c, \sigma(t)) \Delta t = e_p(c, a) - e_p(c, b)$$

dir.

# 6. ZAMAN SKALASINDA KARARLILIK VE KARARSIZLIK

Rus matematikçi A. M. Lyapunov (1857-1918) yıllarında yaşamış fizik ve matematikle uğraşmıştır. A. M. Lyapunov adi diferansiyel denklem sisteminin kararlığını ve kararsızlığı sorununun türevin varlığı ya da yok oluşu ile ilişkilendirilmesinde öncü olmuştur. Lyapunov diferansiyel denklemeler ile çalışmaya başaladıktan sonra matematikçiler kararlılık teorisinin somut problemlere uygulanabileceğinin fark etmişlerdir [4].

Bu çalışmada birinci basamaktan dinamik denklem sistemlerinin x=0 denge çözümünün kararlılığını ve karasızlığını inceliyoruz .

$$x^{\Delta}=f(x.t)\ ,\ t > t_0 \quad x \in D \subset R^n \qquad (1)$$

Burada $t \in \mathbb{T}$ zaman skalası olarak tanımlandığında $t_0 \in \mathbb{T}$ ve D kompakt bir kümedir. Metodumuz pozitif definet bir $V:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ Liapunov fonksiyonu varlığını içermektedir. Böylece onun delta türevi $V^{\Delta}$ ve belirli integrali definet ve yarı definet işaret özelliklerini sağlayacak.

Varsayalım ki $\forall t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ , $f(x, t_0) \in D$ olsun. Buradan x=0 denklem (1)'in bir çözümüdür. Buna ek olarak f fonksiyonunun sürekli olduğunu ve (1) denkleminin $x(t_0)=x_0$ başlangıç koşuluyla birlikte varlığı ve tek çözümünün garanti edildiğini varsayalım. Kolaylık için $t_0 \in T$ , $x_0 := x(t_0) \in D$ başlangıç değerleri ile çözüm için $x(t, x_0, t_0)$ ile göstereceğiz.

6.1. Tanım

$\Phi :\ [0, r] \to [0, \infty]$ fonksiyonunu eğer iyi tanımlı ( tek değerli ), sürekli ve $[0, r]$ aralığında kesin artan ise $\Phi$ fonksiyonuna $K$ sınıfındadır denir.

6.2.Tanım

Eğer $\forall t \in \mathbb{T}$ ve $t \geq t_0$ için $|x(t, x_0 , t_0)| \leq \Phi(x_0)$ şartını sağlayan bir $\Phi \in K$ varsa (1) denkleminin x = 0 denge çözümü kararlıdır denir.

6.3. Tanım

(1) denkleminin denge çözümü kararlı ve $|x_0| < \gamma$ için

$$\lim_{t\to\infty} x\,(t,x_0,t_0) =0$$

olacak şekilde bir $\gamma >$
0 $\ reel\ say$ısı $varsa\ (1)'$deki denge çözümü asimptotik kararlıdır denir.

6.4. Tanım

P : $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ve P(0)=0 olmak üzere, eğer $x \in D$ için $\Phi(|x|) \leq P(x)$ şartını sağlayan $\Phi \in K$ varsa bu fonksiyon pozitif definet olarak adlandırılır.

6.5. Tanım

P(0)=0 olan sürekli bir $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunu her $x \in D$ için $P(x) \geq 0$ eşitsizlğini sağlıyorsa bu fonksiyona D üzerinde yarı pozitif definet bir fonksiyon denir.

6.6. Tanım

Q : $[t_0, \infty]$ x $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonu Q(t,0)=0 olmak üzere eğer

$\Phi(|x|) \leq Q(t, x)$ $(\forall t \in T, t > t_0$ ve $x \in D)$

olacak şekilde bir $\Phi \in K$ fonksiyonu varsa $\Phi$ fonksiyonu $[t_0,\infty)$ $\times D$ üzerinde pozitif definet bir fonksiyondur denir.

6.7. Tanım

Q:$[t_0, \infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyonu $Q(t, 0) = 0$ olmak üzere

$\forall t \in \mathbb{T}$ için $t \geq t_0$ ve $x \in D$ olduğunda $Q(t, x) \geq 0$ ise $Q'$ya $[t_0, \infty) \times D$ üzerinde yarı pozitif definet bir fonksiyon denir.

