T.C.
AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HOLOMORFİK FONKSİYONLAR İÇİN JACK LEMMASININ UYGULAMALARI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

SELİN AYDINOĞLU

TEMMUZ

HOLOMORFİK FONKSİYONLAR İÇİN JACK LEMMASININ UYGULAMALARI

Selin AYDINOĞLU

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

TEMMUZ 2020

ETİK BEYAN

Amasya Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Tez Yazım Kurallarına uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında;

- Tez içinde sunduğum verileri, bilgileri ve dokümanları akademik ve etik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Tüm bilgi, belge, değerlendirme ve sonuçları bilimsel etik ve ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Tez çalışmasında yararlandığım eserlerin tümüne uygun atıfta bulunarak kaynak gösterdiğimi,
- Kullanılan verilerde herhangi bir değişiklik yapmadığımı,
- Bu tezde sunduğum çalışmanın özgün olduğunu,

bildirir, aksi bir durumda aleyhime doğabilecek tüm hak kayıplarını kabullendiğimi beyan ederim.

Selin AYDINOĞLU
10.07.2020

HOLOMORFİK FONKSİYONLAR İÇİN JACK LEMMASININ UYGULAMALARI
(Yüksek Lisans Tezi)

Selin AYDINOĞLU

AMASYA ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
Temmuz 2020

ÖZET

Bu tezde, birim dairede holomorf ve sınırlı olan fonksiyonların farklı sınıflar için sınır davranışı incelenmiş olup, bu farklı sınıf için Schwarz lemması verilmiştir. Ayrıca sınırda bu sınıf için Schwarz lemmasının farklı versiyonları ele alınmıştır. Elde edilen sonuçlarda, birim diskin sınırında açısal limitin var olduğu kabul edilerek birim diskin sınır noktasında fonksiyonun açısal türevi incelenmiştir.

SayfaAdedi : 23
Anahtar Kelimeler : Holomorfik fonksiyon, Schwarz lemma, Açısal limit, Açısal türev
Danışman : Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

APPLICATIONS OF THE JACK'S LEMMA FOR THE HOLOMORPHIC FUNCTIONS
(M. Sc. Thesis)

Selin AYDINOĞLU

AMASYA UNIVERSITY
INSTITUTE OF SCIENCE
July 2020

ABSTRACT

In this thesis, the boundary behaviors for the different classes of holomorphic and bound functions in the unit circle are examined and Schwarz 's lemma is given for this different class. In addition, different versions of the Schwarz lemma for this class are discussed at the border. In the obtained results, the angular derivative of the function has been examined at the boundary point of the unit disc by assuming the presence of an angular limit at the boundary of the unit disk.

Page Number : 23
Key Words : Holomorphic functions, Schwarz lemma, Angular limit, Angular derivative.
Supervisor : Assoc. Prof. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK

ÖN SÖZ ve TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının ortaya çıkmasındaki değerli katkılarından ötürü çok değerli hocam Doç. Dr. Bülent Nafi ÖRNEK'e, Sayın Prof. Dr. Mustafa KANDEMİR ve Sayın Doç. Dr. Süleyman DİRİK'e ve hayatımın her alanında desteklerini benden hiçbir zaman esirgemeyen, emeklerini asla ödeyemeyeceğim bu hayattaki en büyük şansım aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

Tez çalışmasında kullanmış olduğumuz simgeler yanda açıklamaları verilmek üzere aşağıda listelenmiştir.

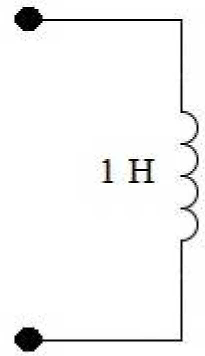
Simgeler	**Açıklama**
C	Kompleks düzlem
U	Birim disk
∂U	Birim diskin sınırı
$f(z)$	Analitik fonksiyon
$t(z)$	Yardımcı fonksiyon
$\varphi(z)$	Tasvir fonksiyonu
$r(z)$	Tasvir fonksiyonu
$B_1(z)$	Blaschke fonksiyon
$Z(s)$	Empedans fonksiyon
c_2	Taylor açılımının katsayısı
c_3	Taylor açılımının katsayısı
$f'(b)$	Açısal türev

1. GİRİŞ

Yüzyıllardır matematiğin en can alıcı konularından biri haline gelen Schwarz lemması klasik kompleks analizin de en önemli sonuçlarından biridir. Bu sonuçlar geometrik fonksiyonlar teorisi, harmonik analiz, kompleks dinamik sistemler ve diferansiyel geometri gibi birçok alana rahatlıkla uygulanabilir. Özellikle son zamanlarda pozitif reel fonksiyonlar için ayrı bir uygulama alanı oluşturmuştur. Şöyle ki bu fonksiyonlar elektronik mühendisliğinde empedans fonksiyonuna karşılık gelmektedir. Bu sonuçlar bilim adamlarını devre teorisi ve devre analizi çalışmalarına götürmüştür (Richards, 1947, Örnek ve Düzenli, 2018, Örnek ve Düzenli, 2019, Reza, 1962,). Schwarz Lemması basit olarak şu şekilde verilir:

Schwarz Lemması. C kompleks düzlem ve $U=\{z:|z|<1\}$ birim disk olsun. $f:U\to U$ analitik fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Bu durumda $\forall z\in U$ için $|f(z)|\le|z|$ ve $|f'(0)|\le 1$ olur. Bu eşitsizliklerde (herhangi bir $z\neq 0$ noktası için) eşitlik durumu yalnızca $|\gamma|=1$ olmak üzere, $f(z)=\gamma z$, $\gamma\in\mathbb{R}$ olduğunda mümkündür (Dineen, 1989, Ahlfors, 1979, Ahlfors, 1938, Markushevich, 1965, Dubinin, 2007, Dubinin, 2000, Dubinin, 2002, Dubinin, 2005, Dubinin ve Olesov, 2004, Mercer, 1997).

Schwarz Lemması'nın önemli uygulamalarından birisi de Liouville Teoremidir. Ayrıca, pozitif reel fonksiyonlar için Schwarz lemması önemli bir yer teşkil etmektedir. Şöyleki pozitif reel fonksiyonlar için elde edilen empedans fonksiyonları bir devreye karşılık gelmektedir. Bu devreleri L ve LC şeklinde gösterebiliriz. Örneğin, $Z(s)=Z(1)+c_1(s-1)+c_2(s-1)^2+\ldots$ pozitif reel fonksiyonu için, Schwarz lemmadan $|Z'(1)|\le 1$ eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizliğin eşitlik hali $Z(s)=s$ fonksiyonu ile sağlanır. Bu pozitif reel fonksiyon elektronikte bobine karşılık gelmektedir (Örnek ve Düzenli, 2018, Örnek ve Düzenli, 2019, Reza, 1962, Richards, 1947).



Şekil1.1. Pozitif reel $Z(s) = s$ fonksiyonu için devre modeli

Schwarz Lemması'nın daha genel hali Schwarz-Pick Lemması'dır. Bu lemmanın Schwarz lemmandan farkı, $f(0)=0$ koşulunun kaldırılmış halidir (Dineen, 1989).

Schwarz Lemması'nın önemli bir sonucu da sınırda Schwarz lemmasıdır. Son zamanlarda bu konuyla alakalı çalışmaların önemi oldukça artmıştır. Özellikle bu çalışmalar birim dairenin sınırındaki bazı noktalarda fonksiyonun türeviyle ilgilidir. Burada sınır noktasında fonksiyonun modülü 1 olarak alınmıştır (Mateljević, 2015, Mateljević, 2016, Mateljević, 2016, Azeroğlu ve Örnek, 2013, Osserman, 2000, Boas, 2010, Burns ve Krantz, 1994, Dubinin, 2004, Krantz, 2011).

Schwarz lemmasının bir sonucu olarak sınırda Schwarz Lemma'sını aşağıdaki şekilde verebiliriz:

$f: U \to U$ analitik ve $f(0)=0$ olsun. Ayrıca farz edelim ki, f fonksiyonu bir $b \in \partial U = \{z : |z| = 1\}$ noktasına sürekli devam ediliyor, $|f(b)| = 1$ ve $f'(b)$ mevcuttur. Bu takdirde,

$$|f'(b)| \geq 1 \tag{1.1}$$

eşitsizliği elde edilir. (1.1)'de eşitlik hali sadece $f(z) = ze^{i\alpha}, \alpha \in R$ olduğunda mümkündür. Osserman bu eşitsizliği aynı hipotezler altında $f(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayılardan $c_1 = f'(0)$ katsayısını ekleyerek aşağıdaki şekilde güçlendirmiştir:

$$|f'(b)| \geq \frac{2}{1 + |f'(0)|} \tag{1.2}$$

(1.2) eşitsizliği kesindir. Öyle ki, $|c_1| = |f'(0)|$'nin mümkün olan her bir değeri için eşitlik sağlanır (Osserman, 2000).

V. N. Dubinin f fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırlarını da hesaba katarak Ossermanın sonucunu daha da kuvvetlendirmiştir (Dubinin, 2004).

Sınırda Schwarz lemmasının önemli bir uygulamasıda pozitif reel fonksiyon için ortaya çıkmaktadır. Örnek ve Düzenli tarafından yapılan çalışmada Schwarz Lemması'nın sınırda analizi incelenmiş ve bu analizde elde edilen empedans fonksiyonlarına karşılık gelen devreler araştırılmıştır. Çalışmada sunulan teoremde, $Z(0)=0$ koşulu dikkate alınarak empedans fonksiyonunun türevinin modülünün aşağıdan sınır analizi yapılmıştır ve kesin sonuç elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizliğin eşitlik hali için $Z(s)$ fonksiyonu verilmiştir. Sınırda Schwarz Lemması'nın bir uygulaması olarak verilen bu eşitsizlik şu şekildedir:

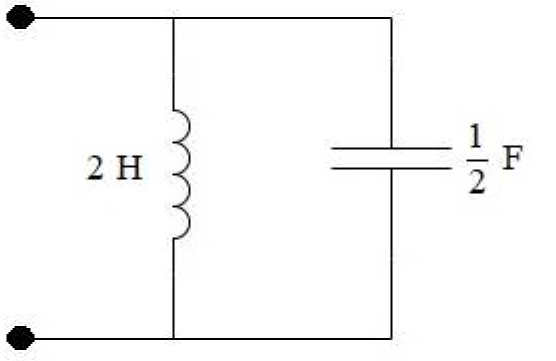
$Z(s)=Z(1)+c_1(s-1)+c_2(s-1)^2+....$ ve $Z(s)$ fonksiyonu $Z(0)=0$ ve sanal eksenin $s=0$ noktasında analitik olsun. Bu taktirde

$$\left|Z'(0)\right| \geq Z(1)\left(1+\frac{2\left(Z(1)-\left|c_1\right|\right)^2}{\left(Z(1)\right)^2-\left|c_1\right|^2+\left|\left(2c_2+c_1\right)Z(1)-c_1^2\right|}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. Bu eşitsizlikte, eşitlik hali

$$Z(s)=\frac{2s}{s^2+1}Z(1)$$

fonksiyonu ile sağlanır. Bu fonksiyon aşağıda verilen şekildeki gibi bir devreye karşılık gelmektedir (Örnek ve Düzenli, 2018, Örnek ve Düzenli, 2019, Örnek ve Düzenli, 2019).