6.1. Teorem

Eğer ki sıfırın komşuluğunda sürekli türevlenebilen pozitif definet V fonksiyonu için $\dot{V}(t,x)$ yarı negatif tanımlı ise (1) denkleminin x=0 denge çözümü kararlıdır [4].

İspat

V sürekli olduğundan dolayı $n \in \mathbb{R}$ yeterince küçük ve $|x| = r$ için

$$V(x) \leq \max_{|y| \leq r} V(y)$$

$$V(x) \geq \min_{r_1 \leq |y| < r_2} V(y)$$

dır.

Burada $r_1, r_2 \in R$ ve $0 < r_1 \leq r_2$ dir. Monoton olan r fonksiyonuna K sınıfının fonksiyonları ile yaklaşılabilir. Yani $\emptyset_1(|x|) \leq V(x) \leq \emptyset_2(|x|)$ olacak şekilde $\emptyset_1, \emptyset_2 \in K$ vardır. V yarı negatif tanımlı olduğundan V(x), t'nin artmayan bir fonksiyonudur. $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ için

$$V(x) \leq V(x_0)$$

olur. Bu nedenle

$$\emptyset_1(|x|) \leq V(x) \leq (x_0) \leq \emptyset_2(|x_0|)$$

yani $\emptyset_3 \in K$ olduğunda

$$|x| \leq \emptyset_3(|x|) := \emptyset_1^{-n}(\emptyset_2(x_0))$$

dır. Buradan $t \geq t_0$ için

$$|x(t, x_0, t_0)| \leq \emptyset_3(|x_0|)$$

kararlılık sağlar [4].

6.2. Teorem

Eğer sıfırın bir komşuluğunda sürekli türevlenebilir pozitif definet bir V fonksiyonu varsa $\varepsilon \in C_{rd}([t_0, \infty); [0, \infty))$ve $\emptyset \in K$ ve $t \to \infty$ için $\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\Delta s \to \infty$, olmak üzere $\dot{V}(t,x) \leq -\varepsilon(t)\emptyset(|x|)$ eşitsizliği sağlanır. Bu durumda (1) denkleminin x=0 denge çözümü asimptotik karalıdır [4].

*İspat*

Teo 6.1.'in koşulları sağladığı için (1) denkleminin denge çözümü en azından kararlıdır. Olmayana ergi yöntemiyle,

$$R \in R_1, \qquad R > 0 \; ve \; |x| \leq R \text{ için } \lim_{t\to\infty} |x(t)| \neq 0$$

olacak şekilde bir x çözümünün var olduğunu kabul edelim. Ayrıca $A \leq |x(t)| \leq R$, $\forall t \in T$ ve $t \geq t_0$olacak şekilde var olduğunu kabul edelim. Bu durumda $a \in R$ ve $a > 0 \; vardır$.

Şimdi zaman skalasının temel teoremlerinden,

$$\int_{t_0}^{t} \dot{V}(t,s)\Delta s = \int_{t_0}^{t} [V(s)]^{\Delta}\Delta s = V(t) - V(t_0).$$

Buradan

$$V(t) = V(t_0) + \int_{t_0}^{t} [V(s)]^{\Delta}\Delta s \leq V(t_0) - \int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\emptyset(|s|)\Delta s \leq V(t_0) - \emptyset(|t_0|)\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\Delta s$$

olur. Bu yüzden $\emptyset$ pozitif artan bir fonksiyon olduğunda ve $a \leq |x| \leq R$ olduğundan bu eşitsizlikte $t \to \infty$ iken $V(x) \to \infty$ anlamına gelir. Buda V'nin pozitif olmasıyla çelişir [4].

6.3. Teorem

Eğer pozitif definet sürekli türevlenebilen bir V fonksiyonu, bir $\varepsilon \in C_r([t_0, \infty);[0, \infty))$ ve bir $\emptyset \in K$ varsa öyleki $t \to \infty$ iken $\int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\Delta s \to \infty$ olmak üzere $\dot{V}(t, x) \leq \varepsilon(t)\emptyset(|x|)$ sağlanıyor ise (1) denkleminin denge çözümü kararsızdır [4].

*İspat*

Olmayana ergi yöntemiyle, denge çözümünün kararlı olduğunu kabul edelim.
Bu durumda $t \geq t_0$ ve $\forall t \in T$ için $|x(t)| \leq \emptyset(|x_0|)$ olduğundan bir $\emptyset \in K$ fonksiyonu vardır. Teo 6.2. de olduğu gibi

$$V(x) = V(x_0) + \int_{t_0}^{t} [V(x)]^{\Delta} \Delta s \leq V(x_0) + \emptyset(|x_0|) \int_{t_0}^{t} \varepsilon(s)\Delta s$$

dır ve V'nin keyfi olarak büyük olabileceğini bununda bir çelişki olduğunu görüyoruz [4].

*Sonuç*

Eğer ki sıfırın komşuluğunda sürekli türevlenebilen pozitif definet V fonksiyonu için $\dot{V}(t)$ negatif definet ise (1) denkleminin denge çözümü asimptotik kararlıdır.

*İspat*

Bu teorem 6.2'nin $\varepsilon = 1$ için özel çözümüdür. İspat aynısıdır.

*Sonuç*

Eğer ki sıfıra yakın bir komşuluğunda bir pozitif definet sürekli türevlenebilir bir V fonksiyonu için $\dot{V}(t, x)$ pozitif kesin definet ise (1) denkleminin denge çözümü kararsızdır.

*İspat*

Teorem 6.3.'ün $\varepsilon = 1$ in özel durumudur. İspat aynısıdır.

# 7. ZAMAN SKALASINDA DEĞİŞMEZLİK PRENSİBİ

Bu bölümde (1) denklemi için Lyapunov fonksiyonu kullanarak değişmezlik prensibi ilkesi geliştireceğiz. a,b $\in \mathbb{T}$, $-\infty \leq a < 0 < b \ll \infty$ ve E, $\mathbb{R}^n$ de açık bir küme olmak üzere $\Phi: (a, b) \to$ E olsun. Uygunluk açısından (1) denkleminin çözümlerinin E'de tek olduğunu varsayacağız.

7.1. Tanım

I birim dönüşüm olmak üzere, eğer

$$I+f(t,.)\mu(t)$$

dönüşümü tersinir ise f dönüşümü t'ye göre regresifdir denir. Her $t \in \mathbb{T}$, $t \geq t_0$ için $\mu(t) < 1$ olduğu sürece f fonksiyonu $|f(t, x_1) - f(t, x_2| \leq L|x_1 - x_2|$, eşitsizliğini sağlıyorsa regresif olduğu gösterilebilir.

7.2. Tanım

$t_n \to b$ ($t_n \to a$) ve $\lim\Phi(t_n) = p$ olacak şekilde bir dizisi varsa p noktasına $\Phi$ nin bir pozitif (negatif) limit noktası denir. $\Phi$ nin bir pozitif (negatif )limit noktası kümesi $\Omega(\Phi)$, $\Phi$ nın pozitif limit kümesi olarak adlandırılır.

Her t$\in \mathbb{T}$ için T(t) : $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere

$$X(t,x_0)=T(t)\,x_0\,,$$
$$X(0,x_0)=T(0)\,x_0,\ \ T(0)=I$$

olsun. Zaman skalasının dinamik denklemlerinin temel teoreminden aşağıdaki özellikleri söyleyebiliriz.

i) X(0)= $x_0$ koşulunu sağlayan herbir X(t,$x_0$) çözümü her $x_0 \in$ E için I($x_0$)= (a($x_0$), b($x_0$)) maksimal tanım aralığına sahiptir.

ii) s,t$\in \mathbb{T}$ ve s$\in I(x_0)$, t$\in I(X(s, x_0))$ olsun. Buradan $\sigma(t, s) \in I(x_0\ )$ ve $T(\sigma(s + t))\, x_0$=$T(\sigma(s))T(t)x_0$ olduğu gösterilebilir.

iii) TxE kümesinde X rd-sürekli ise her sonlu noktada $x(t_{n,}x(t_n, x_0))\to x(t, y)$ olduğu gösterilebilir.

7.3. Tanım

Eğer $x_0 \in E \cap G$ iken her $t \in [a, b(x_0))(t \in (a(x_0), 0]$ için $T(t)x_0 \in G$ oluyorsa $G \in R^n$ kümesine pozitif (negatif) invaryant denir. G kümesi hem negatif hem pozitif invaryant ise buna zayıf invaryant denir. Ek olarak eğer her $x_0 \in E \cap G$ ise G kümesi invaryant denir.