Şekil 1.2. $Z(s)$ empedans fonksiyonu için eşdeğer devre modeli

Önceki sonuçlardan farklı olarak, f fonksiyonunun sınır noktasında açısal limite sahip olduğu kabul edilmiştir. Açısal limitin tanımı ve onunla ilgili teoremler literatürde önemli bir yer almaktadır (Pommerenke, 1992).

Ossermanın (1.2) eşitsizliği daha genel sınıflar için elde edilir. Çalışmamızda farklı bir sınıf tanımlayarak Ossermanın çalışmasına benzer eşitsizlikler elde edilmiştir. Teoremlerimizde açısal limit kavramı kullanılmıştır. Açısal limit kavramı için aşağıdaki lemmayı vermemiz gerekir.

Julia-Wolff Lemma. f fonksiyonu $b \in \partial U$ noktasında $f(b) \in \partial U$ açısal limitine sahip ve $f(0)=0$ ve $|z|<1$ için $|f(z)|<1$ olsun. Bu taktirde $f'(b)$ açısal türevi mevcuttur ve $1 \leq |f'(b)| \leq \infty$ olur (Pommerenke, 1992).

Sonuç. f analitik fonksiyonunun sonlu bir $f'(b)$ açısal türevinin olması için gerek ve yeter koşul $f(b) \in \partial U$ noktasında sonlu $f'(b)$ açısal limitinin olmasıdır (Pommerenke, 1992).

Ayrıca bizim ana sonuçlarımızı göstermek için gerekli olan lemmayı aşağıdaki şekilde ifade edebiliriz (Jack, 1971).

Lemma (Jack's Lemma). $f(z)$ analitik, sabit olmayan bir fonksiyon ve $f(0)=0$ olsun. Eğer $|f(z)|$, z_0 noktasında, $|z|=r$ dairesi üzerinde maksimum değer alıyorsa, o zaman

$$\frac{z_0 f'(z_0)}{f(z_0)} = k$$

eşitliği sağlanır. Burada $k \geq 1$ bir reel sayıdır.

2. BİRİM DİSKİN SINIRINDA $\mathcal{M}$ SINIFI İÇİN SONUÇLAR

Bu bölümde $\mathcal{M}$ sınıfına ait olan analitik fonksiyonlar için birim diskte Schwarz lemması verilecektir. Ayrıca $f''(z)$ fonksiyonunun açısal türevi aşağıdan değerlendirilecektir.

$\mathcal{A}$, U birim diskte $f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+...$ formundaki analitik olan fonksiyonların sınıfı olsun. Ayrıca $\mathcal{M}$, tüm $f(z)$ fonksiyonlarını içeren $\mathcal{A}$'nın alt sınıfı olsun.

$$\mathcal{R}\left(\frac{f'(z)+zf''(z)}{zf'(z)}\right)<\frac{3}{2} \tag{2.1}$$

koşulu sağlansın.

$f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+...$ birim diskte analitik fonksiyon olsun. Aşağıdaki fonksiyonu düşünelim.

$$\varphi(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}. \tag{2.2}$$

Burada $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ dir. $\varphi(z)$ birim diskte analitik ve $\varphi(0)=0$ dır. Gösterelim ki $z\in U$ için $|\varphi(z)|<1$ dir. Farz edelim ki $z_0\in U$ var öyle ki $\max\limits_{|z|\le|z_0|}|\varphi(z)|\le|\varphi(z_0)|=1$ olsun.

Jack Lemmasından, $\varphi(z_0)=e^{i\theta}$ ve $\dfrac{z_0\varphi'(z_0)}{\varphi(z_0)}=k$ olduğunu biliyoruz. Böylece,

(2.2) den,

$$\begin{aligned}\mathcal{R}\left(\frac{f'(z_0)+z_0f''(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right)&=\mathcal{R}\left(1+\frac{2z_0\varphi'(z_0)}{(1+\varphi(z_0))^2}\right)\\&=\mathcal{R}\left(1+\frac{2k\varphi(z_0)}{(1+\varphi(z_0))^2}\right)\\&=\mathcal{R}\left(1+\frac{2ke^{i\theta}}{(1+e^{i\theta})^2}\right)\end{aligned}$$

elde ederiz.

$$\frac{e^{i\theta}}{(1+e^{i\theta})^2}=\frac{e^{i\theta}}{(1+2e^{i\theta}+e^{2i\theta})}=\frac{1}{(e^{-i\theta}+2+e^{i\theta})}=\frac{1}{2+2\cos\theta},$$

olduğu için,

$$\mathcal{R}\left(\frac{f'(z_0)+z_0f''(z_0)}{z_0f'(z_0)}\right)=1+\frac{2k}{2(1+\cos\theta)}\geq\frac{3}{2}$$

elde edilir.

Bu sonuç (2.1) eşitsizliği ile çelişir. Bu da demektir ki birim diskte z_0 noktası yoktur öyle ki tüm $z\in U$ lar için $|\varphi(z_0)|=1$ dir. Böylece $z\in U$ için $|\varphi(z)|<1$ elde ederiz. Dolayısıyla $\varphi(z)$ fonksiyonu Schwarz Lemmanın koşullarını sağlar. Eğer $\varphi(z)$ fonksiyonuna Schwarz Lemmayı uygularsak,

$$\varphi(z)=\frac{1+c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots-1}{1+c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots+1}$$

$$=\frac{c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots}{2+c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots}$$

$$=\frac{z\left(c_2+\left(2c_3-c_2^2\right)z+\ldots\right)}{2+c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots)}$$

$$\frac{\varphi(z)}{z}=\frac{\left(c_2+\left(2c_3-c_2^2\right)z+\ldots\right)}{2+c_2z+\left(2c_3-c_2^2\right)z^2+\ldots)}$$

elde edilir. Üstteki ifadede her iki tarafın $z\to 0$ limitine geçersek,

$$\varphi'(0)=\frac{c_2}{2}$$

olur. Dolayısıyla, $\frac{|c_2|}{2}\leq 1$ ve $|c_2|\leq 2$ olarak bulunur.