7.4. Tanım

Bir $X(t,x_0)=T(t)$ çözümü sınırlı ve her $t \in [a, b(x_0))(t \in (a(x_0), 0]$ için E nin sınırıda hiçbir limit noktasına sahip değilse, bu çözüme E' göre pozitif (negatif) ön-kompaktır denir.

7.5. Tanım

Kapalı bir invaryant küme, eğer iki ayrık, kapalı, boştan farklı invaryant kümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa bu kümeye bağlantılı invaryant küme denir.

7.1. Teorem

Her $\Omega(x_0)$ pozitif limit kümesi, tüm limit noktalarını içerdiğinden kapalıdır [4].

*İspat*

$\Omega(x_0)'$ın pozitif invaryant olduğunu göstermek için $y \in \Omega(x_0) \cap E$ ve $t \in I(y)$ olsun. $\Omega(x_0) \cap E$ boş olmadığından $b(x_0) = \infty$ dır. Bundan dolayı $n \to \infty$ için $t_n \to \infty$ ve $x(t_n, x_0) \to y$ özelliklerini sağlayan bir $t_n \in I(x_0)$ dizisi vardır. Yeterince büyük n için $I(y) \cap I(x(t_n, x_0))$ boştan farklıdır ve $x(t, x(t_n, x_0)) = x(t + t_n, x_0) \to x(t, y)$ olur. Böylece $x(t,y) \in \Omega(x_0)$ ve $\Omega(x_0)$ kümesi pozitif invaryant kümesi olur [4].

7.2. Teorem

$x(t, x_0)$ pozitif ön-kompakt olsun. Bu durumda $\Omega(x_0)$ kümesi E' dedir, boştan farklıdır, kompakttır, invaryanttır ve bağlantılı invaryanttır. Ayrıca $\Omega(x_0)$ kümesi $t_n \to \infty$ için $x(t, x_0)$ ın yakınsadığı en küçük kapalı kümedir [4].

*İspat*

$x(t, x_0) = T(t)\, x_0$ pozitif ön-kompakt olduğundan sınırlıdır. Bu da $\Omega(x_0)$, E' boştan farklı ve sınırlıdır demektir. $\Omega(x_0)$ ayrıca kapalı olduğundan kompakttır. Dahası, pozitif invaryant olduğundan invaryanttır. $T(t)\, x_0$ ön-kompakt olduğundan $x(t, x_0) = T(t)\, x_0 \to$

$\Omega(x_0)$ olduğunu göstermeliyiz. Hem $T(t)\,x_0$ hemde $\Omega(x_0)$ sınırlı olduğundan $d(T(t)x_0, \Omega(x_0))$ ile gösterilen aralarındaki mesafe sınırlıdır. Bundan dolayı $T(t)x_0$, $\Omega(x_0)$' a yakışıyorsa $t_n \to \infty$ ve $(t, x_0) = T(t)\,x_0$ olmak üzere yakınsak bir $t_n \in I(x_0)$ dizisi vardır. Fakat $t_n \to \infty$ için $d(T(t)x_0, \Omega(x_0))$ uzaklığı 0' a yakınsamaz. $x(t_n, x_0)'$ın limiti $\Omega(x_0)$ da olacağı için bu durum mümkün olmaz. Bundan dolayı $t_n \to \infty$ iken $x(t_n, x_0) \to \Omega(x_0)$ a gider. Eğer $T(t_n)\,x_0 \to H$ ve H kapalı bir kümeyse bu durumda $\Omega(x_0) \subset H$ dır. Bundan dolayı $\Omega(x_0)$, $T(t_n)\,x_0$ ın yakınsadığı en küçük kapalı bir kümedir.

$\Omega(x_0)$ ın bağlantılı invaryant olduğunu göstermek için $\Omega(x_0)$ ın boştan farklı, ayrık, kapalı ve invaryant $\Omega_1$ ve $\Omega_2$ kümelerinin birleşimi olduğunu varsayıp olmayan ergi yöntemini kullanalım.