$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu ile sonuç kesindir. Böylece aşağıdaki lemma elde edilir.

Lemma 2.1. Eğer $f(z)\in\mathcal{M}$ ise,

$$|c_2|\leq 2 \tag{2.3}$$

olur. (2.3) eşitsizliği $f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu ile sonuç kesindir.

2.1. Temel Sonuçlar

Bu bölümde, U'da analitik fonksiyonların belirli sınıfında $f''(z)$ için bazı sonuçlar vereceğiz. $f(z)\in\mathcal{M}$ olmak üzere, U birim diskinde tanımlı $f(z)=z+c_2z^2+c_3z^3+...$ fonksiyonu için sınırda b noktası ve $f'(b)=0$ için $f''(z)$ fonksiyonunun açısal türevi incelenmiştir. Bu incelemede $f(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımındaki katsayıları dikkate alınarak elde edilen eşitsizlikler birbirlerine göre kıyaslanmıştır. Bu eşitsizliklerin eşitlik hali ayrıca ispatlanmıştır.

Teorem 2.1. $f(z)\in\mathcal{M}$ olsun. Kabul edelim ki, $b\in\partial U$ sınırında $f(b)$ açısal limite sahip ve $f'(b)=0$ olsun. O halde,

$$\left|f''(b)\right|\geq\frac{\left|f(b)\right|}{2} \tag{2.4}$$

eşitsizliği vardır. (2.4) eşitsizliği $f(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$ fonksiyonu ile kesindir.

İspat. $\varphi(z)=\dfrac{p(z)-1}{p(z)+1}$ fonksiyonunu düşünelim. Burada $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ dir. $\varphi(z)$ fonksiyonu birim diskte analitik ve $\varphi(0)=0$ dır. Jack lemmasından ve $f(z)\in\mathcal{M}$ olduğundan, $|z|<1$ için $|\varphi(z)|<1$ eşitsizliği sağlanır. Ayrıca, $b\in\partial U$ için $|\varphi(b)|=1$ dir. $\varphi(z)$'in tanımından

$$\varphi'(z)=\frac{2p'(z)}{\left(p(z)+1\right)^2}$$

olduğu açıktır. Böylece, (1.1) den,

$$1\leq\left|\varphi'(b)\right|=\frac{2\left|p'(b)\right|}{\left|p(b)+1\right|^2}=2\left|p'(b)\right|$$

ve

$$\left|p'(b)\right|\geq\frac{1}{2}$$

elde edilir. Ayrıca $p(z)=\dfrac{zf'(z)}{f(z)}$ fonksiyonun türevini alırsak,

$$p'(z)=\frac{\left(f'(z)+zf''(z)\right)f(z)-\left(f'(z)\right)^2 z}{\left(f(z)\right)^2}$$

olur. $f'(b)=0$ koşulundan

$$p'(b)=\frac{\left(f'(b)+bf''(b)\right)f(b)-\left(f'(b)\right)^2 b}{\left(f(b)\right)^2}=\frac{bf''(b)}{f(b)}$$

ve böylece

$$\left|f''(b)\right|\geq\frac{\left|f(b)\right|}{2}$$

elde edilir.

Şimdi (2.4) eşitsizliğinin kesinliğini gösterelim.

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2} \tag{2.5}$$

fonksiyonunu ele alalım. (2.5) eşitliğinin logaritmasını alıp sonra türeve geçersek,

$$\ln f(z)=\ln\frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)}=\frac{1}{z}+\frac{2}{1-z}$$

ve

$$p(z)=\frac{zf'(z)}{f(z)}=1+\frac{2z}{1-z}$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$p'(z)=\frac{2}{(1-z)^2}$$

ve

$$\left|p'(-1)\right|=\left|\frac{(-1)f''(-1)}{f(-1)}\right|=\left|\frac{f''(-1)}{f(-1)}\right|=\frac{1}{2}$$

olur.

$f(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımında c_2 katsayısını hesaba katarak, (2.4) eşitsizliğini aşağıdaki teoremde daha da kuvvetlendirmiş oluruz.

Teorem 2.2. $f(z)\in\mathcal{M}$ olsun. Kabul edelim ki, $b\in\partial U$ noktasında f fonksiyonu $f(b)$ açısal limite sahip ve $f'(b)=0$ olsun. O halde,

$$|f''(b)|\geq\frac{2|f(b)|}{2+|c_2|} \tag{2.6}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.6) ilişkisinde eşitlik hali

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2}$$

fonksiyonu ile sağlanır.

İspat. $\varphi(z)$'i yukarıdaki gibi alalım ve (1.4) den,

$$\frac{2}{1+|\varphi'(0)|}\leq|\varphi'(b)|=\frac{2|p'(b)|}{|p(b)+1|^2}=2|p'(b)|$$

elde edilir.

$$\varphi(z)=\frac{p(z)-1}{p(z)+1}=\frac{\frac{zf'(z)}{f(z)}-1}{\frac{zf'(z)}{f(z)}+1}$$

$$=\frac{c_2z+(2c_3-c_2^2)z^2+\dots}{2+c_2z+(2c_3-c_2^2)z^2+\dots}$$

ve

$$|\varphi'(0)|=\frac{|c_2|}{2}$$

olduğu için

$$\frac{2}{1+\frac{|c_2|}{2}}\leq 2|p'(b)|$$

ve

$$\left|\left(\frac{zf'(z)}{f(z)}\right)'_{z=b}\right|\geq\frac{2}{2+|c_2|}$$

elde edilir.

Şimdi (2.6)'nın eşitlik halini gösterelim. Aşağıdaki fonksiyonu ele alalım.

$$f(z)=\frac{z}{(1-z)^2} \tag{2.7}$$

(2.7) eşitliğinin logaritmasını alıp sonra türeve geçersek,

$$\ln f(z) = \ln \frac{z}{(1-z)^2},$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z} + \frac{2}{1-z}$$

ve

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = 1 + \frac{2z}{1-z}$$

elde edilir. Bu yüzden,

$$p'(z) = \frac{2}{(1-z)^2}$$

ve

$$|p'(-1)| = \left|\frac{(-1)f''(-1)}{f(-1)}\right| = \left|\frac{f''(-1)}{f(-1)}\right| = \frac{1}{2}$$

elde edilir. Diğer yandan,

$$z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + ... = \frac{z}{(1-z)^2},$$

$$c_2 z + c_3 z^2 + ... = \frac{1}{(1-z)^2} - 1$$

ve buradan $c_2 = 2$ elde edilir. Böylece,

$$\frac{2}{2+|c_2|} = \frac{2}{2+2} = \frac{1}{2}$$

elde edilir.

$f(z)$ fonksiyonunun Taylor açılımında c_2 ve c_3 katsayısını hesaba katarak, (2.6) eşitsizliği aşağıdaki teoremde daha da kuvvetlendirilmiş olunur.

Teorem 2.3. $f(z) \in \mathcal{M}$ olsun. Kabul edelim ki, $b \in \partial U$ noktasında f fonksiyonu $f(b)$ açısal limite sahip ve $f'(b) = 0$ olsun. O halde,

$$\left|f''(b)\right| \geq \frac{|f(b)|}{2}\left(1+\frac{2\left(2-|c_2|\right)^2}{4-|c_2|^2+\left|4c_3-3c_2^2\right|}\right) \tag{2.8}$$

ifadesi sağlanır.

(2.8) ilişkisinde eşitlik hali $f(z)=\dfrac{z}{1-z^2}$ fonksiyonu için sağlanır.

İspat. $\varphi(z)$ yukarıdaki gibi verilsin. $B(z)=z$ ve $g(z)=\dfrac{\varphi(z)}{B(z)}$ fonksiyonunu düşünelim. $g(z)$ fonksiyonu U da analitik olur. Maximum prensibinden her $z\in U$ için $\left|\varphi(z)\right|<|B(z)|$ olur. Basit hesaplamalar ile

$$\left|g(0)\right|=\frac{|c_2|}{2}\leq 1 \tag{2.9}$$

ve

$$\left|h'(0)\right|=\frac{\left|4c_3-3c_2^2\right|}{4}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca,

$$\frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)}=\left|\varphi'(b)\right|\geq\left|B'(b)\right|=\frac{bB'(b)}{B(b)}$$

olduğu görülebilir.

$$t(z)=\frac{g(z)-g(0)}{1-\overline{g(0)}g(z)}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon U birim diskin de analitik, $|z|<1$ için $|t(z)|\leq 1$, $t(0)=0$ ve $b\in\partial U$ için $|t(b)|=1$ olur. (1.4) eşitsizliğine $t(z)$ fonksiyonunu uygularsak,

$$\begin{aligned}\frac{2}{1+\left|t'(0)\right|} &\leq \left|t'(b)\right|=\frac{1-|g(0)|^2}{\left|1-\overline{g(0)}g(b)\right|^2}|g'(b)| \\ &\leq \frac{1+|g(0)|}{1-|g(0)|}\left\{\left|\varphi'(b)\right|-\left|B'(b)\right|\right\}\end{aligned}$$

sonucu elde edilir.

$$t'(z)=\frac{1-|g(0)|^2}{\left(1-\overline{g(0)}g(z)\right)^2}|g'(z)|$$

olduğundan,

$$\left|t'(0)\right| = \frac{\left|g'(0)\right|}{1-\left|g(0)\right|^2} = \frac{\frac{\left|4c_3-3c_2^2\right|}{4}}{1-\left(\frac{\left|c_2\right|}{2}\right)^2} = \frac{\left|4c_3-3c_2^2\right|}{4-\left|c_2\right|^2},$$

$$\frac{2}{1+\frac{\left|4c_3-3c_2^2\right|}{4-\left|c_2\right|^2}} \le \frac{1+\frac{\left|c_2\right|}{2}}{1-\frac{\left|c_2\right|}{2}}\left\{2\left|p'(b)\right|-1\right\}$$

olarak alırız. Böylece

$$\frac{2\left(4-\left|c_2\right|^2\right)}{4-\left|c_2\right|^2+\left|4c_3-3c_2^2\right|} \le \frac{2+\left|c_2\right|}{2-\left|c_2\right|}\left\{2\left|p'(b)\right|-1\right\}$$

$$\frac{2\left(2-\left|c_2\right|\right)^2}{4-\left|c_2\right|^2+\left|4c_3-3c_2^2\right|} \le 2\left|p'(b)\right|-1$$

$$1+\frac{2\left(2-\left|c_2\right|\right)^2}{4-\left|c_2\right|^2+\left|4c_3-3c_2^2\right|} \le 2\left|p'(b)\right|$$

$$\left|p'(b)\right| \ge \frac{1}{2}\left(1+\frac{2\left(2-\left|c_2\right|\right)^2}{4-\left|c_2\right|^2+\left|4c_3-3c_2^2\right|}\right)$$

olur.