$\Omega(x_0)$ kompakt olduğundan $\Omega_1$ ve $\Omega_2$ de öyledir. Bu durumda $\Omega_1 \in U_1$ ve $\Omega_2 \in U_2$ olacak şekilde ayrık açık $U_1$ve $U_2$ kümeleri vardır. T(t), $\Omega_1$ de sürekli olduğundan düzgün süreklidir ve $\Omega_1 \subset V_1$ ve $T(t)(V_1) \subset U_1$ olacak şekilde bir $V_1$ açık kümesi vardır. $\Omega(x_0)$, $T(t)\,x_0$ ın yakınsadığı en küçük kapalı küme olduğundan, n → ∞ iken $t_n \to \infty$ olan öyle bir $t_n \in I(x_0)$ dizisi vardır ki $T(t_0, x_0)$ hem $V_1$ hemde $U_2$' yi keyfi defa keser. Bunun anlamı şudur ki $T(t_{n_m})x_0$ ne $V_1$ de nede $U_2$ dedir. Böylece bu bir çelişkidir, böylece $\Omega(x_0)$ bağlantılı invaryanttır [4].

Denklem (1) e göre lyapunov fonksiyonuna (V) bağlı olarak aşağıdaki notasyon yazılır.

(iv)H=$\{x: \dot{V}(x) = 0, x \in \breve{E} \cap E\}$.

(v) M, H deki değişmez en büyük kümedir.

(vi)$M^x$, H deki en büyük zayıf kümedir.

(vii) $M^+$, H deki en büyük pozitif değişmez kümedir.

(viii) Eğer $M^x$ kompakt ise $M=M^x$ ek olarak $M \subset M^x \subset M^+$.

(ix)$v^{-1}(c) = \{x \in \breve{E} \cap E: V(x) = c\}$.

7.3. Teorem( Invarians prensibi)

V, E'de (1) denkleminin bir lyapunov fonksiyonu ve x(t,$x_0$), her t∈ $[0, b(x_{0)}]$ için (1) denkleminin E'de kalan bir çözümü olsun. Bu durumda bazı c' ler için $\Omega(x_0) \cap E \subset M^* \cap V^{-1}(c)$ dir [4].

*İspat*

Farz edelim ki $y \in \Omega(x_0)$ olsun. Burada $b(x_0) = \infty$ olur ve $t_n \in I(x_0)$ dizisi var öyle ki $x(t_n, x_0) \rightarrow y$ dir. $V(x(t,x_0))$, t'ye göre artmayan olduğu için her $t \in [0, \infty)$ için $V(x(t,x_0)) \geq V(y)$ dir ve her bir $y \in \Omega(x_0)$ için $V(x(t,x_0)) \rightarrow c = V(y)$ dir. $\Omega(x_0)$ zayıf pozitif invaryant olduğundan $\Omega(x_0) \subset H$ dır. Buradan $\Omega(x_0) \subset M^*$ dır. Bundan dolayı $\Omega(x_0) \subset E \subset M^* \cap V^{-1}(c)$ olur. Eğer $x(t,x_0)$ ön-kompakt olursa $\Omega(x_0)$ invaryanttır ve $\Omega(x_0) \subset E \subset M \cap V^{-1}(c)$ dir. Ayrıca $t \rightarrow \infty$ iken $x(t,x_0) \rightarrow \Omega(x_0)$ olup $t \rightarrow \infty$ için $x(t,x_0) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$ dir [4].

# 8. SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde öncelikli olarak temel bilgilere dayanak olacak zaman skalası tanımı yapılmıştır. Çalışmamız boyunca zaman skalası üzerinde tek değişkenli fonksiyonların analizini inceledik. Bağlantılı kümeler için kullanmakta olduğumuz tanım ve teoremlerin keyfi kapalı kümelere de uygulanabilirliği açısından zaman skalasının son derece kullanışlı olduğu görülmüştür. Zaman skalasında tek değişkenli fonksiyonları incelediğimizde ise çok iyi tanıdığımız genel metrik uzay teorisinde geçerli olan açık yuvar, nokta komşuluğu, açık kümeler, kapalı kümeler, kompakt kümeler gibi temel genel kavramların, zaman skalasında da geçerli olduğunu gördük. Fonksiyonların süreksizlik noktalarında sıçrama operatörü kullanılarak karşılaşılan sorunlar çözülmüş ve işlemlerimiz daha geniş bir tanım kümesine sahip olmuştur. Türev almada gerekli olan süreklilik koşulu; parçalı fonksiyonların türevini almamıza engel teşkil ederken ileri sıçrama ve geri sıçrama operatörleriyle bu sorun aşılmış ve artık delta türevin varlığıyla her fonksiyon türevlenebilir hale gelmiştir. Aynı durum integral için de söz konusudur. Tanecik operatörü yardımıyla elde ettiğimiz integraller toplamı elimizdeki fonksiyonun integraline eşit olmaktadır. Zaman skalasında da türevin uygulamalarını kullanmakta tıpkı reel sayılarda olduğu gibi türevin limitsel tanımını kullanmak oldukça işlevsel olmuştur.