Şimdi (2.6)'nın eşitlik durumunu gösterelim.

$$f(z) = \frac{z}{1-z^2} \tag{2.10}$$

fonksiyonunu alalım. (2.10) eşitliğinin logaritmasını alıp sonra türeve geçersek,

$$\ln f(z) = \ln z - \ln\left(1-z^2\right),$$

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{1}{z}+\frac{2z}{1-z^2} = \frac{1+z^2}{z\left(1-z^2\right)}$$

ve

$$p(z) = \frac{zf'(z)}{f(z)} = \frac{1+z^2}{1-z^2}$$

olarak elde edilir. Bu nedenle,

$$p'(z) = \frac{2z\left(1 - z^2\right) - 2z\left(1 + z^2\right)}{\left(1 - z^2\right)^2} = \frac{4z}{\left(1 - z^2\right)^2},$$

$$p'(i) = \frac{4i}{\left(1 - i^2\right)^2} = i$$

ve

$$\left|p'(i)\right| = 1$$

olur. $c_2 = 0$ ve $c_3 = 1$ olduğundan,

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{2\left(2 - |c_2|\right)^2}{4 - |c_2|^2 + \left|4c_3 - 3c_2^2\right|}\right) = 1$$

olur. Teorem 2.3 de, $f(z) - z$ nin $z = 0$ dan farklı sıfırı yoksa (2.8) eşitsizliği daha da güçlenmiş olur. Bu da aşağıdaki teoremi vermemizi sağlar.

Teorem 2.4. $f(z) \in \mathcal{M}$ olmak üzere, U da $f(z) - z$ nin $z = 0$ dışında sıfırı olmasın ve $c_2 > 0$ olsun. Kabul edelim ki, $b \in \partial U$ noktasında f fonksiyonu $f(b)$ açısal limite sahip ve $f'(b) = 0$ olsun. O halde,

$$\left|f''(b)\right| \geq \frac{|f(b)|}{2}\left(1 - \frac{4c_2 \ln^2\left(\frac{c_2}{2}\right)}{4c_2 \ln\left(\frac{c_2}{2}\right) - \left|4c_3 - 3c_2^2\right|}\right) \tag{2.11}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $c_2 > 0$ olsun ve Teorem 2.3 deki $g(z)$ fonksiyonunu düşünelim. (2.9) eşitliğini hesaba katalım ve logaritmik formun analitik dal tanımından $\ln g(z)$ için

$$\ln g(0) = \ln\left(\frac{c_2}{2}\right) = \ln\left|\frac{c_2}{2}\right| + i\arg\left(\frac{c_2}{2}\right) < 0, \quad c_2 > 0$$

olarak yazılabilir. Buradan, $\ln\left(\frac{c_2}{2}\right) < 0$ dır.

$$r(z) = \frac{\ln g(z) - \ln g(0)}{\ln g(z) + \ln g(0)}$$

yardımcı fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon U birim disk de analitik, $z \in U$ için, $|r(z)| < 1$ ve $r(0) = 0$, $b \in \partial U$ için $|r(b)| = 1$ olur. Bu yüzden, (1.4) eşitsizliğini $r(z)$ fonksiyonuna uygulayabiliriz.

$$r'(z) = 2\ln g(0) \frac{g'(z)}{g(z)\left(\ln g(z) + \ln g(0)\right)^2}$$

ve

$$r'(b) = 2\ln g(0) \frac{g'(b)}{g(b)\left(\ln g(b) + \ln g(0)\right)^2}$$

olduğundan,

$$\frac{2}{1+|r'(0)|} \le |r'(b)| = \frac{2|\ln g(0)|}{|\ln g(b) + \ln g(0)|^2} \left|\frac{g'(b)}{g(b)}\right|,$$

$$= \frac{-2\ln g(0)}{\ln^2 g(0) + \arg^2 g(b)} \left|\frac{\varphi'(b)}{B(b)} - \frac{\varphi(b)B'(b)}{B(b)^2}\right|$$

$$= \frac{-2\ln g(0)}{\ln^2 g(0) + \arg^2 g(b)} \left|\frac{\varphi(b)}{b^2}\right| \left|\frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)} - \frac{bB'(b)}{B(b)}\right|$$

$$= \frac{-2\ln g(0)}{\ln^2 g(0) + \arg^2 g(b)} \left\{|\varphi'(b)| - |B'(b)|\right\}$$

$$\le \frac{-2\ln g(0)}{\ln^2 g(0)} \left\{2|p'(b)| - 1\right\}$$

olarak elde edilir.

$$r'(0) = \frac{g'(0)}{2g(0)\ln g(0)}$$

olduğundan ve bu yüzden,

$$|r'(0)| = \frac{\frac{|4c_3 - 3c_2^2|}{4}}{-2\frac{c_2}{2}\ln\left(\frac{c_2}{2}\right)} = \frac{|4c_3 - 3c_2^2|}{-4c_2 \ln\left(\frac{c_2}{2}\right)}$$

olur.

$$\frac{2}{1 - \frac{|4c_3 - 3c_2^2|}{4c_2\ln\left(\frac{c_2}{2}\right)}} \le \frac{-2}{\ln\left(\frac{c_2}{2}\right)} \left\{2|p'(b)| - 1\right\}$$

$$1-\frac{4c_2\ln^2\left(\frac{c_2}{2}\right)}{4c_2\ln\left(\frac{c_2}{2}\right)-\left|4c_3-3c_2^2\right|}\leq 2\left|p'(b)\right|$$

olur ve

$$\left|p'(b)\right|\geq\frac{1}{2}\left(1-\frac{4c_2\ln^2\left(\frac{c_2}{2}\right)}{4c_2\ln\left(\frac{c_2}{2}\right)-\left|4c_3-3c_2^2\right|}\right)$$

olarak elde edilir.

Teorem 2.5. $f(z)\in\mathcal{M}$ olsun. Kabul edelim ki, $b\in\partial U$ noktasında f fonksiyonu $f(b)$ açısal limite sahip ve $f'(b)=0$ olsun. $z_1,z_2,...,z_n$, U da $f(z)-z$ nin sıfırdan farklı sıfırları olsun. O halde,

$$\left|f''(b)\right|\geq\frac{|f(b)|}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|^2}+\frac{2\left(2\prod_{k=1}^{n}|z_k|-|c_2|\right)^2}{4\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right|}\right) \tag{2.12}$$

eşitsizliği elde edilir.

İspat. $\varphi(z)$ yukarıdaki gibi verilsin ve $z_1,z_2,...,z_n$ U da $f(z)-z$ nin sıfırdan farklı sıfırları olsun.

$$B_1(z)=z\prod_{k=1}^{n}\frac{z-z_k}{1-\overline{z_k}z}$$

fonksiyonu U da analitik ve $z\in U$ için $\left|B_1(z)\right|<1$ dir. Maksimum prensibinden, her $z\in U$ için $\left|\varphi(z)\right|\leq\left|B_1(z)\right|$ olur.

$$m(z)=\frac{\varphi(z)}{B_1(z)}$$

fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon, U da analitik ve $z\in U$ için $|m(z)|\leq 1$ dir. Özellikle,

$$\left|m(0)\right| = \frac{\left|c_2\right|}{2\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|}$$

ve

$$\left|m'(0)\right| = \frac{\left|4c_3 - 3c_2^2 + 2c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|z_k\right|^2}{z_k}\right|}{4\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|}$$

olur.

Ayrıca, kolaylıkla

$$\frac{b\varphi'(b)}{\varphi(b)} = \left|\varphi'(b)\right| \geq \left|B_1'(b)\right| = \frac{bB_1'(b)}{B_1(b)}$$

ve

$$\left|B_1'(b)\right| = 1 + \prod_{k=1}^{n}\frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|b - z_k\right|}$$

ifadeleri elde edilir.

$$\theta(z) = \frac{m(z) - m(0)}{1 - \overline{m(0)}m(z)}$$

bileşke fonksiyonunu alalım. Bu fonksiyon U da analitik ve $z \in U$ için $\left|\varphi(z)\right| < 1$ dir. $b \in \partial U$ için $\theta(0) = 0$ ve $\left|\theta(b)\right| = 1$ olur. (1.4) ten,

$$\frac{2}{1+\left|\theta'(0)\right|} \leq \left|\theta'(b)\right| = \frac{1-\left|m(0)\right|^2}{\left|1-\overline{m(0)}m(b)\right|^2}\left|m'(b)\right| \leq \frac{1+\left|m(0)\right|}{1-\left|m(0)\right|}\left(\left|\varphi'(b)\right| - \left|B_1'(b)\right|\right)$$

$$= \frac{1+\dfrac{\left|c_2\right|}{2\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|}}{1-\dfrac{\left|c_2\right|}{2\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|}}\left\{2\left|p'(b)\right| - \left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|b-z_k\right|}\right)\right\}$$

$$=\frac{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|+|c_2|}{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|-|c_2|}\left\{2|p'(b)|-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|}\right)\right\}$$

elde edilir.

$$|\theta'(0)|=\frac{|m'(0)|}{1-|m(0)|^2}=\frac{\dfrac{\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right|}{4\prod_{k=1}^{n}|z_k|}}{1-\left(\dfrac{|c_2|}{4\prod_{k=1}^{n}|z_k|}\right)^2}=\prod_{k=1}^{n}|z_k|\frac{\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right|}{2\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2}$$

olduğundan,

$$\frac{2}{1+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\dfrac{\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right|}{4\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2}}\le\frac{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|+|c_2|}{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|-|c_2|}\left\{2|p'(b)|-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|}\right)\right\},$$

$$\frac{2\left(4\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2\right)}{4\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}\le$$

$$\frac{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|+|c_2|}{2\prod_{k=1}^{n}|z_k|-|c_2|}\left\{2|p'(b)|-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|}\right)\right\},$$

$$\frac{2\left(2\prod_{k=1}^{n}|z_k|-|c_2|\right)^2}{4\left(\prod_{k=1}^{n}|z_k|\right)^2-|c_2|^2+\prod_{k=1}^{n}|z_k|\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-|z_k|^2}{z_k}\right)\right|}\le 2|p'(b)|-\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-|z_k|^2}{|b-z_k|}\right)$$

ve

$$\left|p'(b)\right| \geq \frac{1}{2}\left(1+\sum_{k=1}^{n}\frac{1-\left|z_k\right|^2}{\left|b-z_k\right|}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2\left(2\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|-\left|c_2\right|\right)^2}{4\left(\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|\right)^2-\left|c_2\right|^2+\prod_{k=1}^{n}\left|z_k\right|\left|4c_3-3c_2^2+2c_2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1-\left|z_k\right|^2}{z_k}\right)\right|}\right)$$

olarak elde edilir.

3. SONUÇLAR

Bu çalışmada sınırda Schwarz lemmasının farklı versiyonları incelenmiştir. $\mathcal{M}$ sınıfını sağlayan analitik $f(z)$ fonksiyonu dikkate alınarak $f''(z)$ fonksiyonunun açısal türevi b sınır noktasında aşağıdan değerlendirilmiştir. Bu değerlendirmede $f(z) = z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots$ fonksiyonunun Taylor açılımdaki c_2 ve c_3 katsayıları kullanılarak yeni eşitsizlikler elde edilmiştir. Ayrıca $f(z)$ fonksiyonunun sıfırdan farklı sıfırları dikkate alınarak elde edilen eşitsizlikler daha da kuvvetlendirilmişlerdir.

4. KAYNAKLAR

Ahlfors, L. V. (1979). *Complex Analysis.* New York: McGraw-Hill.

Ahlfors, L. V. (1938). An extension of Schwarz's Lemma. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 43, 359-364.

Azeroğlu Aliyev T. and B. N. Örnek. (2013). A refined Schwarz inequality on the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations*, 58, 571-577.

Beardon A. F. and Minda D. (2004). A multi-point Schwarz-Pick Lemma. *J. Anal. Math.*, 92, 81-104.