Zaman skalsında adi türevin de yine delta türev yardımıyla hesaplanabileceğini gösterdik. Bu işlem tekrar edildiğinde yüksek mertebeden adi türevin hesaplanmasında da herhangi bir sorunla karşılaşılmadığını göstermiş olduk. Bu çalışmada bir zaman skalası üzerinde delta türev, delta integral ve bunların temel özellikleri ispatlı olarak detaylı bir şekilde çalışılmıştır.

A..M. Lyapunov adi diferansiyel denklem sisteminin kararlığı ve kararsızlığı sorununun türevin varlığı ya da yok oluşu ile ilişkilendirilmesinde öncü olmuştur. Lyapunov diferansiyel denklemeler ile çalışmaya başladıktan sonra matematikçiler kararlılık teorisinin somut problemlere uygulanabileceğinin fark etmişlerdir.

Bu çalışmada birinci basamaktan dinamik denklem sistemlerinin x=0 denge çözümünün kararlılığı ve karasızlığı incelenmiştir .

$$x^{\Delta}=f(x,t)\ ,\ t > t_0 \quad x \in D \ \subset \ R^n \tag{1}$$

Burada t∈$\mathbb{T}$ zaman skalası olarak tanımlandığında $t_0 \in \mathbb{T}$ ve D kompakt bir kümedir. Metodumuz pozitif definet bir $V:R^n \rightarrow R$ Liapunov fonksiyonu varlığını içermektedir. Böylece onun delta türevi $V^{\Delta}$ ve belirli integrali definet ve yarı definet işaret özelliklerini sağlamıştır.

Gösterilmiştir ki sıfırın komşuluğunda sürekli türevlenebilen pozitif definet V fonksiyonu için $V^{\Delta}(t)$ negatif definet ise (1) denkleminin denge çözümü asimptotik kararlıdır. Eğer ki sıfırın bir komşuluğunda bir pozitif definet sürekli türevlenebilir bir V fonksiyonu için $V^{\Delta}(t, x)$ pozitif kesin definet ise (1) denkleminin denge çözümü kararsızdır diyeceğiz. Son olarak (1) denklemi için Lyapunov fonksiyonu kullanarak değişmezlik prensibi ilkesi geliştirilmiştir.

# KAYNAKLAR


1. Agarwal, R. P., Bohner, M., O'Regan, D. ve Peterson, A. (2002). *Dynamic equations on time scales, a survey***.** Journal of computational and applied mathematics (4): 1-26

2. Bohner, M. ve Peterson, A. (2001). *Dynamic equations on time scales: An introduction with applications*. Birkhäuser Boston,

3. Bohner, M. ve Peterson, A. (2003). *Advances in dynamic equations on time scales*. Birkhäuser Boston,

4. Hoffacker, J. ve Tısdell, C. C. (2005). *Stability and Instability for Dynamic Equations on Time Scales.* Computers and Mathematics with Applications, (49): 1327-1334

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**

| | |
|---|---|
| Adı-Soyadı | : Halil TERECİ |
| Uyruğu | : Türkiye Cumhuriyeti |
| Doğum tarihi ve yeri | : 10.01.1977- Samsun |
| Medeni hali | : Evli |
| e-posta | : htereci@hotmail.com |

| **Eğitim Derecesi** | **Okul/Program** | **Mezuniyet Yılı** |
|---|---|---|
| Lisans | Atatürk Üniversitesi | 2001 |

| **İş Deneyimi/Yıl** | **Çalıştığı Yer** | **Görevi** |
|---|---|---|
| 2001- | Amasya Milli Eğitim | Öğretmen |

**Yabancı Dili**

İngilizce

**Bilimsel Faaliyetler(Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)**

Tereci, H. (2018, 12-15 Eylül). *Zaman Skalasında Lyapunov'un Direkt Metodu*. 31. Ulusal Matematik Sempozyumu, Erzincan