Beardon A. F. and Carne T. K. (1992*).* A Strengthening of the Schwarz-Pick Inequality. *The American Mathematicaly Monthly*, 99(3), 216-217.

Boas Harold P., Julius and Julia. (2010). Mastering the art of the Schwarz Lemma. *American Mathematical Monthly,* 117(9), 770-785.

Burns, D.M. and Krantz, S.G. (1994), Rigidity of holomorphic mappings and a new Schwarz Lemma at the boundary. *J. Amer. Math. Soc.*, 7, 661-676.

Carathéodory, C. (1954). *Theory of Functions* (2). New York: Chelsea.

Çatal, B. and Örnek, B. N. (2018). Some results for classes of holomorphic functions, Some results for classes of holomorphic functions. *Gulf Journal of Mathematics*, 6(1), 46-60.

Dineen S. (1989). The Schwarz lemma. New York: Oxford University Press.

Dubinin, V. N. (2004). The Schwarz inequality on the boundary for functions regular in the disc.*, Journal of Mathematical Sciences,* 122(6), 3623-3629.

Dubinin, V. N. (2007). Applications of the Schwarz lemma to inequalities for entire functions with constraints on zeros. *Journal of Mathematical Sciences*, 143(3), 3069-3076.

Dubinin V. N. (2000). Distortion theorems for polynomials on a circle. *Sbornik: Mathematics*, 191(12), 1797-1807.

Dubinin V. N. (2002). On an application of conformal maps to inequalities for rational functions. *Izvestiva: Mathematics*, 66(2), 285-297.

Dubinin V. N. (2005). Schwarz's lemma and estimates of coefficients for regular functions with free domain of definition. *Matem. Sbornik*, 196*,* 53-74; (2005). *English transl. in Sbornik: Mathematics*, 196(11), 1605-1625.

Dubinin V. N. and Olesov A. V. (2004). Applitation of conformal mapping to inequalities for polynomials. *Journal of Mathematical Sciences*, 122(6), 3630–3640.

Krantz, S. G. (2011). The Schwarz Lemma at the Boundary. *Complex Variables and Elliptic Equations,* 56(5), 455-468.

Markushevich A. I. (1965). *Theory of functions of a complex variable* (I-II-III).Prentice-Hall.

Mateljević, M. (2015). Note on Rigidity of Holomorphic Mappings & Schwarz and Jack Lemma , *ResearchGate*.

Mateljević, M. (2016). Schwarz lemma, the Carathéodory and Kobayashi Metrics and Applications in Complex Analysis. *XIX Geometrical Seminar*, At Zlatibor, Sunday, August 28, 2016 Sunday, September 4, 2016.

Mateljević, M. (2016). Ahlfors-Schwarz lemma, Hyperbolic geometry, the Carathéodory and Kobayashi Metrics, *Symposium Mathematics and Applications*, Faculty of Mathematics, University of Belgrade, VII(1).

Mercer P. R. (1997). Sharpened Version of the Schwarz Lemma. *Journal of Math. Anal. And Applications*, 205, 508-511.

Mercer P. R. (2006). Schwarz-Pick-Type Estimates for the Hyperbolic Derivative, *Hindawi Publishing Corporation, Journal of In equalities and Applications*, 12(2), 1-6.

Osserman R. (2000). A sharp Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 128, 3513–3517.

Osserman R. (1999). A new variant of the Schwarz–Pick–Ahlfors Lemma. *Manuscripta math.*, 100, 123-129.

Osserman R. (1999). From Schwarz to Pick to Ahlfors and beyond*.* *Amer. Math. Soc.*, 46, 868-873.

Örnek, B. N. (2013). Sharpened forms of the Schwarz lemma on the boundary. *Bull. Korean Math. Soc.*, 50(6), 2053-2059.

Örnek B. N. and Akyel T. (2016). Sharpened forms of the Generalized Schwarz inequality on the boundary. *Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.)*, 126(1), 69-78.

Örnek B. N. and Düzenli T. (2018). Boundary Analysis for the Derivative of Driving Point Impedance Functions. *IEEE Transactions on circuits and Systems-II: Express Briefs*, 65(9), 1149-1153.

Örnek B. N. and Düzenli T. (2019). On boundary analysis for derivative of driving point impedance functions and its circuit applications, *IET Circuits, Devices & Systems*, 13(2), 145-152.

Reza F.M. (1962). A Bound for the Derivative of Positive Real Functions. *SIAM Review*,4(1), 40-42.

Richards, P. I. (1947). A special class of functions with positive real part in a half-plane, *Duke Math. J.,* 14(3), 777-789.

Pommerenke C. (1992). Boundary behaviour of conformal maps, volume 299 of Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]. Springer-Verlag, Berlin.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı-Soyadı	: Selin AYDINOĞLU
Uyruğu	: Türkiye Cumhuriyeti
Doğum tarihi ve yeri	: 16.10.1992 - Kocasinan
Medeni hali	: Bekar
e-posta	: selinnaydinoglu@gmail.com

Eğitim Derecesi	**Okul/Program**	**Mezuniyet Yılı**
Yüksek lisans	Amasya Üniversitesi / Matematik	2020
Pedagojik Form.	Ege Üniversitesi / Matematik	2015
Lisans	Ege Üniversitesi / Matematik	2015
Lise	Çiğli Tuğba Özbek Anadolu Lisesi	2010

Çalıştığı Yer	**Görevi**
Suluova Şehit Metehan Atmaca Anadolu Lisesi	Matematik Öğretmeni

Yabancı Dili

İngilizce

Bilimsel Faaliyetler (Yayınlar, Bildiriler, Katıldığı Projeler)

1. Aydınoğlu, S. and Örnek, B.N. (2018). Applications of the Jack's lemma for the holomorphic functions, *Novi Sad J. Math.*, 48(2), 123-137